

DOI:10.3876/j.issn.1000-1980.2014.05.013

# 基于模态应变能的不同损伤指标对比

郭惠勇<sup>1,2</sup>, 盛 懋<sup>1,2</sup>

(1. 重庆大学土木工程学院, 重庆 400045; 2. 重庆大学山地城镇建设与新技术教育部重点实验室, 重庆 400045)

**摘要:**为解决工程结构的多损伤识别问题,对基于模态应变能的不同损伤指标方法进行了对比分析和研究。首先,描述了3种损伤指标,即模态应变能变化指标(MSECI)、模态应变能耗散率指标(MSECRI)和模态应变能基指标(MSEBI);然后借鉴模态应变能耗散率指标的建立原理,通过对刚度矩阵的修正,建立相应的能量等效方程,并提取了一种模态应变能等效指标(MSEEI);最后对4种应变能损伤指标进行了对比研究,并考虑了测量噪声的影响。数值仿真结果表明,模态应变能基指标可以较好地识别结构的损伤位置,模态应变能等效指标则不仅可以有效地识别结构的损伤位置,而且可以较为精确地识别结构的损伤程度。

**关键词:** 损伤识别;模态应变能;应变能变化率;应变能耗散率;应变能基指标

**中图分类号:** TU312<sup>+</sup>.3      **文献标志码:** A      **文章编号:** 1000-1980(2014)05-0444-07

## Comparison of different damage indices based on modal strain energy

GUO Huiyong<sup>1,2</sup>, SHENG Mao<sup>1,2</sup>

(1. College of Civil Engineering, Chongqing University, Chongqing 400045, China;  
2. Key Laboratory of New Technology for Construction of Cities in Mountain Area of the Ministry of Education, Chongqing University, Chongqing 400045, China)

**Abstract:** In order to solve the problem of structural multi-damage identification, different modal strain energy damage index methods are studied and compared. First, three kinds of modal strain energy damage indices, the modal strain energy change index, the modal strain energy dissipation ratio index, and the modal strain energy based index, are described. Then, with consideration of the modal strain energy dissipation ratio index method, an improved equivalence equation is derived through improvement of the stiffness matrix, and a modal strain energy equivalence index is proposed. Finally, four kinds of modal strain energy damage indices are compared, and the impact of the measured noise is considered. Simulation results show that the modal strain energy-based index method can identify structural damage locations, and the proposed modal strain energy equivalence index can not only identify structural damage locations but can identify the damage extent with high accuracy.

**Key words:** damage identification; modal strain energy; strain energy change rate; strain energy dissipation rate; strain energy based index

工程结构的损伤识别研究是国际上的研究热点<sup>[1-5]</sup>。其中,基于模态应变能的损伤识别方法是较为有效的方法。史治宇等<sup>[6-7]</sup>利用单元模态应变能的改变进行了结构的破损识别,并考虑了模态数据具有不完备的因素。Sazonov 等<sup>[8]</sup>利用应变能模态研究了振动基损伤识别方法,并研究了优化的采样间隔时间问题。刘晖等<sup>[9]</sup>考虑了应变能的耗散问题,提出了一种基于应变能耗散率理论的识别方法。郭惠勇等<sup>[10-11]</sup>也采用了应变能耗散率方法与证据理论或贝叶斯理论相结合,对结构的损伤定位进行了研究。Hu 等<sup>[12-13]</sup>利用模态分析法和应变能法研究了复合材料板的表面裂纹识别问题。Seyedpoor<sup>[14]</sup>提出一种两阶段损伤识别方法,其中在第一阶段提出了一种应变能基指标来进行结构的损伤定位研究。目前,现有的应变能损伤指标方法对

收稿日期: 2013-07-01  
基金项目: 国家自然科学基金(51468058);教育部留学回国人员科研启动基金(20121707)  
作者简介: 郭惠勇(1971—),男,陕西西安人,副教授,博士,主要从事结构损伤识别研究。E-mail: ghy267@tom.com

