

DOI:10.3876/j.issn.1000-1980.2014.06.009

混凝土等颗粒型材料的偶极效应分析

邵冬冬, 章 青, 夏晓舟

(河海大学力学与材料学院, 江苏 南京 210098)

摘要: 考虑物质点的偶极效应, 基于 Cosserat 连续体介质力学模型, 把球形微颗粒推广到方形微颗粒, 推导出方形微颗粒对应的偶应力和曲率应变之间的线弹性关系, 并提出了一种能考虑微颗粒倾覆破坏的广义屈服准则。编写了基于 Cosserat 连续体介质力学模型的有限元分析程序, 进行了混凝土试样单轴压缩试验和土体边坡稳定性分析的数值模拟。研究表明, 物质点的偶极效应确实存在, 且是材料发生应变局部化的直接原因。

关键词: 偶极效应; 方形微颗粒; 应变局部化; 数值模拟

中图分类号: TV314 **文献标志码:** A **文章编号:** 1000-1980(2014)06-0513-05

Dipole effect analysis of granular materials (such as concrete)

SHAO Dongdong, ZHANG Qing, XIA Xiaozhou

(College of Mechanics and Materials, Hohai University, Nanjing 210098, China)

Abstract: Within the framework of the Cosserat continuum medium mechanics model, the spherical micro particle is extended and transformed into a square micro particle with consideration of the dipole effect of material points. Based on the Cosserat continuum medium mechanics model, a linear elastic relationship between the couple stress and the curvature strain for the square micro particle is derived, and a generalized yield criterion that can consider the overturning failure of micro particles is put forward. With the finite element analysis program based on the Cosserat continuum medium mechanics model, a numerical simulation was performed in order to analyze the concrete specimens under uniaxial compression and the soil slope stability. The results show that the dipole effect of material points indeed exists, and it is a direct cause of strain localization of materials.

Key words: dipole effect; square micro particles; strain localization; numerical simulation

传统连续介质力学广泛应用于当今各个领域,但在微细观领域,由于尺度效应广泛存在,其适用性受到制约。为了正确而有效地解释尺度效应,偶应力逐渐成为力学研究的热点。早在 19 世纪法国 Cosserat 兄弟^[1]就提出了偶应力理论,即每个颗粒形变时不仅产生位移,还伴随着转动。在基于 Cosserat 连续体理论的有限元方法中,除引入线位移自由度外,还另加入独立于线位移的相对转动自由度。基于 Cosserat 连续体理论进行的数值模拟计算,能有效模拟变形局部化效果并消除了网格依赖性^[2]。该理论在分析特定材料^[3-5]和特定物理现象^[6]时,表现出很高的求解精度和良好的模拟效果。

混凝土、岩体等高度非均质材料形成的颗粒夹杂相形状大小各异,只用球形或圆形来模拟混凝土颗粒等过于单一。本文在 Cosserat 连续体介质力学模型的框架下,把球形微颗粒推广到方形微颗粒,建立考虑方形微颗粒偶极效应的偶应力与曲率应变之间的线弹性关系,在此基础上,提出一种能考虑微颗粒倾覆破坏的广义屈服准则。

1 考虑物质点偶极效应的基本方程

物质点被赋予内禀尺度,其广义应力状态如图 1 所示,图中 σ_{ij} 为应力张量分量, μ_{ij} 为偶应力张量分量,

收稿日期: 2013-11-12
基金项目: 水文水资源与水利工程科学国家重点实验室开放基金(2011490911); 国家自然科学基金(10972072, 51179064, 11132003)
作者简介: 邵冬冬(1989—), 男, 江苏南通人, 硕士研究生, 主要从事细观本构建模和数值模拟研究。E-mail: sbsdd@126.com
通信作者: 章青, 教授。E-mail: lxzhangqing@hhu.edu.cn

