

DOI:10.3876/j.issn.1000-1980.2014.04.008

基于 XFEM 的主次裂纹间应力强度因子相互作用

陈小翠,杜成斌,江守燕

(河海大学力学与材料学院,江苏 南京 210098)

摘要:采用新型裂尖改进函数构建的 Reduced XFEM,研究次裂纹与主裂纹的相互作用,以及次裂纹对主裂纹应力强度因子的影响,并在裂纹尖端采用互作用积分法计算应力强度因子。计算结果表明:次裂纹存在会使主裂纹的应力强度因子减小;次裂纹长度越长,主裂纹应力强度因子减小得越明显;次裂纹距主裂纹的位置与主裂纹的应力强度因子之间有一定的规律,主裂纹的应力强度因子随主、次裂纹间距离的增大呈“勺”形分布,且当该距离达到一定数值后主裂纹的应力强度因子变化较小,接近单裂纹状态。

关键词:扩展有限元法;主裂纹;次裂纹;应力强度因子;裂尖改进函数

中图分类号:TU311.4 **文献标志码:**A **文章编号:**1000-1980(2014)04-0327-05

Study of interaction between stress intensity factors of main and secondary cracks based on XFEM

CHEN Xiaocui, DU Chengbin, JIANG Shouyan

(College of Mechanics and Materials, Hohai University, Nanjing 210098, China)

Abstract: In this study, the interaction between the main crack and secondary crack was investigated using the Reduced XFEM, which is constructed with a new type of crack tip enrichment function. The effect of the secondary crack on the stress intensity factor (SIF) of the main crack was studied, and the SIF was calculated with the interaction energy integral method at crack tips. The calculation results show that the existence of the secondary crack decreases the SIF of the main crack. The SIF of the main crack decreases significantly with the increasing length of the secondary crack. The changes of the distance from the main crack to the secondary crack and the SIF of the main crack follow certain rules: the SIF of the main crack shows a scoop-shaped distribution as the distance increases, and it changes insignificantly, being close to a single crack state, as the distance reaches a certain value.

Key words: XFEM; main crack; secondary crack; stress intensity factor (SIF); crack tip enrichment function

尽管有限元法已存在数十年,但是有限元法仍不能有效地模拟工程中的裂纹及裂纹生长问题。对于裂纹问题,有限元法需布置高密度网格,并且在裂纹生长计算时有限元网格需要重剖分^[1]。扩展有限元法(extended finite element method, XFEM)就是基于有限元处理不连续问题的弊端而提出的一种新的数值计算方法^[2]。自1999年美国西北大学Belytschko教授及其研究组^[3]提出扩展有限元法后,因XFEM在计算不连续问题时的优越性,十多年来得到迅速发展;Belytschko等^[4]在XFEM中引入新的开裂准则,来判断裂纹生长路径和速度;Song等^[5]增强了含裂纹单元的描述;Fries^[6]、Cheng等^[7]在常规XFEM基础上提出了Corrected-XFEM,以提高数值求解精度;Liu等^[8]通过谱单元与XFEM结合,改善动态裂纹扩展的数值扰动问题。在发展过程中,XFEM的理论基础在不断更新进步,以提高数值求解的精度。

收稿日期:2013-06-17

基金项目:国家自然科学基金(11132003,11372098)

作者简介:陈小翠(1989—),女,江苏东台人,博士研究生,主要从事结构模拟及仿真计算研究。E-mail: xixizu@163.com

通信作者:杜成斌,教授。E-mail: cbdu@hhu.edu.cn

笔者采用文献[9]提出的新型裂尖改进函数,计算分析次裂纹的位置及长度对主裂纹应力强度因子的影响。改进的裂尖改进函数在保留了裂纹尖端场的应力奇异性 and 裂纹上、下表面位移不连续性的基础上,减少了裂尖改进单元的附加自由度。

1 Reduced XFEM 的位移模式简介

二维裂纹体的位移场用常规 XFEM 可表示为^[10]

$$\boldsymbol{u}^h(\boldsymbol{x}) = \sum_{i \in I} N_i(\boldsymbol{x}) \boldsymbol{u}_i + \sum_{i \in I_{\text{abs}}^*} N_i^*(\boldsymbol{x}) H(\boldsymbol{x}) \boldsymbol{a}_i + \sum_{i \in I_{\text{br}}^*} N_i^*(\boldsymbol{x}) \sum_{j=1}^4 F_j(\boldsymbol{x}) \boldsymbol{b}_i^j \tag{1}$$