损伤定位的识别效果较好,而对损伤定量的识别效果仍需进一步提高,故笔者根据应变能耗散率指标<sup>[9]</sup>和应变能基指标<sup>[14]</sup>的相关研究成果,提取一种模态应变能等效指标,并对基于模态应变能的不同损伤指标进行对比分析。

1 3 种模态应变能损伤指标

基于模态应变能的损伤识别法是一类较为有效的识别方法,文献[7,9]给出了第  $j$  个单元和第  $i$  阶模态在损伤前、损伤后所对应的模态应变能:

$$E_{uj} = \boldsymbol{\Phi}_i^T \mathbf{K}_j \boldsymbol{\Phi}_i \qquad E_{dj} = \boldsymbol{\Phi}_{di}^T \mathbf{K}_j \boldsymbol{\Phi}_{di}$$

(1)

式中: $\mathbf{K}_j$ ——第  $j$  个单元的刚度矩阵; $\boldsymbol{\Phi}_i$ 、 $\boldsymbol{\Phi}_{di}$ ——损伤前、损伤后结构的第  $i$  阶位移模态。当考虑前  $m$  阶模态时,第  $j$  个单元所对应的损伤前、损伤后的模态应变能  $E_{uj}$  和  $E_{dj}$  为<sup>[7,9]</sup>

$$E_{uj} = \sum_{i=1}^m \boldsymbol{\Phi}_i^T \mathbf{K}_j \boldsymbol{\Phi}_i \qquad E_{dj} = \sum_{i=1}^m \boldsymbol{\Phi}_{di}^T \mathbf{K}_j \boldsymbol{\Phi}_{di}$$

(2)

1.1 模态应变能变化指标

这里给出一种简单的模态应变能变化指标(modal strain energy change index, MSECI),为方便起见,采用符号  $E_c$  表示,则其第  $j$  个单元的应变能变化指标为

$$E_{cj} = \frac{|E_{dj} - E_{uj}|}{E_{uj}}$$

(3)

1.2 模态应变能耗散率指标

刘晖等<sup>[9]</sup>提出了一种应变能耗散率指标(modal strain energy dissipation ratio index, MSIEDRI)法,该方法提出的第  $j$  个单元的损伤系数  $c_j$  为

$$c_j = \frac{|E_{dj} - E_{uj}|}{|E_{dj} - E_{uj}| + E_{uj}}$$

(4)

1.3 模态应变能基指标

Seyedpoor<sup>[14]</sup>则建议了一种模态应变能基指标(modal strain energy based index, MSEBI),通过对应变能的归一化和平均化来提高损伤定位的精度。其令第  $i$  阶模态的总模态应变能为

$$E_{ti} = \sum_{j=1}^N E_{ij}$$

(5)

式中: $E_{ti}$ ——第  $i$  阶模态的总模态应变能; $N$ ——单元总数。则归一化的第  $j$  个单元和第  $i$  阶模态的应变能为

$$E_{nij} = \frac{E_{ij}}{E_{ti}}$$

(6)

当考虑前  $m$  阶模态时,第  $j$  个单元所对应的结构前  $m$  阶模态的平均应变能为

$$E_{mj} = \frac{\sum_{i=1}^m E_{nij}}{m}$$

(7)

规定第  $j$  个单元损伤前的平均应变能为  $E_{umj}$ ,损伤后的平均应变能为  $E_{dmj}$ ,文献[14]给出了第  $j$  个单元的应变能基指标为

$$E_{Bj} = \max \left[ 0, \frac{E_{dmj} - E_{umj}}{E_{umj}} \right]$$

(8)

2 模态应变能等效指标

2.1 应变能等效方程

损伤前、损伤后的精确模态应变能如下:

$$E_{uj} = \sum_{i=1}^m \boldsymbol{\Phi}_i^T \mathbf{K}_j \boldsymbol{\Phi}_i \qquad E_{dj} = \sum_{i=1}^m \boldsymbol{\Phi}_{di}^T \mathbf{K}_j \boldsymbol{\Phi}_{di}$$

(9)