因此平衡方程还包括旋转平衡,即

$$\sigma_{ij,i} + b_j = 0 \tag{1}$$

$$\mu_{ij,i} + e_{ijk}\sigma_{ik} + \Psi_j = 0 \tag{2}$$

式中: b_j ——体积力分量; Ψ_i ——体力偶分量; e_{ijk} ——置换符。

与经典连续体相比,剪应力互等定理已不再成立^[7],由于与曲率能量共轭的偶应力的出现,角动量的守恒将产生不对称的应力张量。

几何协调方程:

$$\varepsilon_{ij} = u_{j,i} + e_{jik}\omega_k \tag{3}$$

$$\chi_{ij} = \omega_{j,i} \tag{4}$$

式中: ε_{ij} ——应变张量分量; ω_k ——旋转向量分量; χ_{ij} ——曲率张量分量; $\omega_{j,i}$ ——对旋转向量求偏导。当不考虑旋转向量的影响时,协调方程退化为连续介质力学的几何方程。应变张量 ε 不仅与位移有关,同时与旋转向量也存在关系。

本构方程:

$$\sigma^* = D^* \varepsilon^* \tag{5}$$

式中: D^* ——Cosserat 物质点的弹性矩阵。写成分量形式为

$$\begin{cases} \sigma_{ij} = D_{ijkl}\varepsilon_{kl} \\ \mu_{ij} = H_{ijkl}\chi_{kl} \end{cases} \tag{6}$$

式中: D_{ijkl} ——应力与应变之间的弹性矩阵分量形式; H_{ijkl} ——偶应力与曲率(扭率)应变之间的弹性矩阵分量形式。

2 物质点的弹性矩阵

对于球形物质点,给定其内禀特征尺度,即直径 l_d ,则偶应力 μ 与曲率(扭率)应变 χ 之间的弹性矩阵 H 为^[8]

$$H = \text{diag} [4Gl_d^2 \quad 4Gl_d^2 \quad 4Gl_d^2 \quad 2Gl_d^2 \quad 2Gl_d^2 \quad 2Gl_d^2 \quad 2Gl_d^2 \quad 2Gl_d^2 \quad 2Gl_d^2] \tag{7}$$

式中: G ——细观物质点的剪切模量。

对于方形物质点,应在其局部坐标系下建立本构方程。在局部坐标系下,对于三维问题,物质点的广义应力分量为

$$\sigma^* = [\bar{\sigma} \quad \bar{\mu}]^T \tag{8}$$

广义应变分量为

$$\varepsilon^* = [\bar{\varepsilon} \quad \bar{\chi}]^T \tag{9}$$

则局部坐标系下的本构方程可写为

$$\begin{Bmatrix} \bar{\sigma} \\ \bar{\mu} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \bar{D} & 0 \\ 0 & \bar{H} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \bar{\varepsilon} \\ \bar{\chi} \end{Bmatrix} \tag{10}$$

其中弹性矩阵 $\bar{D}$ 的具体形式如下:

$$\bar{D} = \text{diag} [D_1 \quad D_2 \quad D_2 \quad D_2] \tag{11}$$

其中

$$D_1 = \begin{bmatrix} 2GC_1 & 2GC_2 & 2GC_2 \\ 2GC_2 & 2GC_1 & 2GC_2 \\ 2GC_2 & 2GC_2 & 2GC_1 \end{bmatrix}$$

$$D_2 = \begin{bmatrix} G + G_c & G - G_c \\ G - G_c & G + G_c \end{bmatrix}$$

$$C_1 = \frac{1 - \nu}{1 - 2\nu} \quad C_2 = \frac{\nu}{1 - 2\nu}$$

式中: G_c ——Cosserat 剪切模量; ν ——泊松比。

对于方形物质点,给定其内禀尺度,即长 l_a 、宽 l_b 和高 l_c ,则偶应力 $\bar{\mu}$ 与曲率(扭率)应变 $\bar{\chi}$ 之间的弹性矩

