

DOI:10.3876/j.issn.1000-1980.2021.04.011

不同荷载工况下钢筋混凝土深梁的拓扑优化设计

张鹤志^{1,2},王 熙¹,谢献忠^{1,2},杨彤麟¹,范 达¹

(1. 湖南科技大学土木工程学院,湖南 湘潭 411201;
2. 湖南科技大学结构抗风与振动控制湖南省重点实验室,湖南 湘潭 411201)

摘要:为探讨不同荷载工况对钢筋混凝土深梁拓扑优化的影响,同时改进当前深梁设计方法,采用渐进演化类拓扑优化算法寻求钢筋混凝土开洞深梁在不同集中加载工况和荷载集度工况下的最优拓扑结构,再依据这些最优拓扑结构建立相应的压杆-拉杆模型,并分析这些最优拓扑结构和压杆-拉杆模型的差异。结果表明:压杆-拉杆模型均为较符合满应力分布的 Michell 结构;集中荷载作用在梁顶时,荷载从加载点通过最短直线压杆以压力的形式向支座传递;集中荷载作用梁腹和梁底时,荷载则通过伞状拉杆悬挂在主压拱上,再向支座传递;随着荷载集度降低,最优拓扑结构向拱或拱-组合压杆的组合体系演化。在工程设计中,对于不同荷载工况条件下的钢筋混凝土深梁,可以参照最优拓扑结构在内部有针对性地设计隐藏的受压加强构件或受拉钢筋。

关键词:钢筋混凝土深梁;荷载工况;拓扑优化;集中荷载;荷载集度;结构优化设计

中图分类号:TU312 **文献标志码:**A **文章编号:**1000-1980(2021)04-0366-07

Topology optimization design for RC deep beams under different load conditions

ZHANG Huzhi^{1,2}, WANG Xi¹, XIE Xianzhong^{1,2}, YANG Tonglin¹, FAN Da¹

(1. School of Civil Engineering, Hunan University of Science and Technology, Xiangtan 411201, China;
2. Hunan Provincial Key Laboratory of Structures for Wind Resistance and Vibration Control, Hunan University of Science and Technology, Xiangtan 411201, China)

Abstract: To discuss the influence of load conditions on the topology optimization for RC deep beams, and improve their current design methods as well, in this paper the optimal topology structures for RC deep beams with openings under different concentrated loading conditions and different load concentration conditions were separately evolved based on the evolutionary topology optimization algorithm. Then, the corresponding Strut-and-Tie models were constructed according to these optimal topology structures. The diversities among these optimal topology structures and among these Strut-and-Tie models were discussed next. The results show that all these Strut-and-Tie models conform better to Michell structures which have full stress distribution. The loads are always transmitted from the loading point to the support in the form of pressure through the shortest straight struts when a concentrated load is applied on the top surface of the beams, while the loads are suspended on the main pressure arch by umbrella shaped ties and then transmitted to the support when a concentrated load is applied on the web or bottom of the beams. The optimal topological structures always evolve into arch structures or hybrid system of arch-and-composite-strut as the load concentration decreases, especially those are close to uniform loads applied on the beam. Furthermore, the RC deep beams under different load conditions may be designed with some hidden reinforced compression parts and tensile reinforcements in beam body by the light of the optimal topology structures in engineering designs.

Key words: RC deep beam; load condition; topology optimization; concentrated load; load concentration; structural optimization design

钢筋混凝土深梁^[1]作为一种高承载能力构件,在高层建筑转换层等荷载工况较复杂的部位已得到广泛应用。但荷载工况的复杂性,也让深梁的受力机理比一般梁复杂得多,从而造成设计具有较大难度。有时为了方便管道通过可能会在深梁腹部开洞,使其配筋设计变得更为困难^[2]。为应对这一问题,美国 ACI 318-14《混凝土结构设计规范》^[3]推荐压杆-拉杆模型方法,有不少国内外学者基于这种应力设计方法开展了相应的机理探讨^[4]和试验研究^[5-6]。而我国 GB 50010—2010《混凝土结构设计规范》^[7]在附录 G 深受弯构件的设计参考条文

基金项目: 国家自然科学基金青年科学基金(51508182);湖南省教育厅科学研究项目优秀青年项目(18B207)
作者简介: 张鹤志(1984—),男,副教授,博士,主要从事混凝土结构设计基本理论研究。E-mail: zhanghz_hnu@163.com
引用本文: 张鹤志,王熙,谢献忠,等. 不同荷载工况下钢筋混凝土深梁的拓扑优化设计[J]. 河海大学学报(自然科学版),2021,49(4):366-372.
ZHANG Huzhi, WANG Xi, XIE Xianzhong, et al. Topology optimization design for RC deep beams under different load conditions[J]. Journal of Hohai University(Natural Sciences),2021,49(4):366-372.

