

DOI:10.3876/j.issn.1000-1980.2022.04.015

基于三维极限分析法的 GIM 和 SRM 边坡安全系数计算结果对比

洪 勇^{1,2},邵珠山³,石广斌¹,聂兴信¹

(1. 西安建筑科技大学资源工程学院,陕西 西安 710055;
2. 西安建筑科技大学土木工程学院,陕西 西安 710055; 3. 西安建筑科技大学理学院,陕西 西安 710055)

摘要: 基于三维牛角转动破坏模型的三维极限分析上限理论,建立了考虑坡顶倾角的边坡功率平衡方程,基于 MATHEMATICA 软件采用带有约束条件的穷举法优化求解了边坡安全系数最小值,在考虑参数 $c/\gamma H$ 、内摩擦角 φ 、坡顶倾角 α 和边坡倾角 β 的情况下,定量对比分析了强度折减法(SRM)和容重增加法(GIM)计算的边坡安全系数。结果表明,边坡安全系数等于 1 时,GIM 和 SRM 计算结果接近且近似都等于 1;边坡安全系数大于 1 时,GIM 计算结果大于 SRM;边坡安全系数小于 1 时,SRM 计算结果大于 GIM;边坡安全系数小于 1.2 以下的稳定边坡,GIM 和 SRM 法计算结果无明显差异。

关键词: 三维边坡;安全系数;强度折减法;容重增加法;极限分析

中图分类号: U213.1+3 **文献标志码:** A **文章编号:** 1000-1980(2022)04-0112-09

Comparison of GIM and SRM calculated slope safety factor based on three-dimensional limit analysis method

HONG Yong^{1,2}, SHAO Zhushan³, SHI Guangbin¹, NIE Xingxin¹

(1. School of Resources Engineering, Xi'an University of Architecture and Technology, Xi'an 710055, China;
2. School of Civil Engineering, Xi'an University of Architecture and Technology, Xi'an 710055, China;
3. School of Science, Xi'an University of Architecture and Technology, Xi'an 710055, China)

Abstract: Based on the three-dimensional upper limit analysis theory with three-dimensional horn-like rotational failure mechanism, the power balance equation was established considering slope angle of the slope crest. The software MATHEMATICA and exhaustive method with constraint optimization were used to solve the minimum of safety factor. Under different parameter $c/\gamma H$, internal friction angle φ , slope crest angle α and slope inclination angle β , the slope safety factors calculated by the strength reduction method (SRM) and gravity increase method (GIM) were quantitatively compared and analyzed. The results show that when F_s is equal to one, the results calculated by GIM and SRM are close to each other and approximately equal to one. When F_s is greater than one, GIM is greater than SRM. When F_s is less than one, SRM is greater than GIM method. For stable slopes with F_s below 1.2, the errors of GIM and SRM methods are within the acceptable range.

Key words: three-dimensional slope; safety factor; strength reduction method; gravity increase method; limit analysis

自然界以及工程边坡更多的具有三维空间特性,运用三维稳定性分析方法研究边坡稳定性更符合实际情况。目前三维边坡稳定性分析方法主要有极限平衡法、数值分析法和极限分析法^[1]。极限平衡法是三维边坡稳定性分析中使用最为广泛的方法,但大多数研究和应用是从二维平面向三维空间的拓展和修正,使用中需对静力平衡和滑动面等做出许多假定,导致二维极限平衡法固有的一些缺陷和弊端在三维分析中依然没有得到解决,有些不足甚至得到放大,对三维边坡稳定性分析结果的准确性产生了一定的影响。随着计算机技术和数值方法的发展,三维数值方法能够准确直观地反映边坡三维几何形状、边界条件、应力应变关系

基金项目: 国家自然科学基金(11872287);陕西省教育厅基金(21JK0719);西安建筑科技大学基金(ZR19063)

作者简介: 洪勇(1986—),男,讲师,博士研究生,主要从事岩土与边坡工程研究。E-mail:hy201105@xauat.edu.cn

引用本文: 洪勇,邵珠山,石广斌,等. 基于三维极限分析法的 GIM 和 SRM 边坡安全系数计算结果对比[J]. 河海大学学报(自然科学版), 2022,50(4):112-120.

HONG Yong, SHAO Zhushan, SHI Guangbin, et al. Comparison of GIM and SRM calculated slope safety factor based on three-dimensional limit analysis method[J]. Journal of Hohai University(Natural Sciences), 2022,50(4):112-120.