式中: $E_{dj}$ ——损伤后模态应变能的精确表达式; $\mathbf{K}_{dj}$ ——第  $j$  个单元损伤后的刚度矩阵。

当结构损伤后,其第  $j$  个单元的刚度矩阵和第  $i$  阶模态可表示如下:

$$\mathbf{K}_{dj} = \mathbf{K}_j - c_j \mathbf{K}_j \quad \Phi_{di} = \Phi_i - \Delta \Phi_i \tag{10}$$

式中: $c_j$ ——第  $j$  个单元的损伤系数, $0 \leq c_j \leq 1$ 。为了公式表达的简便起见,可令  $u_j = E_{uj}$ 、 $d_j = E_{dj}$ ,则第  $j$  个单元损伤前后的应变能改变为

$$E_{ddj} - E_{uj} = (1 - c_j) d_j - u_j \tag{11}$$

结构的损伤也可以被描述为能量耗散过程,则在  $t$  时刻的能量耗散率为<sup>[15]</sup>

$$\varphi(t) = \frac{-\dot{c}(t)}{[1 - c(t)]^2} \int_V (\sigma^T \epsilon) dV \tag{12}$$

式中: $\sigma$ 、 $\epsilon$ ——应力、应变; $V$ ——结构体积; $\dot{c}(t)$ ——损伤系数的导数。则第  $j$  个损伤单元的能量耗散率为

$$\varphi_j(t) = \frac{-\dot{c}_j(t)}{[1 - c_j(t)]^2} u_j \tag{13}$$

损伤发生时,假设  $c_j(t)$  和  $t$  为线性关系,则导数  $\dot{c}_j(t)$  为常数。如果结构的第  $j$  个单元发生大小为  $c_j$  的损伤,则该损伤结构的第  $j$  个单元的能量耗散为

$$\int_0^{t_d} \varphi_j(t) dt = u_j \int_0^{t_d} \frac{-\dot{c}_j(t)}{[1 - c_j(t)]^2} dt = u_j \frac{-c_j}{1 - c_j} \tag{14}$$

式中: $t_d$ ——损伤时刻的时间。

则由公式(11)和(14),最终可得

$$d_j^2 c_j^4 + 2 d_j (u_j - 2 d_j) c_j^3 + 6 d_j (d_j - u_j) c_j^2 + 2 (u_j - 2 d_j) (d_j - u_j) c_j + (d_j - u_j)^2 = 0 \tag{15}$$

2.2 应变能等效指标的确立

通过费拉里的一阶四次方程解法求解方程(15),可解得 4 个根,据文献[14]可知,损伤后单元的刚度降低,而模态应变能却增加,故可得第  $j$  个单元的模态应变能等效指标(modal strain energy equivalence index, MSEEI):

$$c_j = \max \left[ 0, \frac{E_{dj} - \sqrt{E_{uj} E_{dj}}}{E_{dj}} \right] \tag{16}$$

3 数值计算

考虑如图 1 所示的三维桁架结构(N1~N18 为节点编号。1~50 为杆件编号),其基本参数为:弹性模量  $E=72 \text{ GPa}$ ,材料密度  $\rho=2\,800 \text{ kg/m}^3$ ,杆件长度如图 1 所示,单元截面积为  $0.001 \text{ m}^2$ 。结构的损伤采用刚度降低来模拟,考虑 2 种多损伤工况(表 1),并利用前 3 阶位移模态来计算结构的模态应变能损伤指标。

表 1 三维桁架结构的损伤工况

Table 1 Damage scenarios for three-dimensional truss structure

| 工况 1 |       | 工况 2 |       |
|------|-------|------|-------|
| 单元   | 损伤率/% | 单元   | 损伤率/% |
| 2    | 15    | 5    | 20    |
| 22   | 25    | 20   | 20    |
| 35   | 20    | 44   | 15    |