式中: $\boldsymbol{x}$ ——考察点的坐标; I ——求解域中所有结点的集合; I_{abs}^* ——被裂纹完全贯穿的单元结点集合; I_{br}^* ——裂尖改进结点集合; $N_i(\boldsymbol{x})$ ——结点 i 处的常规有限元插值形函数; $N_i^*(\boldsymbol{x})$ ——单位分解函数,其形式可以与 $N_i(\boldsymbol{x})$ 相同,也可以不同,文中取二者相同; $H(\boldsymbol{x})$ ——Heaviside 改进函数; $\boldsymbol{u}_i$ ——常规有限元部分在结点 i 处的未知量; $\boldsymbol{a}_i$ ——与 Heaviside 改进相关的结点未知量; $F_j(x)$ ——裂尖单元结点改进函数; $\boldsymbol{b}_i^j$ ——与裂尖改进相关的结点未知量。

常规扩展有限元方法根据线弹性断裂力学裂尖解析位移场的基本形式,裂尖单元结点的改进函数可用式(2)表示^[10]:

$$F(r,\theta) = \left[\sqrt{r} \sin\left(\frac{\theta}{2}\right), \quad \sqrt{r} \cos\left(\frac{\theta}{2}\right), \quad \sqrt{r} \sin\theta \sin\left(\frac{\theta}{2}\right), \quad \sqrt{r} \sin\theta \cos\left(\frac{\theta}{2}\right) \right] \tag{2}$$

式中: r, θ ——裂尖极坐标。

文献[9]中约束式(1)第3项的 $\boldsymbol{b}_i^1 = \boldsymbol{b}_i^2, \boldsymbol{b}_i^3 = \boldsymbol{b}_i^4$,利用三角变换方法,改进后的裂尖改进函数为

$$F'(r,\theta) = \left[\sqrt{r} \sin\left(\frac{\theta}{2} \pm \frac{\pi}{4}\right), \quad \sqrt{r} \sin\theta \sin\left(\frac{\theta}{2} \pm \frac{\pi}{4}\right) \right] \tag{3}$$

式(3)中 $\pi/4$ 前的符号与 θ 保持一致。

采用文献[9]中裂尖改进函数,裂尖改进节点的自由度个数从8个减少为4个,并且该裂尖改进函数仍保留了裂纹尖端区应力奇异性($\sqrt{r}$ 项)和位移不连续性($\sin(\ast)$ 函数项)。XFEM 位移模式可表示为

$$\boldsymbol{u}^h(\boldsymbol{x}) = \sum_{i \in I} N_i(\boldsymbol{x}) \boldsymbol{u}_i + \sum_{i \in I_{\text{abs}}^*} N_i^*(\boldsymbol{x}) [H(\boldsymbol{x}) - H_i(\boldsymbol{x})] \boldsymbol{a}_i + \sum_{i \in I_{\text{br}}^*} N_i^*(\boldsymbol{x}) \sum_{j=1}^2 [F_j'(\boldsymbol{x}) - F_j'(\boldsymbol{x}_i)] \boldsymbol{b}_i^j \tag{4}$$

2 水平集法

2.1 裂纹的水平集法描述

裂纹用水平集函数 $\psi(\boldsymbol{x},t)$ 和 $\varphi^k(\boldsymbol{x},t)$ ($k=1,2$) 描述^[11],裂纹面的位置通过 $\psi(\boldsymbol{x},t)$ 的零水平集函数 $\psi(\boldsymbol{x},t)=0$ 来描述。用符号距离函数来构造水平集函数, $\psi(\boldsymbol{x},t)$ 可表示为

$$\psi(\boldsymbol{x},t) = \| \boldsymbol{x} - \boldsymbol{x}^* \| \text{sign}[(\boldsymbol{x} - \boldsymbol{x}^*) \cdot \boldsymbol{n}] \tag{5}$$

波前水平集 $\varphi^k(\boldsymbol{x},t)$ ($k=1,2$) 与 $\psi(\boldsymbol{x},t)$ 正交,可表示为

$$\varphi^k(\boldsymbol{x},t) = (\boldsymbol{x} - \boldsymbol{x}_k) \cdot \boldsymbol{t} \tag{6}$$