中给出了参照一般梁并经验性修正后的设计方法。2 种方法中,前者缺乏不同荷载工况条件下的针对性,缺少可靠的压杆-拉杆模型构建方法,同时实用性也有待提高;后者则力学依据模糊,设计合理性明显不足。

随着计算机技术的日新月异,拓扑优化^[8-9]的飞速发展和大量相关的应用研究为设计领域打开了一扇门,从早期的基结构法^[10]、均匀化法^[11],到变密度法^[12]、变厚度法^[13],再到近期的渐进结构优化(ESO)法^[14]和固体各向同性材料惩罚模型(简称 SIMP)法^[15],都展现出良好的工程应用前景。尤其是 ESO 和 SIMP,直观而稳定的优化进程、高效的进化方式和良好的寻优能力让它们在众多拓扑优化方法中脱颖而出,从而关于它们,无论是基于全局寻优能力提升的算法改进^[16-18],还是出于工程设计与优化理论衔接的应用研究^[19-20]都成为研究热点,为钢筋混凝土深梁的拓扑优化和工程设计提供了一条全新思路。

本文以拓扑优化算法为工具,展开不同荷载工况条件下钢筋混凝土开洞深梁的拓扑优化和工程设计研究,以期建立合理的力学模型,掌握相应的力学机理,最终能为相关工程设计提供参考。

1 不同集中加载工况下开洞深梁的最优拓扑结构对比

通过逐步删除低效材料或增加高效材料,使结构向最优化解演化,这是渐进演化类拓扑优化算法寻找结构最优拓扑的基本思想。细化到不同类别时,总体优化目标、删除或增加单元的准则、优化单元依据的灵敏度以及最优结构判定标准就存在一定差别。例如加窗渐进结构优化(WESO)法^[21],一般以单元应力或应变能密度为灵敏度,设定自适应单元删除率窗口,在不断迭代中删除低效和无效材料,演化出满足最小自重、最大刚度或应力均匀化等总体目标的结构最优拓扑。

本节以单侧开洞深梁为例,主要讨论不同加载位置引起的构件最优拓扑结构差别以及相应的力学原因。数值算例均以 ANSYS 有限元软件为平台,选用 PLANE82 单元对材料的线弹性行为进行模拟,在 ANSYS 的 APDL 功能下编写程序实现 WESO,以求得的拓扑解作为对比研究的基本数据。

1.1 基本参数

算例的结构尺寸为 2 000 mm×1 000 mm,两端均设有 120 mm 宽的固定铰支座,梁左侧腹部开设一个洞口,洞口尺寸为 400 mm×400 mm。算例包括 5 种单点集中加载工况:加载点位于梁顶近洞口侧、梁跨中顶部、梁顶远洞口侧、梁跨中腹部以及梁跨中底部,具体构件尺寸参数及荷载工况如图 1 所示,加载点下设有 100 mm 宽的刚性垫块以防止构件局部承压破坏。

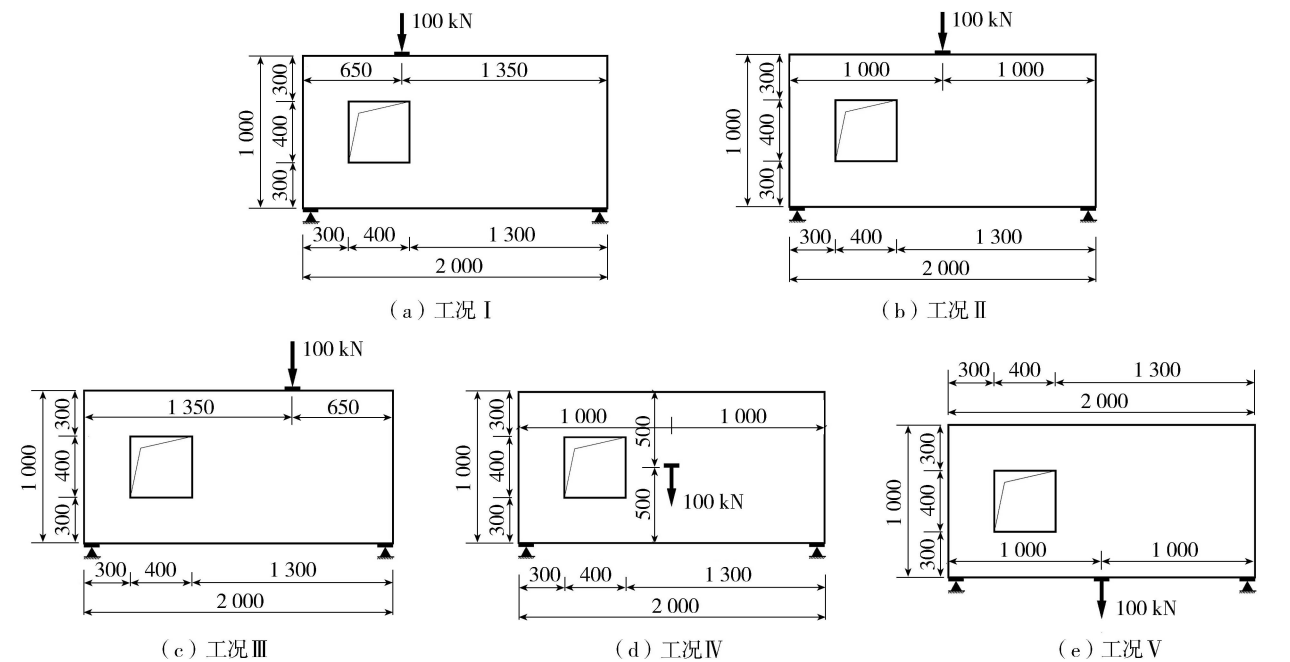


图 1 单侧开洞深梁在不同位置单点集中加载工况下的初始设计域(单位:mm)