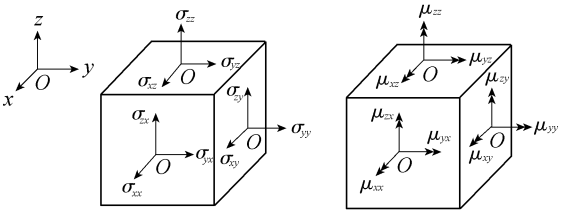


图1 细观物质点的广义应力状态
Fig. 1 Generalized stress state of meso material point

阵 $\boldsymbol{H}$ 为

$$\boldsymbol{H} = \text{diag}\left[G\beta_1l_c \quad G\beta_2l_c \quad G\beta_3l_b \quad \frac{El_c^2}{12} \quad \frac{El_b^2}{12} \quad \frac{El_c^2}{12} \quad \frac{El_a^2}{12} \quad \frac{El_b^2}{12} \quad \frac{El_a^2}{12}\right] \tag{12}$$

式中: E ——细观物质点的弹性模量; $\beta_1, \beta_2, \beta_3$ ——方形截面杆的扭转形状参数,根据该截面长宽(长高或宽高)之比来定,具体数值可由弹性力学^[9]中方形扭转杆的解答给出。

3 考虑物质点偶极效应的广义屈服准则

可直接采用截断型摩尔-库伦屈服准则^[10-11]描述细观物质点拉裂与滑移 2 种极限状态,但由于偶应力的存在导致剪应力不互等,其莫尔圆如图 2 所示(σ_s 与 σ_N 分别代表切向应力和法向应力)。

为了方便,把应力张量分成对称部分和反对称部分^[12],其中对称部分就是传统意义下的应力张量,又可分解成偏量和球量,因此反映拉裂和滑移的截断型莫尔-库伦屈服准则直接利用对称部分套用即可。为了数学上的方便处理,在对称应力张量空间下,可采用 DP (Drucker-Prager) 屈服准则^[13]来反映;对于倾覆这种极限状态,在偶应力空间下描述要比反对称应力张量空间下方便,因为达到倾覆屈服后,偶应力与扭率、曲率应变之间的关系可直接套用应力-应变关系来处理。

对于倾覆或滚动的极限状态可引入静摩阻系数 $\delta_{\max}$,如果对于平面应变问题,球形颗粒的极限平衡状态应为

$$(\tau_{xy} - \tau_{yx})l \leqslant (c + \sigma_N)\delta_{\max} \tag{13}$$

式中: τ_{xy}, τ_{yx} ——平面内的剪应力项; l ——内禀尺度; c ——材料的黏聚力; $\delta_{\max}$ ——砂浆强相颗粒相对于弱项颗粒的静摩阻系数。

空间问题的长方体颗粒相对复杂些,考虑到棱角带来的肋性效应,对摩阻系数加以修正,将应力空间下 DP 屈服准则推广到偶应力空间,即:

$$d\chi_{ij}^p = d\lambda \frac{\partial \varphi}{\partial \mu_{ij}} \tag{14}$$

$$\varphi = \alpha I_{\mu 1} + \sqrt{J_{\mu 2}} - k = 0 \tag{15}$$

$$\frac{\partial I_{\mu 1}}{\partial \mu_{ij}} = [1 \ 1 \ 1 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0]^T \tag{16}$$

$$\frac{\partial \sqrt{J_{\mu 2}}}{\partial \mu_{ij}} = \frac{1}{2\sqrt{J_{\mu 2}}} [s\mu_{xx} \quad s\mu_{yy} \quad s\mu_{zz} \quad s\mu_{xy} \quad s\mu_{yx} \quad s\mu_{yz} \quad s\mu_{zy} \quad s\mu_{zx} \quad s\mu_{xz}]^T \tag{17}$$

$$\begin{bmatrix} s\mu_{xx} & s\mu_{xy} & s\mu_{xz} \\ s\mu_{yx} & s\mu_{yy} & s\mu_{yz} \\ s\mu_{zx} & s\mu_{zy} & s\mu_{zz} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mu_{xx} - \mu_m & \mu_{xy} & \mu_{xz} \\ \mu_{yx} & \mu_{yy} - \mu_m & \mu_{yz} \\ \mu_{zx} & \mu_{zy} & \mu_{zz} - \mu_m \end{bmatrix} \tag{18}$$

$$\mu_m = \frac{\mu_{xx} + \mu_{yy} + \mu_{zz}}{3} \tag{19}$$

$$\frac{\partial \varphi}{\partial \mu_{ij}} = \alpha \frac{\partial I_{\mu 1}}{\partial \mu_{ij}} + \frac{\partial \sqrt{J_{\mu 2}}}{\partial \mu_{ij}} \tag{20}$$