等信息,模拟边坡破坏渐进过程,越来越广泛地应用于三维边坡稳定性分析,但工程人员熟练掌握还存在一定的困难,此外,分析和研究过程中存在边坡破坏临界标准不统一以及数值计算结果与试验和现场结果存在差异等问题,在实际工程中应用较少。极限分析法具有严密的理论基础,且求解过程简便。2009 年,Michalowski 等^[2]提出了一种三维边坡牛角转动破坏模型,基于该牛角转动破坏模型,相关学者开展了大量的采用极限分析法的三维边坡稳定性的相关研究。

目前常用的计算边坡安全系数 F_s 的方法有强度折减法(strength reduction method,SRM)和容重增加法(gravity increase method,GIM)^[3]。这两种方法在运用有限元法计算 F_s 中研究较多。Zhang 等^[4-7]认为 SRM 和 GIM 定义安全系数方式不同,使用范围也略有不同。GIM 定义简单明确,计算表达式为显性;SRM 由于其为隐式表达式需迭代计算,但在有限元计算中基于已有程序实施简单而被普遍使用。Michalowski 等^[2]在其首次提出的三维牛角破坏模型极限分析上限理论中采用 SRM 计算 F_s ,并从理论上分析了结果为最优上限解时,对比其他研究结果仅是特定边坡参数下的特定值。

基于三维边坡牛角转动破坏模型,国内外众多学者研究了不同破坏模式(坡趾破坏、坡面破坏、坡底破坏)^[8]、边坡几何形态^[9]、考虑土体非均质性和各向异性^[10]、边坡裂缝^[11]、加固形式^[12]、孔隙水压力^[13]、地震荷载^[3]、岩质边坡稳定性分析^[14]等复杂情况下边坡三维极限分析,拓展了边坡三维极限分析的应用范围,与其他研究结果比较表明,基于三维边坡牛角转动破坏模型的极限分析法可以用于边坡稳定性分析,但是计算 F_s 时,主要基于 SRM。Wang 等^[13]基于极限分析法,提出了一种分层总和法计算边坡重力功率和内能耗散,并结合极限分析理论和 GIM 的特点,在其相关研究中均采用 GIM 法计算 F_s ;Yang 等^[3]分析探讨了 SRM 和 GIM 在不同参数下的敏感性规律,并总结得出两者经验关系:SRM 计算 F_s 值为 GIM 的 2/3 次方;Saada 等^[14]采用 GIM 计算岩石 F_s ,结果表明采用 GIM 与传统的最大剪应力与滑面剪应力之比定义安全系数具有等效性。

由以上分析可知,SRM 和 GIM 相关研究更多见于有限元法计算 F_s 的研究中,而随着极限分析法的快速发展和广泛应用,两种方法在极限分析法中计算 F_s 还需深入研究。鉴于此,本文建立了考虑坡顶倾角的三维边坡牛角转动破坏模型,基于极限分析理论构建功率平衡方程,利用满足约束条件的穷举法优化求解 F_s 最小值,在考虑参数 $c/\gamma H$ 、内摩擦角 φ 、坡顶倾角 α 以及边坡倾角 β 的情况下,定量对比分析了 SRM 和 GIM 计算的边坡安全系数,可为边坡工程稳定性分析、设计与施工提供参考。

1 三维边坡牛角转动破坏模型

Michalowski 等^[2]提出的三维边坡牛角状转动破坏模型如图 1 所示^[2]。边坡体材料容重为 γ ,内摩擦角为 φ ,黏聚力为 c ,高度为 H 。三维边坡牛角转动破坏模型可视为由一个外法线方向垂直于边坡走向的圆形以角速度 ω 绕平行于边坡走向且与圆形共面的 O 轴沿上下两条对数螺旋曲线 PAD 和 $P'A'D'$ 转动形成,转动过程中圆形始终保持与 O 轴共面,牛角状转动破坏模型顶角为 2φ , A 、 D 分别为破坏体与边坡坡顶和坡趾的交点。 OA 和 OD 与上面一条螺旋曲线分别交于 A' 点和 D' 点, OA 与水平方向夹角为 θ_0 , OA 与 OA' 的向径