Fig. 1 Initial design domain for deep beams with openings on one side under single-point concentrated loading conditions at different positions (units: mm)

有限元分析中将钢筋混凝土视为一种可拉可压的复合材料,5个构件均处于平面应力状态,材料本构采用的杨氏弹性模量 E 均为28 GPa,泊松比 ν 均为0.2,单元尺寸均为10 mm×10 mm,厚度为实常数(50 mm)。参考文献[21]选择 WESO 算法参数:过程选择的初始劣等个体评判标准均为单元应变能小于 $0.05\bar{\varepsilon}$ ($\bar{\varepsilon}$ 为结构平均单元应变能,0.05为窗宽初始阈值),当某代淘汰单元总数小于100时,下代窗宽阈值自适应地增加0.001;当某代淘汰单元总数处于100~300时,下代窗宽阈值不变;当某代淘汰单元总数大于300时,下代窗宽阈值自适应地缩至2/3。

1.2 最优拓扑结构

以图1(b)工况Ⅱ下的拓扑优化为例,简述 WESO 的拓扑优化过程。初始拓扑如图2(a)所示,图2(b)~(f)分别为优化至删除率为17%、34%、44%和58%时对应的拓扑图,图2(f)为寻得的最优拓扑(删除率为92%)。由图2(a)(b)(c)可以看出,优化初期主要集中在右端的顶部和跨中的下腹,紧接着开始优化左端顶部和右侧底部;从图2(d)(e)可以看出,随着迭代次数增加,拓扑结构显著沿着压力和拉力的传递路径向杆系结构演化,至图2(f)所示的最优拓扑结构,右侧部分已完全演化为一根斜直压杆,左侧受洞口影响,演化出瓶形组合压杆。

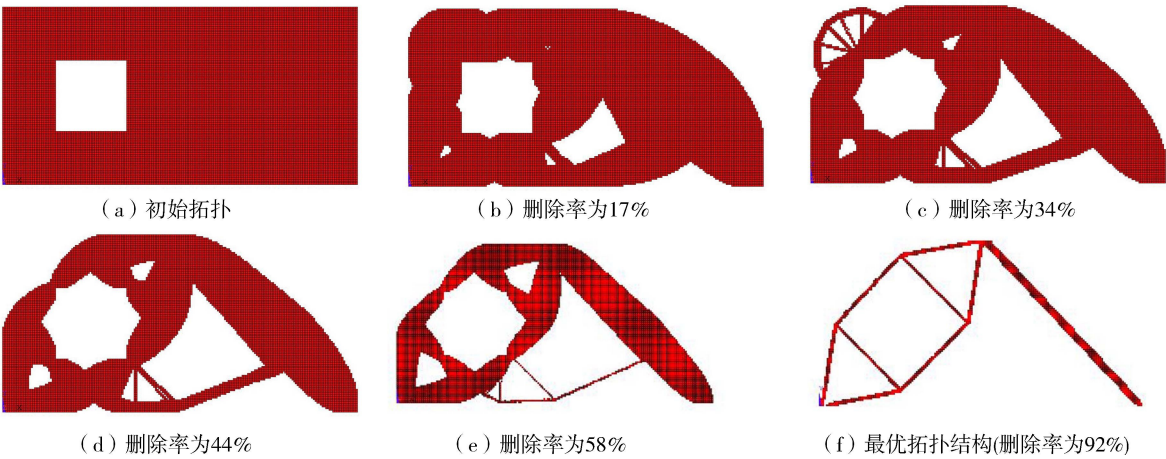


图2 单侧开洞深梁在单点集中加载工况Ⅱ下的拓扑优化过程

Fig.2 Topology optimization process of deep beam with opening on one side under single-point concentrated loading condition Ⅱ

其他工况下的最优拓扑结构如图3所示。从图3可以看出,不同的单点集中加载工况下最优拓扑结构均显著表现为由直杆组合而成的杆系结构,这在反映结构内部最直接传力路径的同时,也为建立阐释其受力机理的压杆-拉杆模型等力学模型提供了参考依据。