式中: $\boldsymbol{x}^*$ ——考察点 P 在裂纹面上的投影点坐标; $\boldsymbol{x}_k$ ——第 k 个裂缝尖端的坐标; $\boldsymbol{n}$ ——裂纹面的单位外法向; $\boldsymbol{t}$ ——第 k 个裂纹尖端处的单位切向矢量; $\text{sign}(x)$ ——符号函数, $x>0$ 时 $\text{sign}(x)=1$, $x=0$ 时 $\text{sign}(x)=0$, $x<0$ 时 $\text{sign}(x)=-1$ 。

2.2 改进单元类型的判断

应用 XFEM 计算裂纹问题时,共有裂尖改进单元和 Heaviside 改进单元这2类改进单元。文中分析时先计算出每个单元内各节点到裂尖的值 $(\varphi^k(\boldsymbol{x},t))_i$ 及 $\psi_i(\boldsymbol{x},t)$,再比较得到各个单元的 $\varphi_{\text{max}}, \varphi_{\text{min}}$ 和 $\psi_{\text{max}}, \psi_{\text{min}}$ 。裂尖改进单元为单元节点的水平集函数满足如下条件:

$$\varphi_{\text{max}} \varphi_{\text{min}} \leq 0 \quad \psi_{\text{max}} \psi_{\text{min}} \leq 0 \tag{7}$$

Heaviside 改进单元为单元节点的水平集函数满足如下条件:

$$\varphi_{\text{max}} < 0 \quad \psi_{\text{max}} \psi_{\text{min}} \leq 0 \tag{8}$$

3 应力强度因子的计算

应力强度因子是衡量裂纹尖端区应力场强度的重要参数,也是断裂力学中裂纹的失效判据。应力强度

因子计算方法主要是解析解法和数值解法。文中采用相互作用积分法计算应力强度因子,裂纹尖端相互作用能量积分公式为^[12]

$$M^{(1,2)} = \int_A (\sigma_{ij}^{(1)} u_{i,1}^{(2)} + \sigma_{ij}^{(2)} u_{i,1}^{(1)} - \sigma_{ik}^{(2)} \varepsilon_{ik}^{(1)} \delta_{lj}) \frac{\partial q}{\partial x_j} dA$$

(9)

其中

$$R = r_k h_e \quad q = \sum_{i=1}^4 N_i q_i$$

(10)

式中: $(\sigma_{ij}^{(1)}, \varepsilon_{ij}^{(1)}, u_i^{(1)})$ ——真实场; $(\sigma_{ij}^{(2)}, \varepsilon_{ij}^{(2)}, u_i^{(2)})$ ——辅助场; A ——以裂尖为圆心、 R 为半径的圆形域; r_k ——自定义常数,用来控制积分区域; q ——与位置相关的参数,在积分区域内的结点 $q=1$,在积分区域外 $q=0$; h_e ——裂尖单元尺寸。

裂纹尖端相互作用积分与应力强度因子的关系为

$$M^{(1,2)} = \frac{2}{E^*} (K_I K_I^{\text{aux}} + K_{II} K_{II}^{\text{aux}})$$

(11)

式中: $K_I^{\text{aux}}, K_{II}^{\text{aux}}$ ——辅助场的应力强度因子; E^* ——与弹性模量有关的参数,平面应力情况下 E^* 取为 E ,平面应变情况下 E^* 取为 $E/(1-\nu^2)$, ν 为泊松比。

取 XFEM 计算的数值解作为真实场,线弹性断裂力学裂尖解析场为辅助场(应力场、位移场),由式(11)可得真实场的 I 型应力强度因子:

$$K_I = \frac{E^* M^{(1,2)}}{2} \quad (K_I^{\text{aux}} = 1, K_{II}^{\text{aux}} = 0)$$

(12)

4 数值算例

4.1 改进的 XFEM 计算 K_I

本算例考察有限尺寸拉伸板的裂纹问题,如图 1 所示。拉伸板宽 $b=1\text{ m}$,高 $h=2\text{ m}$,弹性模量 $E=1\text{ MPa}$,泊松比 $\nu=0.3$,轴向拉伸应力 $\sigma=1\text{ kPa}$ 。网格划分为 19×39 (共 741 个)均匀网格,如图 1(c)所示。计算时分别取缝长 a 为 $0.1\text{ m}, 0.2\text{ m}, 0.3\text{ m}, 0.4\text{ m}, 0.5\text{ m}$ 。