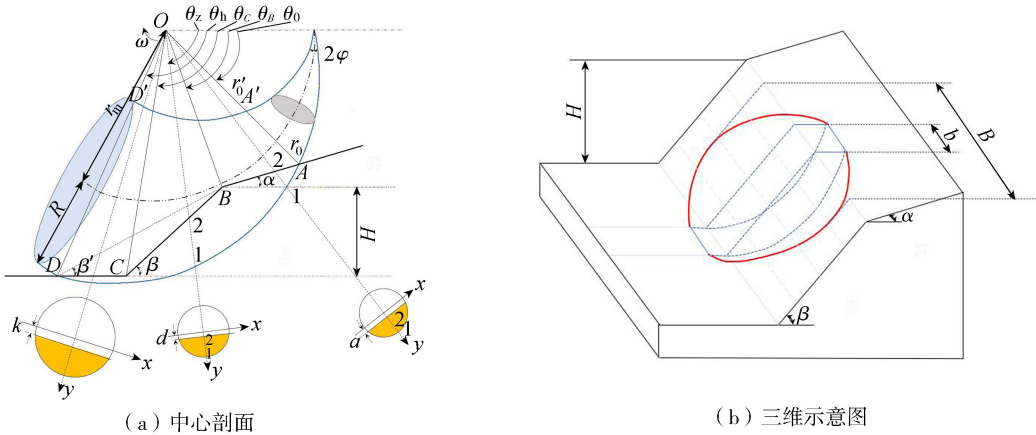


图 1 三维边坡牛角转动破坏模型

Fig. 1 Horn-like rotational failure model of three-dimensional slope

分别为 r_0, r'_0 , OD 的向径为 r_h , 与水平方向夹角为 θ_h , AD 和 $A'D'$ 线上任意一点的向径与水平面方向夹角为 θ , β' 为坡顶与滑面剪出点连线的倾角。对数螺旋曲线 $AD(r)$ 和 $A'D'(r')$ 可以分别表示为

$$r = r_0 e^{(\theta - \theta_0) \tan \varphi} \tag{1}$$

$$r' = r'_0 e^{-(\theta - \theta_0) \tan \varphi} \tag{2}$$

图 1(a) 中, 过 O 轴任意平面与三维牛角相交所得剖面均为圆形, 剖得所有圆心的连线为三维牛角状圆锥面的中心轴线 r_m , 如图 1(a) 中虚线所示, 可以表示为

$$r_m = \frac{r + r'}{2} = r_0 f_1 \tag{3}$$

过 O 轴所作平面与三维牛角状曲面相交所得剖面圆半径 R 可以表示为

$$R = \frac{r - r'}{2} = r_0 f_2 \tag{4}$$

其中

$$f_1 = \frac{1}{2} \left[e^{(\theta - \theta_0) \tan \varphi} + \frac{r'_0}{r_0} e^{-(\theta - \theta_0) \tan \varphi} \right] \quad f_2 = \frac{1}{2} \left[e^{(\theta - \theta_0) \tan \varphi} - \frac{r'_0}{r_0} e^{-(\theta - \theta_0) \tan \varphi} \right]$$

对于宽度很大的边坡, 考虑模拟破坏的实际状态, 在三维边坡牛角转动破坏模型对称面处插入宽度为 b 的块体, 如图 1(b) 所示, 随着 b 的逐渐增大, 插入段在组合破坏模型中逐渐占据主导地位, 当 $b \rightarrow +\infty$ 时, 边坡三维稳定性问题可以简化为平面应变问题。

2 边坡三维稳定性极限分析

极限分析上限理论可以表述为: 在一个假设的运动许可速度场中, 在满足速度边界条件和应变与速度相容条件下, 外力所做功率小于或等于内部耗散功率。本文三维边坡牛角转动破坏模型的能耗计算包括重力产生功率和滑面内能耗散。计算中, 分别计算边坡的三维牛角状破坏部分和中间插入段能耗, 然后统一建立三维边坡牛角转动破坏模型下的功能平衡方程。

2.1 外功率

边坡外功率是由边坡材料重力产生的功率。按照坡面形态, 滑动体由 $\theta_0 - \theta_B$ 、 $\theta_B - \theta_C$ 、 $\theta_C - \theta_h$ 三部分组成, 由这三部分产生的重力功率 $W_{\gamma-3D}$ 计算表达式为

$$\begin{aligned} W_{\gamma-3D} = & 2\omega\gamma \left[\int_{\theta_0}^{\theta_B} \int_0^{\sqrt{R^2 - a^2}} \int_a^{\sqrt{R^2 - x^2}} (r_m + y)^2 \cos\theta dx dy d\theta + \right. \\ & \int_{\theta_B}^{\theta_C} \int_0^{\sqrt{R^2 - d^2}} \int_d^{\sqrt{R^2 - x^2}} (r_m + y)^2 \cos\theta dx dy d\theta + \\ & \left. \int_{\theta_C}^{\theta_h} \int_0^{\sqrt{R^2 - k^2}} \int_k^{\sqrt{R^2 - x^2}} (r_m + y)^2 \cos\theta dx dy d\theta \right] \end{aligned} \tag{5}$$

a 、 d 和 k 分别为三维边坡牛角转动破坏模型中心轴线至坡顶 AB 、坡面 BC 和坡底 CD 的最短距离, 可表达为

$$a = \frac{r_0 \sin(\theta_0 + \alpha)}{\sin(\theta + \alpha)} r_0 - r_m = r_0 f_3 \tag{6}$$

$$d = \frac{\sin(\theta_h + \beta)}{\sin(\theta + \beta)} r_0 e^{(\theta_h - \theta_0) \tan \varphi} - r_m = r_0 f_4 \tag{7}$$

$$k = \frac{\sin\theta_h}{\sin\theta} r_0 e^{(\theta_h - \theta_0) \tan \varphi} - r_m = r_0 f_5 \tag{8}$$