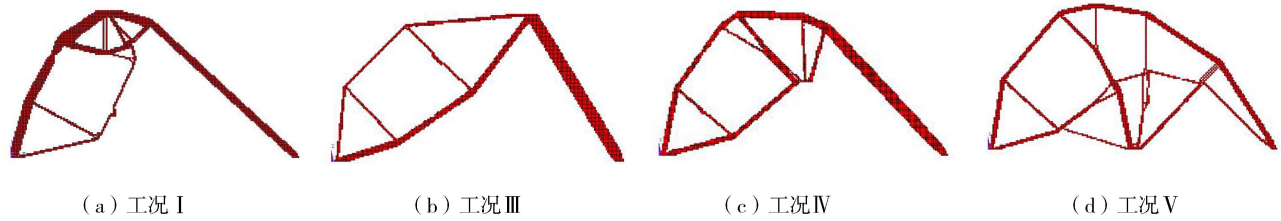


图3 单侧开洞深梁在其他单点集中加载工况下的最优拓扑结构

Fig.3 Optimal topology structures of deep beams with openings on one side under other single-point concentrated loading conditions

1.3 压杆-拉杆模型

图4为依据第1.2节最优拓扑结构建立的压杆-拉杆模型。从图4(a)(b)(c)可以看出,当深梁承受顶部的集中荷载时,梁体内均以压力形式分别向两端底部的固定铰支座传递,未开洞的右侧即为斜直杆,受开洞影响而无法直接传递压力的左侧则构造变换出从洞口两侧分化传递的折线压杆,仅图4(a)工况Ⅱ下因绕过洞口右下方的折线压杆向左端底部固定铰支座传力有一定困难,因而表现出一些局部特性,即在集中加载点附近的梁顶区域形成类 Michell 桁架体系以帮助这根洞口右下方的折线压杆的传力。从图4(d)可以看

出,当深梁承受跨中腹部的集中荷载时,由左侧绕过洞口左上方的折线压杆、顶部的弧形压杆和右侧的斜直压杆构成一个主受压结构,跨中腹部的集中荷载通过伞状拉杆悬吊在这个主受压结构上,而洞口右下方因还存在直接向左端底部固定铰支座直接传递部分压力的条件,故留有一条次要折线压杆。从图 4(e)可以看出,当深梁承受跨中底部的集中荷载时,在洞口上下各形成了一道近似压拱的结构,集中荷载则通过伞状拉杆悬吊在这两道近似压拱结构上。

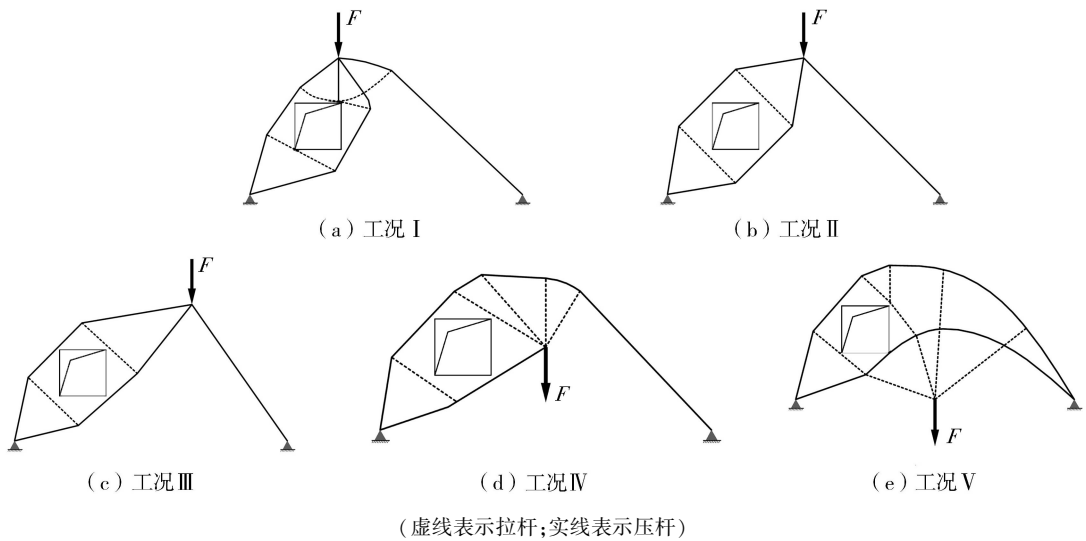


图 4 单侧开洞深梁在不同位置单点集中加载工况下的压杆-拉杆模型

Fig. 4 Strut-and-Tie models of deep beams with openings on one side under single-point concentrated loading conditions at different positions

1.4 最优拓扑结构差异原因分析

Michell 准则通常被视为结构获取满应力状态的理论描述,其认为满应力解中 2 个主应变同号的点,可在其邻域内沿任意方向布置杆件;2 个主应变异号的点处的杆件必须正交。由此,Michell 桁架解须满足所有相交的压杆和拉杆保持正交。图 5(a)和(b)分别为跨高比为 2 的两端固定铰支深梁(未开设洞口)在跨中梁顶和跨中腹部作用集中荷载的 Michell 桁架解。