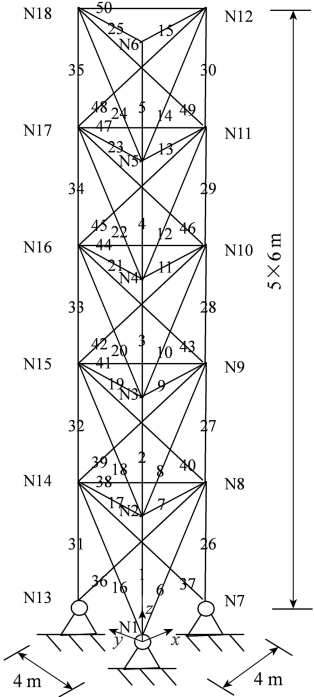


图 1 三维桁架结构

Fig. 1 Three-dimensional truss structure

3.1 工况 1

当单元 2、22 和 35 发生损伤时,4 种损伤指标的计算结果如图 2 所示。从图 2 中可知,MSECI 方法和 MSERDI 方法的定位结果稍差,易误识别单元 50 为损伤单元,而 MSEBI 方法和 MSEEI 方法的定位结果相对较好。从损伤定量角度分析,MSERDI 方法和 MSEEI 方法的定量结果接近于损伤的真实程度。将该 3 个单元的损伤指标值单独提取分析,结果见表 2。从表 2 可知,MSECI 方法和 MSEBI 方法不具备损伤定量的能力,而 MSERDI 方法虽具有一定的损伤定量能力,但其定量识别的误差较大,而 MSEEI 方法的定量识别精度更高。

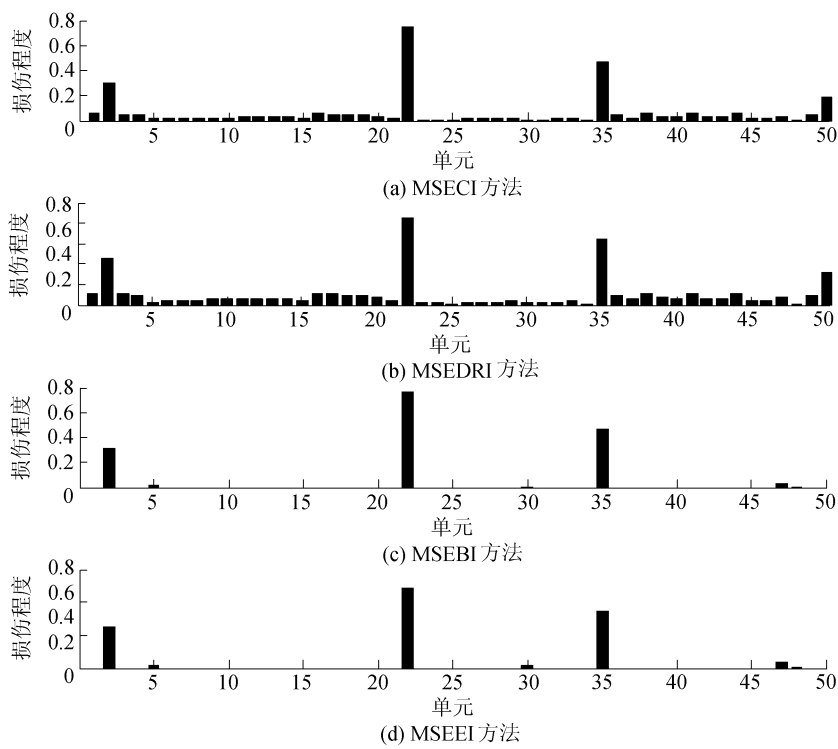


图 2 单元 2、22、35 损伤时 4 种损伤指标方法的识别结果

Fig. 2 Identification results of four damage indices when multiple damages occur in 2nd, 22nd, and 35th elements