边缘裂纹问题应力强度因子的解析解为^[13]

$$K_I = \left[1.12 - 0.23\left(\frac{a}{b}\right) + 10.56\left(\frac{a}{b}\right)^2 - 21.74\left(\frac{a}{b}\right)^3 + 30.42\left(\frac{a}{b}\right)^4 \right] \sigma \sqrt{\pi a}$$

(13)

中心裂纹问题应力强度因子的解析解为^[14]

$$K_I = \left[1 + 0.256\left(\frac{a}{b}\right) - 1.152\left(\frac{a}{b}\right)^2 + 12.2\left(\frac{a}{b}\right)^3 \right] \sigma \sqrt{\pi a}$$

(14)

采用改进的 XFEM 来计算图 1(a)和图 1(b)所示裂纹问题的 K_I ,并与解析解的计算结果进行比较,如图 2 所示。由图 2 可知,改进的 XFEM 方法的计算结果与解析解结果吻合较好。

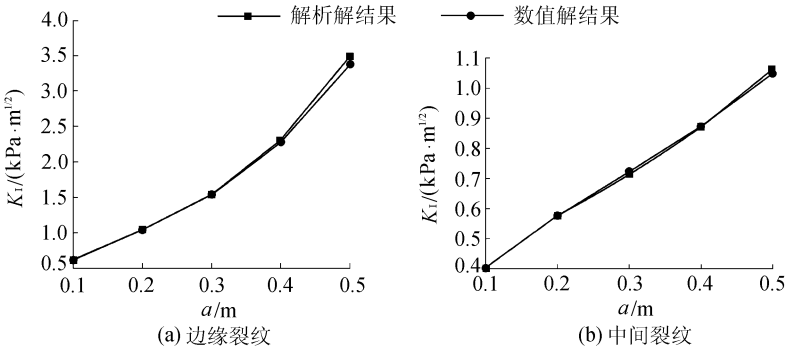


图2 解析解与 XFEM 数值解比较

Fig. 2 Comparison of analytical and XFEM numerical results

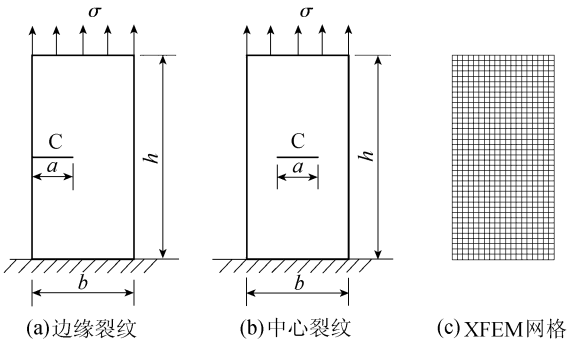


图1 有限尺寸拉伸板
Fig. 1 A finite stretched plate

4.2 有限尺寸拉伸板同侧裂纹问题

本算例分析有限尺寸拉伸板两同侧裂纹之间的影响,计算的拉伸板宽 $b=1\text{ m}$,高 $h=2\text{ m}$,弹性模量 $E=1\text{ MPa}$,泊松比 $\nu=0.3$,轴向拉伸应力 $\sigma=1\text{ kPa}$ 。板边缘设2条裂纹 C1 和 C2,位置如图3所示。为研究 C2 的位置和长度对 C1 的应力强度因子的影响,保持 C1 长度 $a_1=0.5\text{ m}$ 不变,分别改变 C2 的长度 a_2 及2条裂纹之间的距离 d ,用改进的 XFEM 来计算 C1 相应的应力强度因子值。

计算结果如图4和图5所示,C1 单裂纹情况下 K_I 由文献[15]公式计算为 $3.545\text{ kPa}\cdot\text{m}^{1/2}$ 。由图4和图5可知,由于 C2 存在,C1 的 K_I 明显比单裂纹状态结果($3.545\text{ kPa}\cdot\text{m}^{1/2}$)小;由图4可知,C1 长度 a_1 不变,随着 C2 的长度 a_2 从 0.1 m 递增到 0.6 m ,C1 的 K_I 呈明显递减趋势;当 $a_2/a_1=0.9$ 左右时,C2 长度增量对 C1 的 K_I 影响最大;2条裂纹间的距离 d 对 C1 的 K_I 也有一定影响,如图5所示,C1 的应力强度因子随裂纹间距离增加呈“勺”形分布,且这种趋势在 $a_2/a_1\geq 0.86$ 时消失,呈递增趋势;从图5左右两端差异可知,右端无限向单裂纹状态下应力强度因子接近,这主要是由于当 C2 无限远离 C1 时,C1 更接近单裂纹状态;左端裂纹越长,C1 的应力强度因子相对单裂纹的减少量越大。