其中

$$f_3 = \frac{\sin(\theta_0 + \alpha)}{\sin(\theta + \alpha)} - f_1 \quad f_4 = \frac{\sin(\theta_h + \beta)}{\sin(\theta + \beta)} e^{(\theta_h - \theta_0) \tan \varphi} - f_1 \quad f_5 = \frac{\sin\theta_h}{\sin\theta} e^{(\theta_h - \theta_0) \tan \varphi} - f_1$$

OB 和 OC 对应的转角 θ_B 、 θ_C 由三角函数关系计算可得:

$$\theta_B = \arctan \frac{\sin(\theta_0 + \alpha)}{\cos(\theta_0 + \alpha) - L/r_0} - \alpha \tag{9}$$

$$\theta_C = \arctan \frac{\sin\theta_h e^{(\theta_h - \theta_0) \tan \varphi}}{\cos\theta_0 - \frac{L}{r_0} \cos\alpha - \left(\sin\theta_h e^{(\theta_h - \theta_0) \tan \varphi} - \sin\theta_0 - \frac{L}{r_0} \sin\alpha \right) / \tan\beta} \tag{10}$$

$$\frac{L}{r_0} = \frac{\sin(\theta_h - \theta_0)}{\sin(\theta_h + \alpha)} - \frac{e^{(\theta_h - \theta_0) \tan \varphi} \sin(\theta_h + \alpha) - \sin(\theta_0 + \alpha)}{\sin(\theta_h + \alpha) \sin(\beta' - \alpha)} \sin(\theta_h + \beta') \tag{11}$$

式中 L 为 AB 段长度。

对重力功率计算式进行解析积分可得：

$$W_{\gamma-3D} = \gamma \omega r_0^4 g_1 \tag{12}$$

其中

$$g_1 = 2 \int_{\theta_0}^{\theta_B} \left[\left(\frac{f_2^2 f_3}{8} - \frac{f_3^3}{4} - \frac{2 f_1 f_3^2}{3} - \frac{f_3 f_1^2}{2} + \frac{2 f_1 f_2^2}{3} \right) \sqrt{f_2^2 - f_3^2} + \left(\frac{f_2^4}{8} + \frac{f_1^2 f_2^2}{2} \right) \arcsin \left(\frac{\sqrt{f_2^2 - f_3^2}}{f_2} \right) \right] \cos \theta d\theta +$$
$$2 \int_{\theta_B}^{\theta_C} \left[\left(\frac{f_2^2 f_4}{8} - \frac{f_4^3}{4} - \frac{2 f_1 f_4^2}{3} - \frac{f_4 f_1^2}{2} + \frac{2 f_1 f_2^2}{3} \right) \sqrt{f_2^2 - f_4^2} + \left(\frac{f_2^4}{8} + \frac{f_1^2 f_2^2}{2} \right) \arcsin \left(\frac{\sqrt{f_2^2 - f_4^2}}{f_2} \right) \right] \cos \theta d\theta +$$
$$2 \int_{\theta_C}^{\theta_h} \left[\left(\frac{f_2^2 f_5}{8} - \frac{f_5^3}{4} - \frac{2 f_1 f_5^2}{3} - \frac{f_5 f_1^2}{2} + \frac{2 f_1 f_2^2}{3} \right) \sqrt{f_2^2 - f_5^2} + \left(\frac{f_2^4}{8} + \frac{f_1^2 f_2^2}{2} \right) \arcsin \left(\frac{\sqrt{f_2^2 - f_5^2}}{f_2} \right) \right] \cos \theta d\theta$$

平面插入段重力功率的计算与二维破坏模型类似,只需再乘以平面插入端的宽度 b 即可：

$$W_{\gamma-insert} = \gamma \omega r_0^4 g_2 \tag{13}$$

其中

$$g_2 = \frac{b}{H} \frac{H}{r_0} (f_6 - f_7 - f_8 - f_9)$$
$$\frac{H}{r_0} = \frac{\sin \beta'}{\sin(\beta' - \alpha)} [e^{(\theta_h - \theta_0) \tan \varphi} \sin(\theta_h + \alpha) - \sin(\theta_0 + \alpha)]$$
$$f_6 = \frac{1}{3(1 + 9 \tan^2 \varphi)} [(3 \tan \varphi \cos \theta_h + \sin \theta_h) e^{3(\theta_h - \theta_0) \tan \varphi} - (3 \tan \varphi \cos \theta_0 + \sin \theta_0)]$$
$$f_7 = \frac{L}{6 r_0} (2 \cos \theta_0 - \frac{L}{r_0} \cos \alpha) \sin(\theta_0 + \alpha)$$
$$f_8 = \frac{1}{6} e^{(\theta_h - \theta_0) \tan \varphi} \left[\sin(\theta_h - \theta_0) - \frac{L}{r_0} \sin(\theta_h + \alpha) \right] \left[\cos \theta_0 - \frac{L}{r_0} \cos \alpha + \cos \theta_h e^{(\theta_h - \theta_0) \tan \varphi} \right]$$
$$f_9 = \left(\frac{H}{r_0} \right)^2 \frac{\sin(\beta - \beta')}{2 \sin \beta \sin \beta'} \left[\cos \theta_0 - \frac{L}{r_0} \cos \alpha - \frac{1}{3} \frac{H}{r_0} (\cot \beta' + \cot \beta) \right]$$