表 2 工况 1 的损伤定量识别结果

| 识别方法      | 单元 5    |         | 单元 22   |         | 单元 35   |         | 平均误差    |
|-----------|---------|---------|---------|---------|---------|---------|---------|
|           | 计算结果    | 绝对误差    | 计算结果    | 绝对误差    | 计算结果    | 绝对误差    |         |
| MSECI 方法  | 0.303 1 | 0.153 1 | 0.754 9 | 0.504 9 | 0.470 2 | 0.270 2 | 0.309 4 |
| MSERDI 方法 | 0.232 6 | 0.082 6 | 0.430 2 | 0.180 2 | 0.319 8 | 0.119 8 | 0.127 5 |
| MSEBI 方法  | 0.316 8 | 0.166 8 | 0.767 4 | 0.517 4 | 0.464 9 | 0.264 9 | 0.316 4 |
| MSEEI 方法  | 0.124 0 | 0.026 0 | 0.245 1 | 0.004 9 | 0.175 3 | 0.024 7 | 0.018 5 |

当考虑位移模态有 3% 的测量噪声干扰时,则 4 种损伤指标方法的一次计算结果如图 3 所示。从损伤定位角度分析,MSEBI 方法和 MSEEI 方法的定位结果依然明显好于 MSECI 方法和 MSERDI 方法。从损伤定量角度分析,从图 3 可以发现,本文建议的 MSEEI 方法要好于 MSEBI 方法。故 MSEEI 方法不仅具有较好的定位能力,还具有一定的定量分析能力。由于测量噪声具有一定的随机性,因此每次考虑随机噪声的计算结果都会产生一些小的变化,故未列出定量结果的平均误差表。

3.2 工况 2

当单元 5、20 和 44 发生损伤时,计算结果如图 4 所示。从图 4 可知,MSEBI 方法和 MSEEI 方法的定位结果要明显好于 MSECI 方法和 MSECRI 方法。从损伤定量角度分析,MSECRI 方法和 MSEEI 方法的识别结果接近于损伤的真实程度。该 3 个单元计算结果如表 3 所示。从表 3 可以观察到,MSECI 方法和 MSEBI 方法不具备损伤定量的能力,而 MSECRI 方法虽具有一定的损伤定量能力,但其定量识别的误差较大,而 MSEEI 方法的定量识别结果更好。

表 3 工况 2 的损伤定量识别结果

| 识别方法      | 单元 5    |         | 单元 20   |         | 单元 44   |         | 平均误差    |
|-----------|---------|---------|---------|---------|---------|---------|---------|
|           | 计算结果    | 绝对误差    | 计算结果    | 绝对误差    | 计算结果    | 绝对误差    |         |
| MSECI 方法  | 0.596 1 | 0.396 1 | 0.498 8 | 0.298 8 | 0.286 9 | 0.136 9 | 0.277 3 |
| MSERDI 方法 | 0.373 5 | 0.173 5 | 0.332 8 | 0.132 8 | 0.222 9 | 0.072 9 | 0.126 4 |
| MSEBI 方法  | 0.551 7 | 0.351 7 | 0.527 9 | 0.327 9 | 0.292 5 | 0.142 5 | 0.274 0 |
| MSEEI 方法  | 0.208 5 | 0.008 5 | 0.183 2 | 0.016 8 | 0.118 5 | 0.031 5 | 0.018 9 |