其中

$$I_{\mu 1} = \mu_{xx} + \mu_{yy} + \mu_{zz} \quad \alpha = \frac{3\delta_{\max}}{\sqrt{9 + 12\delta_{\max}}} \quad k = \frac{3cl_c}{\sqrt{9 + 12\delta_{\max}}}$$

$$J_{\mu 2} = \mu_{xx}\mu_{yy} + \mu_{yy}\mu_{zz} + \mu_{zz}\mu_{xx} - \mu_{xy}\mu_{yx} - \mu_{yz}\mu_{zy} - \mu_{zx}\mu_{xz}$$

式中: λ ——实常数。 s 表示对相应变量求偏微分。

对于对称应力空间,弹塑性部分的应力增量计算同连续介质力学处理方式一样。对于偶应力空间,采用理想塑性模型,同样采用广义中点法^[14]算出该迭代步的真实偶应力,然后代入平衡方程(2),算出真实的反对称应力部分。

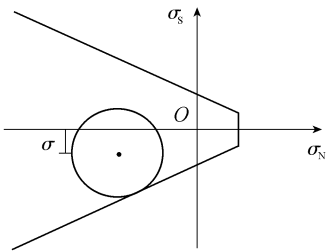


图 2 细观物质点的莫尔圆
Fig. 2 Mohr's circle of meso material point

4 算例分析

通过编写的基于 Cosserat 连续体介质力学模型的有限元分析程序,进行混凝土试样单轴压缩试验的数值模拟,并应用于边坡稳定性分析计算。

4.1 混凝土试样单轴压缩

某一平面应变条件下的混凝土板,大小为 40 cm×40 cm,上下端放置刚性板,施加位移荷载,即接触面上各节点水平位移为 0,垂直位移相同,取 1/4 (20 cm×20 cm) 进行模拟。材料参数为: $E=30\text{ GPa}$, $\mu=0.17$, $c=3\text{ MPa}$, $\delta_{\max}=1\text{ mm}$ 。图 3、图 4 分别为顶部受垂直指定位移 0.04 cm 时试样的变形图及微颗粒旋转位移图。

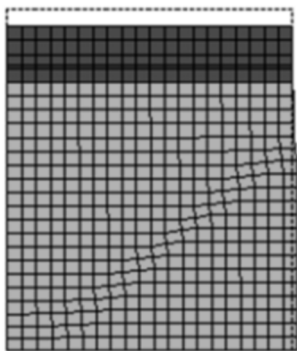


图3 试样变形

Fig. 3 Deformation patterns of specimens

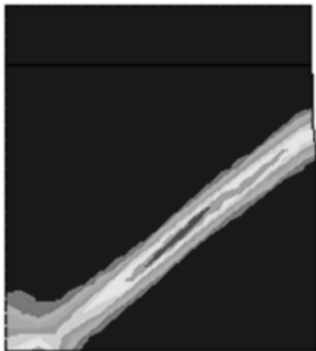


图4 旋转位移等效云图

Fig. 4 Equivalent image of rotational displacement

从图 3 可以看出模拟过程中随着压力的逐渐增加,混凝土在受压方向(面内)发生压缩变形的同时产生横向膨胀,混凝土颗粒发生微旋转(图 4),物质点的偶极效应确实存在。

从图 5 和图 6 可以看出在云图发展区域塑性应变相对集中在试样对角线。考虑压应力与剪应力的关系,一般工程材料满足 $\tau_s=(0.56-0.6)\sigma_s$, σ_s 为压应力, τ_s 为剪应力。算例中得到的剪切塑性应力的值超过上述范围,因此剪切破坏优先发生。