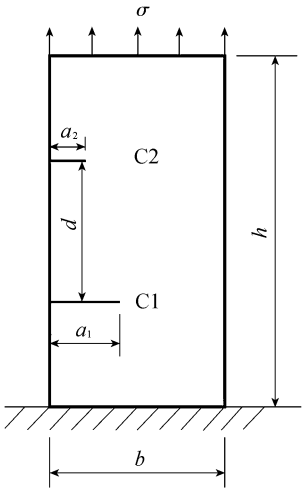


图3 拉伸板
Fig. 3 A stretched plate

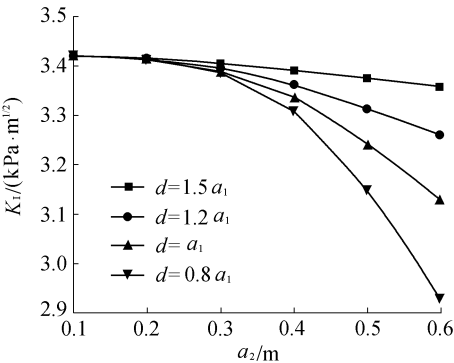


图4 C2长度对C1的 K_I 影响
Fig. 4 Effect of length of C2 on K_I of C1

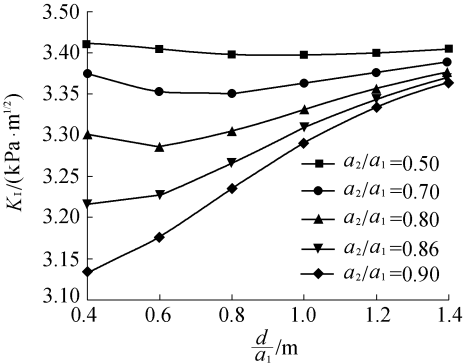


图5 裂纹间距离对C1的 K_I 影响
Fig. 5 Effect of crack distance on K_I of C1

4.3 有限尺寸拉伸板异侧裂纹问题

本算例分析有限尺寸拉伸板的异侧2条裂纹之间的影响,仍采用4.2节的算例,并在板的左右设2条裂纹,位置如图6所示。为研究 C2 的位置和长度对 C1 的应力强度因子的影响,保持 C1 长度 $a_1=0.4\text{ m}$ 不变,分别改变 C2 的长度 a_2 及2条裂纹之间距离 d ,再用改进的 XFEM 来计算 C1 相应的应力强度因子值。

计算结果如图7所示,C1 长度 a_1 不变,随着裂纹间距离 d 增大,C2 长度变化对 C1 的 K_I 影响减小,而随着 C2 的长度 a_2 从 0.1 m 递增到 0.4 m ,C1 的 K_I 值呈明显递减趋势。

5 结 语

用文献[9]提出的改进 XFEM 进行次裂纹对主裂纹应力强度因子的影响研究,通过断裂力学中有限尺寸板的算例,得出该 XFEM 计算的应力强度因子精度较高,与解析解结果吻合。在此基础上研究次裂纹位置和长度对主裂纹应力强度因子的影响,结果表明:对于平行裂纹问题,只要结构有另一条裂纹存在,主裂纹的应力强度因子会明

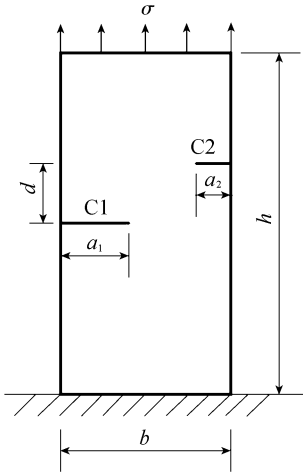


图6 有限尺寸拉伸板(2条裂纹)
Fig. 6 A finite stretched plate (two cracks)