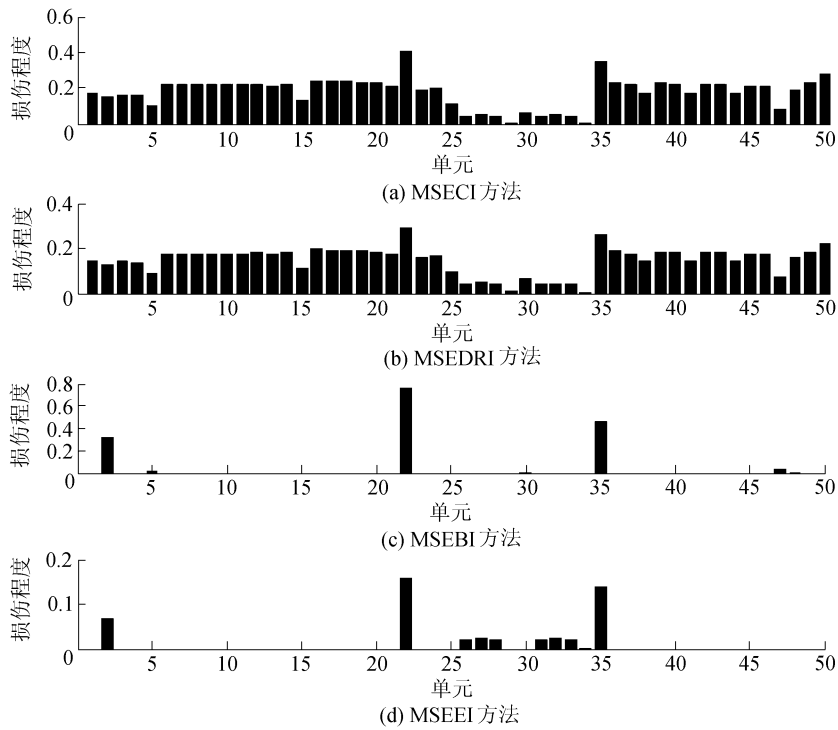


图 3 单元 2、22、35 损伤时 4 种损伤指标方法的识别结果 (考虑 3% 的测量噪声)  
Fig. 3 Identification results of four damage indices when multiple damages occur in 2nd, 22nd, and 35th elements ( considering 3% measured noise)

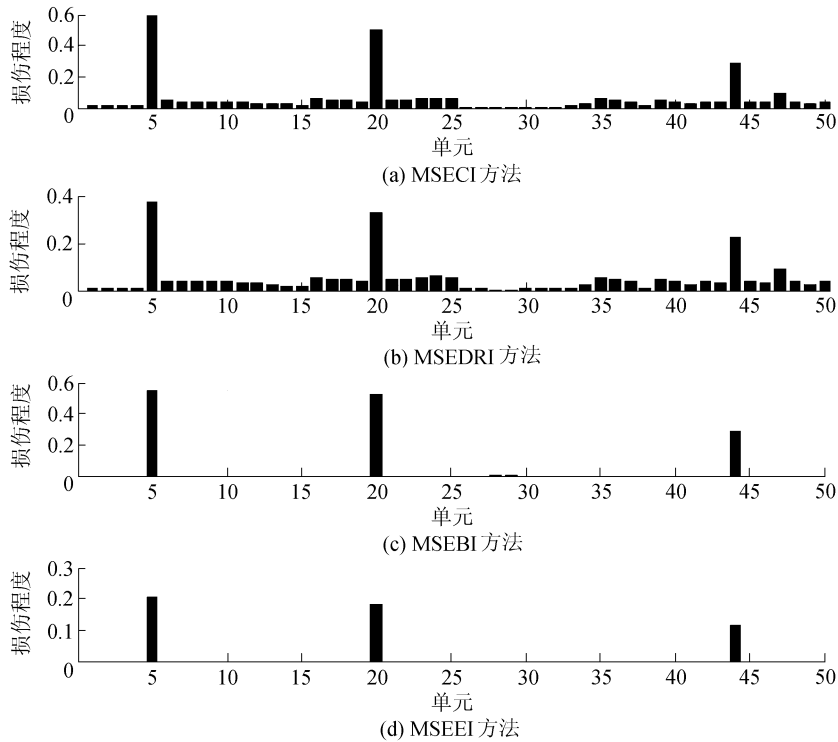


图 4 单元 5、20、44 损伤时 4 种损伤指标方法的识别结果  
Fig. 4 Identification results of four damage indices when multiple damages occur in 5th, 20th, and 44th elements

考虑位移模态具有 3% 的测量噪声干扰,则 4 种损伤指标方法的一次计算结果如图 5 所示。从损伤定位角度分析,4 种损伤指标仍可以较好地识别损伤单元的位置,MSEBI 方法和 MSEEI 方法的定位结果依然明显好于 MSECI 方法和 MSREDRI 方法。从损伤定量角度分析,MSEEI 方法要好于 MSEBI 方法。故 MSEEI 方法不仅具有较好的定位能力,还具有一定的定量分析能力。同样,由于测量噪声具有一定的随机性,则每