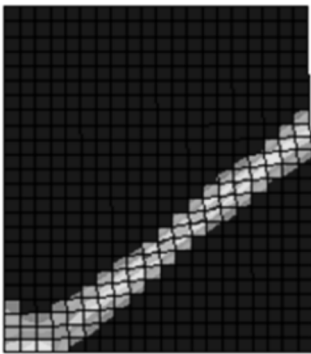


图5 等效塑性应变

Fig. 5 Equivalent plastic strain

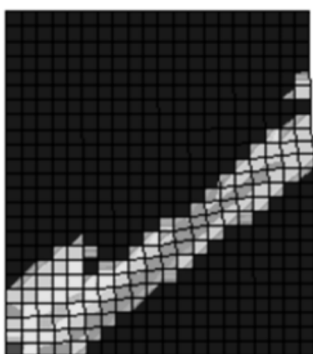


图6 等效塑性应力

Fig. 6 Equivalent plastic stress

由于物质点存在偶极效应,即剪切导致混凝土颗粒旋转,产生局部化变形。等效塑性应变在加载过程中不断发展,在由屈服到破坏过程中达到峰值,最终导致试样发生破坏产生局部变形。从细观层面考虑:一方面,随着剪切应力的逐渐变大,打破了微颗粒的平衡状态,使之发生旋转,激活了颗粒的旋转自由度;另一方面,颗粒的微旋转又加速了局部化变形。由此可推断出物质点的偶极效应存在,且是材料发生应变局部化的直接原因。

4.2 边坡稳定性分析

土体材料具有明显的峰值和残余强度,存在应变软化行为,导致土体的边坡稳定性分析十分复杂。在峰值和残余强度之间,抗剪强度会随着应变的增长而迅速降低,产生非均匀的应变,导致抗剪强度非均匀变化,最终发生渐进破坏。为合理分析这种由应变软化引起的渐进破坏现象,采用基于 Cosserat 连续体介质力学模型的有限元数值方法。

取某土质边坡,底宽 40 m,顶宽 30 m,高 10 m,材料参数为: $E=50\text{ MPa}$, $\mu=0.3$, $G_c=G/3$, $c=50\text{ kPa}$,内禀尺度 l 分别为 1 mm、2 mm、5 mm 3 种颗粒级别且随机分布。假定材料进入塑性后服从线性应变软化规律^[15]: $\sigma=\sigma_y=\sigma_{y0}+h_p\varepsilon_p$,软化模量 h_p 取 -150 kPa 。在边坡顶部添加刚性单元,使施加的荷载压力与实际相符(图 7)。

基于 Cosserat 连续体介质力学模型的有限元分析可以追踪渐进破坏过程,直到出现明显的破坏现象(图 8),相比于传统有限元计算,效率更高,结果更为准确。对于应变软化土体,在接近结构的极限破坏状态时,采用方形微颗粒模型能够模拟出局部化破坏区域的位置及渐进破坏过程,进一步验证了物质点偶极效应的存在与作用。

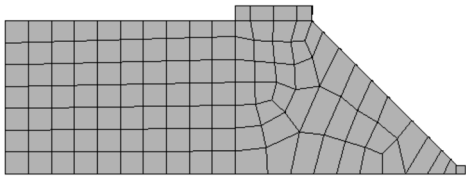


图 7 边坡模型
Fig. 7 Slope model

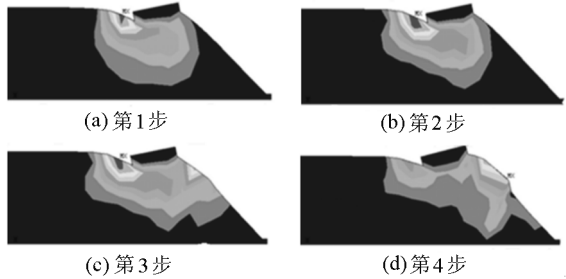


图 8 等效塑性应变演化过程
Fig. 8 Evolution process of equivalent plastic strain

5 结 论

数据模拟证明,考虑物质点的偶极效应,在 Cosserat 连续体介质力学模型框架下推导出的基于方形微颗粒模型下偶应力和曲率应变之间的线弹性关系,以及提出的考虑微颗粒倾覆破坏的广义屈服准则是正确可行的。通过编写基于 Cosserat 连续体介质力学模型的有限元分析程序,能够得到更加准确合理的结果。