外功率总和为

$$W = W_{\gamma-3D} + W_{\gamma-insert} \tag{14}$$

2.2 内能耗散率

破坏模型的内能耗散率也由 $\theta_0 - \theta_B$ 、 $\theta_B - \theta_C$ 、 $\theta_C - \theta_h$ 三部分组成,可以计算得到不含插入块体的三维边坡牛角转动破坏模型的内能耗散率为

$$D_{V-3D} = D_{AB} + D_{BC} + D_{CD} = \frac{c}{H} \omega r_0^4 g_3 \tag{15}$$

其中

$$g_3 = - \frac{2}{\tan \varphi} \frac{H}{r_0} \left[\sin^2(\theta_0 + \alpha) \int_{\theta_0}^{\theta_B} \frac{\cos(\theta + \alpha)}{\sin^3(\theta + \alpha)} \sqrt{f_2^2 - f_3^2} d\theta + \right.$$
$$e^{2(\theta_h - \theta_0) \tan \varphi} \frac{\sin^2 \theta_h \sin^2(\theta_C + \beta)}{\sin^2 \theta_C} \int_{\theta_B}^{\theta_C} \frac{\cos(\theta + \beta)}{\sin^3(\theta + \beta)} \sqrt{f_2^2 - f_4^2} d\theta +$$
$$\left. e^{2(\theta_h - \theta_0) \tan \varphi} \sin^2 \theta_h \int_{\theta_C}^{\theta_h} \frac{\cos \theta}{\sin^3 \theta} \sqrt{f_2^2 - f_5^2} d\theta \right]$$

平面插入段的内能耗散率也可以分为三部分,平面插入段的内能耗散率为

$$D_{V-insert} = D_{AB-insert} + D_{BC-insert} + D_{CD-insert} = \frac{c}{H} \omega r_0^4 g_4 \tag{16}$$

其中

$$g_4 = -\frac{1}{2 \tan \varphi} \frac{b}{H} \left(\frac{H}{r_0} \right)^2 \left\{ \sin^2(\theta_0 + \alpha) [\csc^2(\theta_0 + \alpha) - \csc^2(\theta_B + \alpha)] + \right. \\ \left. e^{2(\theta_h - \theta_0) \tan \varphi} \frac{\sin^2 \theta_h \sin^2(\theta_C + \beta)}{\sin^2 \theta_C} [\csc^2(\theta_B + \beta) - \csc^2(\theta_C + \beta)] + \right. \\ \left. e^{2(\theta_h - \theta_0) \tan \varphi} \sin^2 \theta_h [\csc^2 \theta_C - \csc^2 \theta_h] \right\}$$

因此,破坏模型总的内能耗散率为

$$D_V = D_{V-3D} + D_{V-insert} \tag{17}$$

2.3 边坡三维安全系数求解

根据虚功率原理,令整个三维牛角转动破坏模型外功率与内能耗散率相等,有:

$$W_{\gamma-3D} + W_{\gamma-insert} = D_{V-3D} + D_{V-insert} \tag{18}$$

将式(14)(17)代入公式(18)并化简可得:

$$\gamma g_1 + \gamma g_2 = \frac{c}{H} g_3 + \frac{c}{H} g_4 \tag{19}$$

3 安全系数求解

3.1 GIM

根据 GIM 的定义, F_s 为增加后的外力与初始外力之比,即

$$F_s = k_{cr}/k = q_{cr}/q \tag{20}$$

式中: k 、 q 分别为土体初始重力和荷载; k_{cr} 、 q_{cr} 分别为增加后的重力和荷载。根据功率计算公式,功率与外力呈线性关系,因此, F_s 等于临界外力功率 W_{cr} 除以实际外力功率 W ,即:

$$W_{cr} = W F_s \tag{21}$$

基于极限分析上限理论,当内能耗散率等于增加外力所做功率时,三维边坡处于极限平衡状态,此时:

$$D = W_{cr} \tag{22}$$

联合式(21)(22)可得:

$$F_s = D/W \tag{23}$$

由式(23)可知, F_s 定义为内能耗散率与外力做功功率之比,即

$$F_s = \frac{c}{\gamma H} \frac{g_3 + g_4}{g_1 + g_2} \tag{24}$$

3.2 SRM

SRM 基本原理是将土体强度参数(c 、 φ)同时除以折减系数 F ,将该组新参数作为土体强度参数进行计算,直至边坡达到临界破坏状态,此时的 F 为边坡安全系数 F_s ,计算过程为

$$c_m = c/F \tag{25}$$

$$\tan \varphi_m = \tan \varphi / F \tag{26}$$

将式(25)(26)代入式(24)可知:

$$F = \frac{c}{\gamma H} \frac{g_3 + g_4}{g_1 + g_2} \tag{27}$$

式(27)是 F_s 的隐函数。

由上述推导过程可知,三维边坡牛角转动破坏模型功率计算积分复杂,使用 SRM 进行求解 F_s 时, F_s 是关于变量($\theta_0, \theta_h, \beta', r'_0/r_0, b/H$)的隐函数,需进行迭代求解,采用优化算法,计算时间较长。采用 GIM 计算 F_s 时, F_s 是关于变量($\theta_0, \theta_h, \beta', r'_0/r_0, b/H$)的显示表达式,定义简单明确,计算时间相对较短。为便于分析比较,本文基于 MATHEMATICA 平台,将 F_s 求解转化为非线性约束条件下的最小值优化问题。

3.3 最小安全系数

基于上述分析,将式(24)(27)转化为求解:

$$\min F_s = F_s(\theta_0, \theta_h, \beta', r_0'/r_0, b/H)$$

(28)

约束条件为

$$\begin{cases} 0 < (b + b')/H \leq B/H \\ 0 < r_0'/r_0 < 1 \\ 0 < \beta' \leq \beta \\ 0 < \theta_0 < \pi/2 \\ 0 < \theta_0 < \theta_B < \theta_C < \theta_h < \pi \end{cases}$$

(29)

式中: b' 为三维边坡牛角转动破坏模型的牛角部分最大宽度; B 为边坡总宽度。

3.4 对比验证

自然状态下的边坡验证,是对一般黏性土三维边坡进行临界高度及安全系数验证。众所周知,当具有临界高度的三维边坡处于极限状态时,其安全系数等于 1.0。Taylor^[15]最早定义无量纲参数 $\gamma H/c$ 为边坡稳定性系数 N_s ,现有相关研究沿用该定义方式^[2], N_s 能反映边坡的安全状态。基于文献[2,8-9]中 $\gamma H/c$ 值,分别采用 SRM 和 GIM 计算 F_s ,以验证本文方法及程序的正确性,验证结果如表 1 所示。

表 1 本文研究与现有研究结果对比

Table 1 Comparisons of present solutions and results from relevant literatures

案例	$\varphi/(^\circ)$	B/H	$\gamma H/c$				F_s (SRM 求解)				F_s (GIM 求解)			
			Michalow ski ^[2]	Gao 等 ^[8]	Wang 等 ^[9]	本文	Michalow ski ^[2]	Gao 等 ^[8]	Wang 等 ^[9]	本文	Michalow ski ^[2]	Gao 等 ^[8]	Wang 等 ^[9]	本文
1	15	1.5	7.124	6.783	6.780	6.774	0.961	0.999	0.999	1.000	0.951	0.999	0.999	1.000
2	15	5.0	5.504	5.456	5.457	5.456	0.993	1.000	1.000	1.000	0.991	1.000	1.000	1.000
3	15	10.0	5.231	5.229	5.229	5.228	0.999	1.000	1.000	1.000	0.999	1.000	1.000	1.000
4	30	0.8	14.368	12.263	12.260	12.202	0.899	0.997	0.997	1.000	0.849	0.995	0.995	1.000
5	30	1.5	8.935	8.704	8.875	8.871	0.996	1.014	1.000	1.000	0.993	1.020	1.000	1.000
6	30	3.0	7.974	7.632	7.633	7.631	0.971	1.000	1.000	1.000	0.957	1.000	1.000	1.000
7	30	5.0	7.266	7.223	7.223	7.222	0.997	1.001	1.001	1.000	0.994	1.000	1.000	1.000

表 1 列出了 $\varphi = 15^\circ$ 和 $\varphi = 30^\circ$ 时不同宽高比 (B/H) 下稳定性系数 $\gamma H/c$ 值,文献[8]采用陈祖煜院士提出的随机搜索法,文献[2,9]采用循环搜索法分别优化计算 $\gamma H/c$ 值。本文采用 MATHEMATICA 软件,基于文献中 $\gamma H/c$ 值,在满足约束条件下分别采用 GIM 和 SRM 计算 F_s 值,采用穷举法,首先设置角度 θ_0 、 θ_h 步长为 5° , r_0'/r_0 、 b/H 步长为 0.1,计算 F_s 最小值,然后在 F_s 最小值区间范围内逐步缩小变量步长,最终按照 θ_0 、 θ_h 步长 0.01° , r_0'/r_0 、 b/H 步长 0.001 计算求解 F_s 最小值,所得结果即为最终结果。优化计算流程图如图 2 所示。与已有文献比较,除个别案例外,计算结果均小于已有文献计算结果,表明本文所采用方法和程序的正确性和合理性。