次考虑随机噪声的计算结果都会产生一些小的变化,故未列出定量结果的相对误差表。

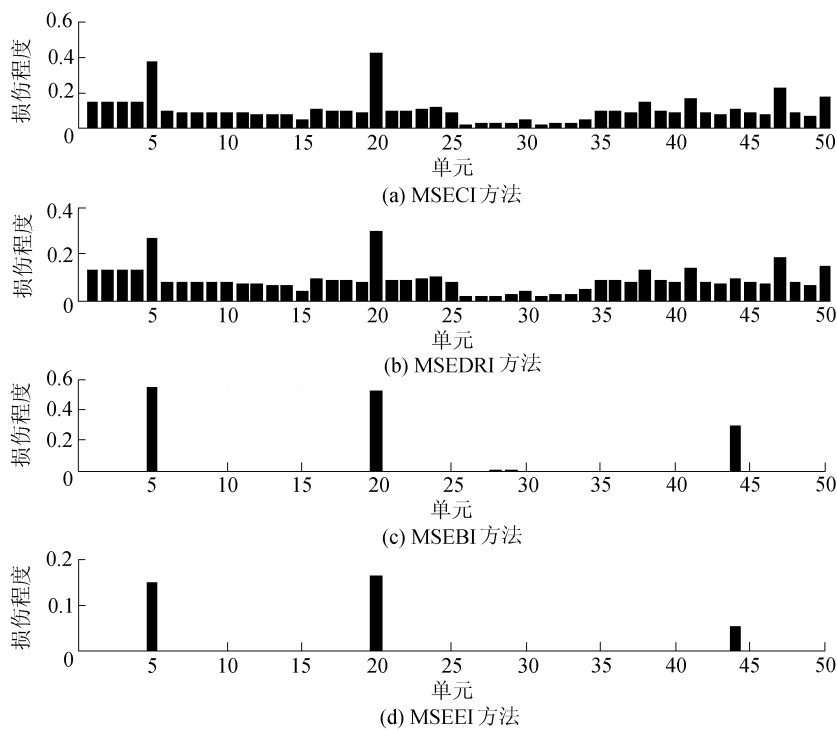


图 5 单元 5、20、44 损伤时 4 种损伤指标方法的识别结果 (考虑 3% 的测量噪声)

Fig. 5 Identification results of four damage indices when multiple damages occur in 5th, 20th, and 44th elements (considering 3% measured noise)

基于三维桁架结构的 2 个多损伤工况算例,从损伤定位角度分析,4 种损伤指标均可以大致确定损伤位置,但 MSECI 方法和 MSERI 方法的定位效果相对较差,而 MSEBI 方法和 MSEEI 方法的定位效果相对较好。从损伤定量角度分析,MSECI 方法和 MSEBI 方法不具备损伤定量能力,不能够识别结构的损伤程度,而 MSERI 方法虽然具有一定的损伤定量能力,但是其定量识别精度不高,MSEEI 方法则具有相对较好的损伤定量能力。

4 结 论

- a. 应变能变化率指标具有一定的损伤定位能力,但无法进行损伤定量分析。
- b. 应变能耗散率指标不仅具有一定的损伤定位能力,而且具有一定的损伤定量能力,但是其损伤定量的精度不高,其计算值一般高于真实损伤程度值。
- c. 应变能基指标具有较好的损伤定位能力,但该指标无法进行损伤定量分析。
- d. 应变能等效指标不仅具有较好的损伤定位能力,而且具有相对较高精度的损伤定量能力,但其计算值一般略低于真实的损伤程度。

参考文献:

[ 1 ] LAW S S, SHI Z Y, ZHANG L M. Structural damage detection from incomplete and noisy modal data[J]. ASCE Journal of Engineering Mechanics,1998,124: 1280-1288.

[ 2 ] BEGAMBRE O, LAIER J E. A hybrid particle swarm optimization-simplex algorithm (PSOS) for structural damage identification [J]. Advances in Engineering Software, 2009, 40: 883-891.