由图 5(a)可知,集中荷载作用在梁顶时形成的 Michell 结构为三角桁架,即荷载以压力的形式从加载点向两端支座直接传递,因而图 4(a)(b)(c)的右侧均表现为这样的传力方式,而它们的左侧则因洞口的存在而无法直线传力,则完成相应的力学构造变换,以瓶形组合压杆的形式代替三角桁架中的直压杆。仔细观察图 4(a)(b)(c)的差别可以发现,图 4(b)左侧洞口上下的折线压杆基本关于洞口对称,故该侧的瓶形组合压杆也表现为轴对称形态;图 4(c)左侧洞口右下方的折线压杆更接近直线,因而成为该侧的主压杆,故该侧的瓶形组合压杆也表现为偏向右下方的不对称形态;而图 4(a)不仅左侧洞口左上方的折线压杆更接近直线,成为该侧的主压杆,而且洞口右下方的折线压杆回折的角度较大,使其向左端底部固定铰支座传递压力的能力极其有限,随之在洞口上方演化出一个水平梭形的类 Michell 桁架体系来跨越洞口,同时也保障两侧主压杆的传力角度。由此可见,图 4(a)(b)(c)均为从 Michell 结构变换而得的力学体系。

由图 5(b)可知,集中荷载作用在梁腹时形成的 Michell 结构为以两侧斜直压杆和顶部弧形压杆为主压杆,辅以加载点至该主压杆的伞状拉杆组成的桁架体系。显然,图 4(d)十分接近该 Michell 结构,仅左侧洞口右下方表现出局部与图 4(b)类似的折线压杆特征。而且根据集中荷载作用点从跨中梁顶向跨中梁腹移

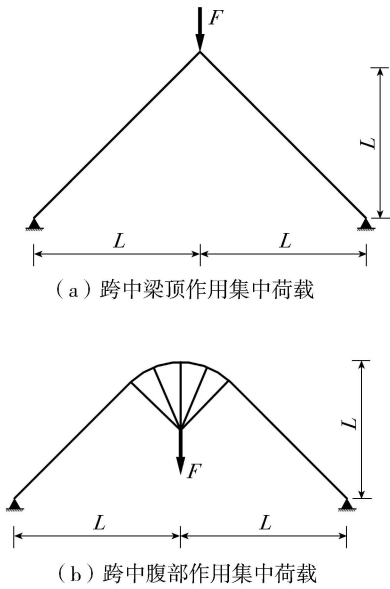


图 5 跨高比为 2 的两端固定铰支深梁单点加载时的 Michell 桁架解

Fig. 5 Michell truss solutions of deep beams supported by fixed hinge at both ends with span height ratio of 2 and single-point loading

动所引起的从图 5(a) 向图 5(b) 的变化, 不难推断集中荷载作用在梁底时形成的 Michell 桁架解为主拱圈辅以加载点至该主拱圈的伞状拉杆组成的体系, 且图 4(e) 正符合这样的 Michell 结构。

2 不同荷载集度工况下开洞深梁的最优拓扑结构对比

以第 1 节的单侧开洞深梁为算例, 探讨降低荷载集度, 即从集中荷载逐渐向均布荷载转化引起的构件最优拓扑结构的差别及相应的原因, 分析及优化参数均与第 1 节相同。

算例包括 3 种不同的荷载集度工况, 分别为 2 点集中加载工况 (每点集中荷载大小为 79.7 kN), 3 点集中加载工况 (每点集中荷载大小为 51.6 kN) 与均布荷载工况 (荷载大小为 106.4 kN/m), 并与图 1(b) 所示的单点集中加载工况进行对比, 荷载值的选取是出于跨中弯矩等效的原则, 具体构件尺寸参数及荷载工况如图 6 所示, 未表明的其他参数均与第 1 节相同。

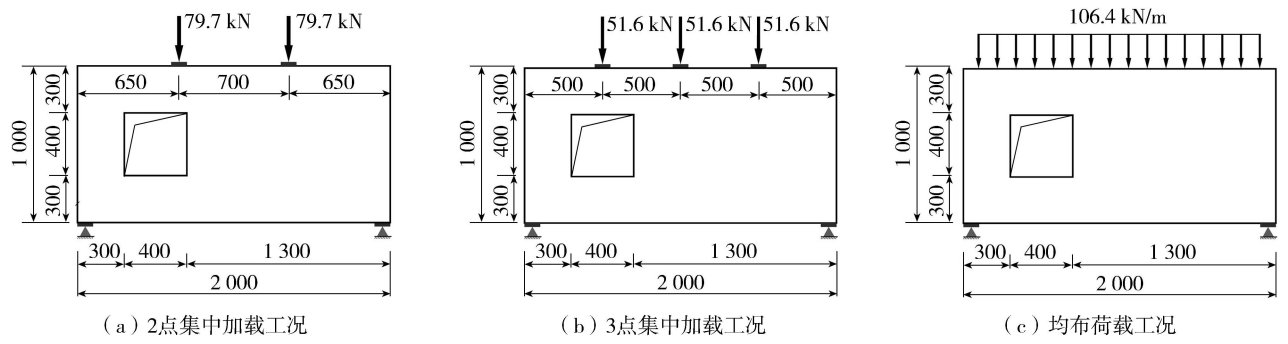


图 6 单侧开洞深梁在不同荷载集度工况下的初始设计域 (单位: mm)