显比单裂纹状态下的 K_I 小;同侧裂纹情况,主裂纹的应力强度因子随次裂纹长度增加有明显的递减趋势,当 d/a_1 达到 1.5 时主裂纹的应力强度因子变化趋于平缓,主裂纹的应力强度因子随裂纹间距离增大呈“勺”形,且这种趋势在 $a_2/a_1 \geq 0.86$ 时消失,呈递增趋势;对于异侧裂纹情况,主裂纹的应力强度因子随次裂纹长度的增加呈整体递减趋势,但随着 2 条裂纹间距离的增大,次裂纹长度变化对主裂纹应力强度因子的影响减小。

参考文献:

[1] 李录贤,王铁军. 扩展有限元法(XFEM)及其应用[J]. 力学进展,2005(1): 5-20. (LI Luxian, WANG Tiejun. The extended finite element method and its applications[J]. Advances in Mechanics,2005(1): 5-20. (in Chinese))

[2] 应宗权,杜成斌,程丽. 含夹杂非均质材料的扩展有限元数值模拟[J]. 河海大学学报: 自然科学版,2008,36(4): 546-549. (YING Zongquan, DU Chengbin, CHENG Li. Application of extended finite element method in heterogeneous materials with inclusions [J]. Journal of Hohai University: Natural Sciences,2008, 36(4): 546-549. (in Chinese))

[3] BELYTSCHKO T, Black T. Elastic crack growth in finite elements with minimal remeshing [J]. Int J Numer Meth Engng, 1999, 45(5): 601-620.

[4] BELYTSCHKO T, CHEN Hao, XU Jingxiao, et al. Dynamic crack propagation based on loss of hyperbolicity and a new discontinuous enrichment [J]. Int J Numer Meth Engng, 2003, 58(12): 1873-1905.

[5] SONG J, BELYTSCHKO T. A method for dynamic crack and shear band propagation with phantom nodes [J]. Int J Numer Meth Engng, 2006, 67: 863-893.

[6] FRIES T. A corrected XFEM approximation without problems in blending elements[J]. International Journal for Numerical Methods in Engineering, 2008, 75(5): 503-532.

[7] CHENG K W, FRIES T. Higher-order XFEM for curved strong and weak discontinuities[J]. International Journal for Numerical Methods in Engineering, 2010, 82(5): 564-590.

[8] LIU Z L, MENOULLARD T, BELYTSCHKO T. An XFEM/Spectral element method for dynamic crack propagation [J]. Int J of Fracture, 2011, 169(2): 183-198.

[9] 江守燕,杜成斌. 一种扩展有限元断裂分析的裂尖单元新型改进函数[J]. 力学学报,2013, 45(1): 134-138. (JIANG Shouyan, DU Chengbin. A novel enriched function of elements containing crack tip for fracture analysis in the framework of extended finite element methods [J]. Chinese Journal of Theoretical and Applied Mechanics, 2013, 45(1): 134-138. (in Chinese))

[10] NICOLAS M, JOHN D, BELYTSCHKO T. A finite element method for crack growth without remeshing [J]. International Journal for Numerical Methods in Engineering, 1999, 46(1): 131-150.

[11] DUFLOT M. A study of the representation of cracks with level sets[J]. 2007, 70(11): 1261-1302.

[12] TOSHIO N, YOUHEI O, SHUICHI T. Stress intensity factor analysis of interface cracks using XFEM [J]. International Journal for Numerical Methods in Engineering, 2003, 56: 1151-1173.

[13] 赵建生. 断裂力学及断裂物理[M]. 武汉:华中科技大学出版社, 2003.

[14] ZAMANI A, GRACIE R, ESLAMI M R. Cohesive and non-cohesive fracture by higher-order enrichment of XFEM [J]. International Journal for Numerical Methods in Engineering, 2012, 90: 452-483.

[15] MOHAMMADI S. Extended finite element method for fracture analysis of structures[M]. Oxford, UK:Blackwell Publishing Ltd, 2008.

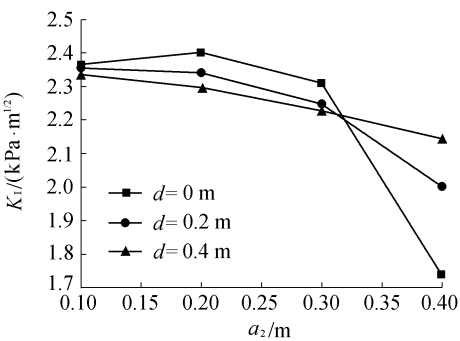


图 7 C2 长度和位置对 C1 的影响

Fig. 7 Effects of length and position of C2 on C1