[ 3 ] SAZONOV E, KLINKHACHORN P. Optimal spatial sampling interval for damage detection by curvature or strain energy mode shapes[J]. Journal of Sound and Vibration, 2005, 285(4/5): 783-801.

[ 4 ] LI H, YANG H, HU S L J. Modal strain energy decomposition method for damage localization in 3D frame structures[J]. Journal of Engineering Mechanics,2006,132: 941-951.

[ 5 ] CHINCHALKAR S. Determination of crack location in beams using natural frequencies[J]. Journal of Sound and Vibration,

2001, 247: 417-429.

[ 6 ] 史治宇,罗绍湘,张令弥. 结构破损定位的单元模态应变能变化率法[J]. 振动工程学报,1998,11(3):356-360. (SHI Zhiyu, LAW Shaoxiang, ZHANG Lingmi. Determination of structural damage location based on elemental modal strain energy change[J]. Journal of Vibration Engineering, 1998, 11(3): 356-360. (in Chinese))

[ 7 ] SHI Zhiyu, LAW Shaoxiang. Structural damage localization from modal strain energy change[J]. Journal of Sound and Vibration, 1998, 218(5): 825-844.

[ 8 ] SAZONOV E, KLINKHACHORN P. Optimal spatial sampling interval for damage detection by curvature or strain energy mode shapes[J]. Journal of Sound and Vibration, 2005, 285(4/5): 783-801.

[ 9 ] 刘晖,瞿伟廉,袁润章. 基于模态应变能耗散率理论的结构损伤识别方法[J]. 振动与冲击,2004,23(2): 118-121. (LIU Hui, QU Weilian, YUAN Runzhang. Structural damage detection method based on the theory of dissipationratio of modal strain energy[J]. Journal of Vibration and Shock, 2004,23(2): 118-121. (in Chinese))

[10] 郭惠勇,李正良. 基于模态应变能与频率信息修正的结构多损伤识别研究[J]. 应用基础与工程科学,2008,16(5): 719-725. (GUO Huiyong, LI Zhengliang. An improved information method based on modal strain energy and frequency for structural multiple damage identification[J]. Journal of Basic Science and Engineering,2008,16(5): 719-725. (in Chinese))

[11] GUO Huiyong, LI Zhengliang. Structural damage identification based on Bayesian theory and improved immune genetic algorithm [J]. Expert Systems with Applications, 2012,39: 6426-6434.

[12] HU Huiwen, WANG B T, LEE C H, et al. Damage detection of surface cracks in composite laminates using modal analysis and strain energy method[J]. Composite Structures, 2006, 74(4): 399-405.

[13] HU Huiwen, WU Chengbo. Development of scanning damage index for the damage detection of plate structures using modal strain energy method[J]. Mechanical Systems and Signal Processing, 2009,23(2): 274-287.

[14] SEYEDPOOR S M. A two stage method for structural damage detection using a modal strain energy based index and particle swarm optimization[J]. International Journal of Non-Linear Mechanics, 2012, 47: 1-8.

[15] 周筑宝. 最小耗能原理及其应用[M]. 北京:科学出版社,2001.

· 简讯 ·

## 第十二届中国水论坛将在福州市召开

为了更好地研讨和解决中国面临的水问题,在国内众多专家的支持和努力下,中国水论坛(原称为“中国水问题论坛”)已经成功举办十一届学术研讨会。由中国自然资源学会水资源专业委员会、中国可持续发展研究会水问题专业委员会、中国水利学会水资源专业委员会等主办,河海大学、武汉大学、清华大学等协办的第十二届中国水论坛将于2014年10月31日—11月2日在福州市召开。第十二届中国水论坛将以“变化环境下的水科学与防灾减灾”为主题,从多学科交叉、多学科视野深入研讨。主要议题:(a)变化环境下流(区)域水循环;(b)变化环境下区域水资源可持续发展;(c)水与空间信息科学;(d)水与灾害。

会议电子文件请浏览网站:www.meeting.edu.cn(中国学术会议在线)。  
(本刊编辑部供稿)