Fig. 6 Initial design domain for deep beams with openings on one side under different load concentration conditions (units: mm)

图 7 为单侧开洞深梁在不同荷载集度工况下的最优拓扑结构, 图 8 为依据这些最优拓扑结构建立的压杆-拉杆模型。比较图 2(f) 和图 7 可以看出, 随着梁顶荷载集度的降低, 深梁内部传递荷载至两端支座的主受压结构从桁架结构向拱结构转化, 当某侧的主压杆受到开洞影响时, 则构造变换出瓶形压杆在该口两侧绕过该洞口, 以保证该侧的压力传递。由图 5(a) 中给出的梁顶单点集中加载工况下的 Michell 桁架解, 再结合节点力的平衡关系可以推断, 在主受压结构上, 每一点集中力的汇入, 在其作用处形成一个节点, 即改变该处压杆的角度。因此, 从图 4(b) 到图 8, 压杆-拉杆模型从桁架结构向拱结构转化的原因就比较清楚了, 而关于在洞口附近构造变换出瓶形压杆的原因在第 1.3 节和第 1.4 节已进行了相应的解释, 此处不再赘述。

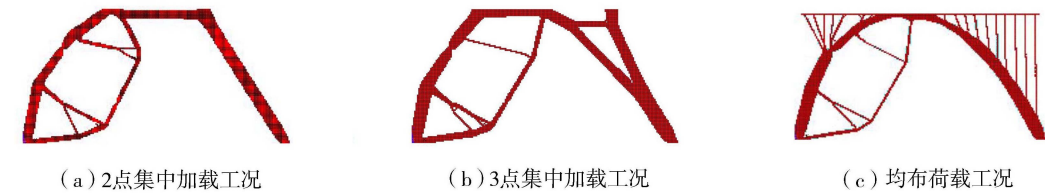


图 7 单侧开洞深梁在不同荷载集度工况下的最优拓扑结构

Fig. 7 Optimal topology structures of deep beams with openings on one side under different load concentration conditions

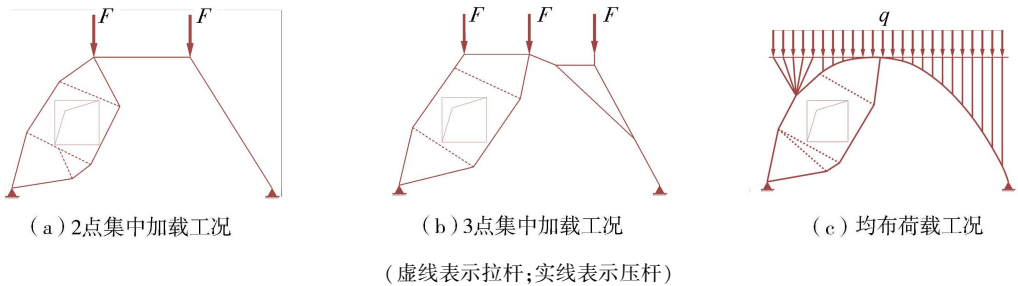


图 8 单侧开洞深梁在不同荷载集度工况下的压杆-拉杆模型

Fig. 8 Strut-and-Tie models of deep beams with openings on one side under different load concentration conditions

3 不同荷载工况条件下钢筋混凝土深梁设计建议

利用渐进演化类拓扑优化算法获取深梁在不同荷载工况下的最优拓扑结构,并据之建立相应的压杆-拉杆模型,同时分析也表明这些力学模型都是出于满应力分布,满足 Michell 准则的最优化结构,从而使钢筋混凝土深梁的设计有了可参考且可靠的力学依据,以下给出具体设计建议:

- a. 当有较大的单点集中荷载作用在钢筋混凝土深梁顶面时,应在加载点与支座连线上设计配筋加强的斜直压杆。当梁体上开设了洞口且该洞口又阻碍了加载点与支座连线上斜直压杆的设置时,又分为 2 种情况:(a)加载点在洞口近端,这种情况下可以小幅增大斜直压杆的倾角 α ,同时在洞口上方设置类过梁区连接主压杆的顶端,如图 9(a)所示,由此规避洞口对配筋的影响,保证压杆的直线传力;(b)加载点离洞口有一定的距离,这种情况下可将与洞口同侧的加载点至支座连线上的压杆设计成涵盖洞口的瓶形压杆,如图 9(b)所示,但此时洞口内侧上方和外侧下方的箍筋或斜拉钢筋要进行构造加强。
- b. 当单点集中荷载作用在钢筋混凝土深梁腹部或底部时,应在作用点布置向上的伞状受拉钢筋,如图 9(c)所示。
- c. 当单点集中荷载作用在钢筋混凝土深梁下腹或梁底,又或者均布荷载作用在钢筋混凝土深梁上时,特别是后者,应在梁体内设置一道甚至多道暗藏主拱圈来受压,如图 9(d)所示;当梁体上开设洞口影响了主拱圈直接传力时,受影响的拱圈部分可等代为组合压杆,形成拱-组合压杆的受压组合体系,如图 9(e)所示。