4 边坡三维效应及参数分析

4.1 边坡案例

为分析两种方法计算 F_s 结果的不同,以某一均质边坡进行参数分析,该边坡主要参数为: $\varphi = 15^\circ$, $\beta = 60^\circ$,在参数 $c/\gamma H = 0.116$ 以及 $B/H = 1.0$ 时,相关学者对其进行了研究。计算结果表明该边坡二维情形下 F_s 为 1.0,其中基于极限分析法的上限法和下限法计算结果分别为 1.02 和 0.98^[16],二维分析时各方法一致性较好;三维分析时,本文计算结果分别为 1.484 (GIM) 和 1.325 (SRM),而卢坤林^[16]、Hungr 等^[17]、Leshchinski 等^[18]、Hovlan^[19] 计算结果分别为 1.26、1.23、1.25 和 1.189,Huang 等^[20] 等基于简化和严格的三维极限平衡法计算结果分别为 1.204 和 1.243,Li^[21] 等基于上限法和下限法计算结果分别为 1.44 和 1.27。

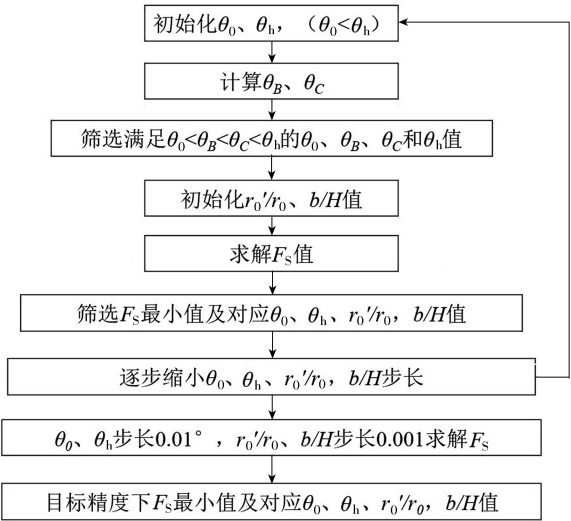


图 2 边坡安全系数优化求解流程

Fig.2 Optimization solving process of slope safety factor

对比已有研究,本文采用 GIM 和 SRM 两种方法求解 F_s 结果与上限法计算结果接近,而相比其他学者计算结果均偏大。与上限法计算结果接近原因为研究理论相同,都基于极限分析法上限理论。相比于其他文献,本文计算结果偏大的原因是三维牛角转动破坏模型计算边坡安全系数时,假定边坡滑体形态为两端牛角状三维锥体+中间平面插入段,与文献[16]中圆柱+锥体形态滑体类似,计算规律与文献[16]规律一致。对于二维均质边坡,Leshchinsky 等^[18]采用变分法严格证明了对数螺旋线(牛角转动破坏模型上下边界线)破坏模型是边坡极限平衡闭合解对应的最危险破坏机制,且与极限分析法上限解等效,但是拓展至三维空间,对数螺旋破坏模型是否为均质边坡最危险破坏机制还需进一步研究。但无论采用哪一种破坏模型,只要与边坡最危险破坏机制接近,该破坏模型下边坡相关参数就能定量反映边坡稳定性影响规律,即滑体形态不影响边坡参数对边坡稳定性的规律。

4.2 边坡三维效应分析

上述算例中,边坡二维和三维安全系数计算结果相差较大,且三维相比二维计算结果偏大。以上限法为例,三维比二维计算结果大 41.17%,表明边坡具有明显的空间效应。对具有明显空间效应的边坡进行稳定性分析时,二维计算结果偏保守,按二维计算结果对边坡进行治理加固,其设计相对更安全,但一定程度上会带来较大的经济和工程浪费,反之,反演边坡安全强度参数时会过高估计,使边坡安全稳定性评估和设计偏于不安全而产生隐患,因此边坡稳定性分析时需考虑边坡空间效应(宽高比 B/H)的影响。为了研究不同 B/H 值时边坡的三维稳定性,分别选取边坡不同 B/H 值,并采用 GIM 和 SRM 求解边 F_s ,如图 3 所示。