参考文献:

[1] COSSERAT E, COSSERAT F. Theorie des corps deformables[M]. Paris: A Hermann & Fils, 1909.

[2] LI Xikui, TANG Hongxiang. A consistent return mapping algorithm for pressure-dependent elastoplastic Cosserat continua and modeling of strain localization[J]. Computers and Structures, 2005, 83(1): 1-10.

[3] NUBEL K, HUANG Wenxiong. A study of localized deformation pattern in granular media[J]. Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, 2004, 193: 2719-2724.

[4] BEVERIDGE A J, WHEEL M A, NASH D H. Themicropolar elastic behavior of model macroscopically heterogeneous materials [J]. International Journal of Solids and Structures, 2013, 50: 246-255.

[5] RAMEZANI H, MOUNANGA P, JEONG J, et al. Role of cement paste composition on the self induced stress in early-age mortars: application of the Cosserat size number[J]. Cement & Concrete Composites, 2013, 39: 43-59.

[6] KHOEI A R, YADEGARI S, BIABANAKI S O R. 3D finite element modeling of shear band localization via the micro-polar Cosserat continuum theory[J]. Computational Materials Science, 2010, 49: 720-733.

[7] ZHANG Hongwu, WANG Hui, CHEN Biosong, et al. Parametric variational principle based elastic-plastic analysis of cosserat continuum[J]. Acta Mechanica Solida Sinica, 2007, 20(1): 65-74.

[8] 张洪武. 参变量变分原理与材料和结构力学分析[M]. 北京: 科学出版社, 2010: 132-136.

[9] 徐芝纶. 弹性力学[M]. 4 版. 北京: 高等教育出版社, 2006: 246-249.

[10] 李育超, 凌道盛, 陈云敏. Cosserat 连续介质的 Mohr-Coulomb 屈服准则及其应用[J]. 浙江大学学报: 工学版, 2005, 39(2): 253-258. (LI Yuchao, LING Daosheng, CHEN Yunmin. The Cosserat continuum Mohr-Coulomb yield criterion and its application [J]. Journal of Zhejiang University: Engineering Science, 2005, 39(2): 253-258. (in Chinese))

[11] 马刚, 常晓林, 周伟, 等. 基于 Cosserat 理论的重力坝深层抗滑稳定分析[J]. 岩土力学, 2012, 33(5): 1505-1512. (MA Gang, CHANG Xiaolin, ZHOU Wei, et al. Analysis of stability against deep sliding of gravity dam based on Cosserat theory[J]. Rock and Soil Mechanics, 2012, 33(5): 1505-1512. (in Chinese))

[12] 王胜军, 陈万吉. 关于弹性偶应力 C^0 和 C^1 理论及有限元[D]. 大连: 大连理工大学, 2008.

[13] 李锡夔, 唐洪祥. 压力相关弹塑性 Cosserat 连续体模型与应变局部化有限元模拟[J]. 岩石力学与工程学报, 2005, 24(9): 1497-1505. (LI Xikui, TANG Hongxiang. The pressure dependent elastoplastic Cosserat continuum model and finite element simulation of strain localization [J]. Chinese Journal of Rock Mechanics and Engineering, 2005, 24(9): 1497-1505. (in Chinese))

[14] 王勖成, 邵敏. 有限单元法基本原理和数值方法[M]. 2 版. 北京: 清华大学出版社, 1997: 448-450.

[15] 李锡夔, 唐洪祥. 基于 Cosserat 连续体模型的应变局部化有限元模拟[D]. 大连: 大连理工大学, 2005.