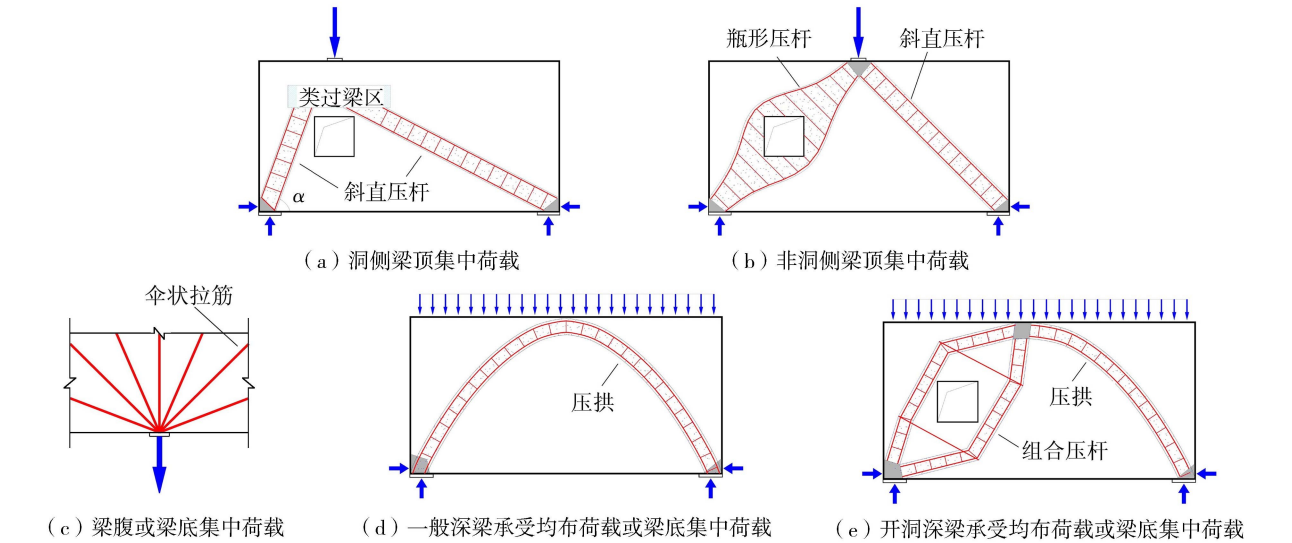


图 9 不同荷载工况条件下钢筋混凝土深梁设计建议

Fig. 9 Design suggestions for RC deep beams under different load conditions

此外,渐进演化类拓扑优化算法从构件内部传力机制出发,设计的配筋多集中在弹性应力较大的部位,出于对构件弹塑性受力特性的考虑,同时从正常使用极限状态的角度出发,在优化设计的“空白处”还需要添加一些最低构造要求的分布钢筋。

4 结 论

- a. 利用渐进演化类拓扑优化算法可以寻得不同荷载工况条件下钢筋混凝土深梁的最优拓扑结构,依据这些最优拓扑结构可以建立起压杆-拉杆模型,且经证明,这些最优拓扑结构和压杆-拉杆模型均较为符合满应力分布的 Michell 结构。
- b. 单点集中荷载作用在钢筋混凝土深梁顶面时,最优拓扑结构表现为通过最短直线压杆向支座传力的形态;单点集中荷载作用在钢筋混凝土深梁底部时,最优拓扑结构为主压拱和在该拱上悬吊集中力的伞状拉杆。当梁体上开设洞口影响了压杆的直线传力时,则可将直压杆构造变换成受力等效的,绕过洞口的瓶形压杆。
- c. 随着钢筋混凝土深梁上荷载集度的降低,最优拓扑结构从桁架结构向拱结构转化。
- d. 可以依据渐进演化类拓扑优化算法的结果,按不同的荷载工况条件在钢筋混凝土深梁内部设计隐藏的

受压加强构件或配置有针对性的受拉钢筋,从而完成不同荷载工况条件下钢筋混凝土深梁的工程优化设计。

参考文献:

- [1] HIZAJI R, YANG T, ARABZADEH A. Experimentally studying and development of curved STM to predict the load capacity and failure mode of fixed-ended RC deep beams[J]. Structure, 2020, 23(2): 289-303.
- [2] 张鹤志, 马哲霖, 黄海林, 等. 不同位移边界条件下的钢筋混凝土深梁拓扑优化[J]. 工程设计学报, 2019, 26(6): 691-699. (ZHANG Huzhi, MA Zhelin, HUANG Hailin, et al. Topology optimization for reinforced concrete deep beam with different displacement boundaries [J]. Chinese Journal of Engineering Design, 2019, 26(6): 691-699. (in Chinese))
- [3] American Concrete Institute. Building code requirements for structural concrete and commentary: ACI 318-14[S]. Michigan: ACI Committee, 2014.
- [4] 邓明科, 马福栋, 李勃志, 等. 基于修正拉-压杆模型的型钢混凝土深梁受剪承载力分析[J]. 工程力学, 2017, 34(12): 95-103. (DENG Mingke, MA Fudong, LI Bozhi, et al. Analysis on shear capacity of SRC deep beams based on modified Strut-and-Tie model [J]. Engineering Mechanics, 2017, 34(12): 95-103. (in Chinese))
- [5] 陈晖, 易伟建. 钢筋混凝土无腹筋简支和连续深梁压杆-拉杆模型的评价与改进[J]. 建筑结构学报, 2019, 40(7): 154-161. (CHEN Hui, YI Weijian. Evaluation and modification of strut-and-tie model for simply-supported and continuous RC deep beams without stirrups [J]. Journal of Building Structures, 2019, 40(7): 154-161. (in Chinese))
- [6] MOHAMMED K D. Strut and tie modeling of deep beams shear strengthened with FRP laminates[J]. Composite Structures, 2018, 193: 247-259.
- [7] 中华人民共和国住房和城乡建设部, 中华人民共和国国家质量监督检验检疫总局. 混凝土结构设计规范: GB 50010—2010(2015 版)[S]. 北京: 中国建筑工业出版社, 2015.
- [8] 蔡新, 李洪煊, 武颖利, 等. 工程结构优化设计研究进展[J]. 河海大学学报(自然科学版), 2011, 39(3): 269-276. (CAI Xin, LI Hongxuan, WU Yingli, et al. Research progress of optimal design for engineering structures [J]. Journal of Hohai University(Nature Sciences), 2011, 39(3): 269-276. (in Chinese))
- [9] 孙蓓, 苏超. 拱圈拓扑优化及结果合理性研究[J]. 河海大学学报(自然科学版), 2009, 37(5): 578-581. (SUN Bei, SU Chao. Topology optimization and rationality of results for arch rings [J]. Journal of Hohai University(Nature Sciences), 2009, 37(5): 578-581. (in Chinese))
- [10] DORN W S, GOMORY R E, GREENBERG H J. Automatic design of optimal structures [J]. Journal de Mécanique, 1964, 3(6): 25-52.
- [11] BENDSOE M P, KIKUCHI N. Generating optimal topologies in structural design using a homogenization method [J]. Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, 1988, 71(1): 197-224.
- [12] YANG R J, CHUANG C H. Optimal topology design using linear programming[J]. Computers and Structures, 1994, 52(2): 265-275.
- [13] HABER R B, JOG C S, BENDSOE M P. A new approach to variable topology shape design using a constraint on perimeter[J]. Structural Optimization, 1996, 11(1): 1-12.
- [14] XIA Liang, XIA Qi, HUANG Xiaodong, et al. Bi-directional evolutionary structural optimization on advanced structures and materials: a comprehensive review [J]. Archives of Computational Methods in Engineering, 2018, 25: 437-478.
- [15] SMITH C C, BHATTACHARYYA A, JAMES K A. Optimal design of compliant mechanisms using functionally graded materials [J]. Structural and Multidisciplinary Optimization, 2018, 57(1): 197-212.
- [16] SEIFI H, JAVAN A R, XU Shanqing, et al. Design optimization and additive manufacturing of nodes in gridshell structures[J]. Engineering Structures, 2018, 160(4): 161-170.
- [17] 易伟建, 刘霞. 遗传演化结构优化算法[J]. 工程力学, 2004, 21(3): 66-71. (YI Weijian, LIU Xia. Genetic evolutionary structural optimization [J]. Engineering Mechanics, 2004, 21(3): 66-71. (in Chinese))
- [18] HE Yunzhen, CAI Kun, ZHAO Zilong, et al. Stochastic approaches to generating diverse and competitive structural designs in topology optimization [J]. Finite Elements in Analysis and Design, 2020, 173: 103399.
- [19] ZHANG Huzhi, LIU Xia, YI Weijian, et al. Performance comparison of shear walls with openings designed using elastic stress and genetic evolutionary structural optimization methods [J]. Structural Engineering and Mechanics, 2018, 65(3): 303-314.
- [20] XIA Yi, LANGELAAR M, HENDRIKS M A N. A critical evaluation of topology optimization results for Strut-and-Tie modeling of reinforced concrete [J]. Computer-Aided Civil and Infrastructure Engineering, 2020, 35: 850-869.
- [21] 王磊佳, 张鹤志, 祝明桥. 加窗渐进结构优化算法[J]. 应用力学学报, 2018, 35(5): 1037-1044. (WANG Leijia, ZHANG Huzhi, ZHU Mingqiao. Windowed evolutionary structural optimization [J]. Chinese Journal of Applied Mechanics, 2018, 35(5): 1037-1044. (in Chinese))