由图 3 可知, B/H 对 F_s 影响显著,具体表现为: $B/H<3$ 时,边坡三维效应显著,随着 B/H 增加, F_s 急剧降低; $B/H>3$ 时, F_s 随 B/H 增加而降低,但降低趋势较缓,最终趋于 1.0。从采用的计算方法分析,SRM 所计算 F_s 值小于 GIM。随着 B/H 减小,GIM 所计算 F_s 值远远大于 SRM,而随着 B/H 增加直至趋于二维分析时,两种方法所计算 F_s 值逐渐接近直至趋近 1.0 时相等。从 F_s 具体数值分析,当 $B/H=5$ 时,GIM 和 SRM 计算结果分别为 1.073 和 1.048,相比二维平面计算结果分别大 7.3% 和 4.8%,三维计算结果与二维计算结果相差分别在 10% 和 5% 以内,可知 $B/H=5$ 时边坡稳定性分析三维结果和二维结果相差较少,尤其采用 SRM 分析时。此外,绝大多数边坡失稳案例其宽高比 $B/H<5$ ^[16],基于此,以前述边坡案例 $B/H=5$ 为例,分别采用 GIM 和 SRM,研究不同参数 $c/\gamma H$ 、 φ 、 α 和 β 下 F_s 变化规律。

4.3 参数分析与讨论

图 4 反映了不同参数 $c/\gamma H$ 、 φ 、 α 及 β 下采用 GIM 和 SRM 对 F_s 的影响规律。由图 4 可知,随着 $c/\gamma H$ 和 φ 增大, F_s 提高,而随着 α 和 β 增大, F_s 降低。计算结果表明,当 $F_s=1$ 时,两种方法计算结果接近且近似都等于 1; $F_s>1$ 时,GIM 计算结果大于 SRM,且 F_s 越高,GIM 计算结果相对越大; $F_s<1$ 时,SRM 计算结果大于 GIM,且 F_s 越小,SRM 计算结果相对越大。此外, $F_s>1$ 表示边坡稳定, $F_s=1$ 表示边坡处于极限平衡状态, $F_s<1$ 表示边坡不稳定,与一般规律一致。

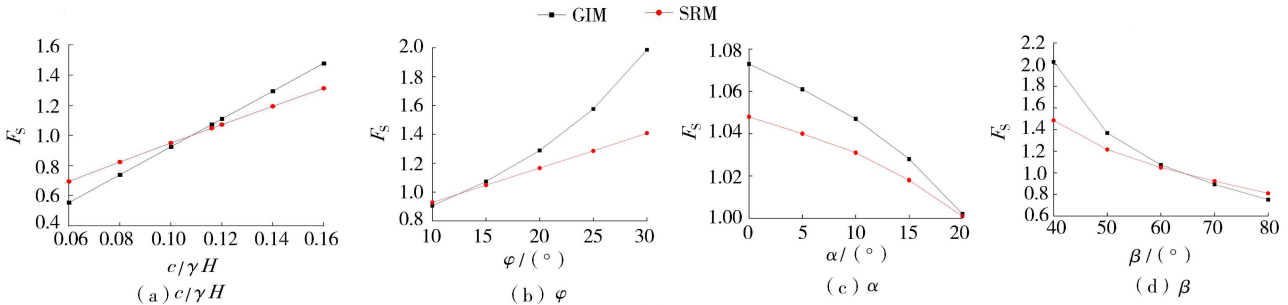


图 4 不同边坡参数下边坡安全系数

Fig. 4 Safety factors of slope under different slope parameters

具体而言, $c/\gamma H$ 与 F_s 呈线性关系,即随着 $c/\gamma H$ 增大, F_s 线性提高。 φ 增大, F_s 增加,符合一般规律。

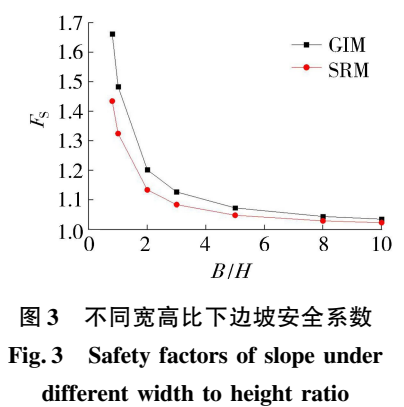


图 3 不同宽高比下边坡安全系数

Fig. 3 Safety factors of slope under different width to height ratio

当 $F_s > 1$ 时,随着 φ 增大,GIM 相比 SRM 计算结果呈显著增加,这与两种方法计算 F_s 的原理一致。 α 增大时, F_s 减小,当 α 逐渐增加至等于边坡倾角时,边坡可视为二级边坡,符合随边坡倾角增加边坡安全系数降低的一般规律。 β 越大, F_s 越小,且随 β 增大呈显著降低趋势。

基于极限分析法分析边坡安全稳定性时,GIM 和 SRM 计算 F_s 存在差异,与两种方法的计算原理不同有关。使用 GIM 时,增加岩土材料容重在增加下滑力的同时,也增加了抗滑力,从而使得 F_s 计算值偏大,对于强度参数较大的边坡尤甚,图 4(b)GIM 计算所得 F_s 曲线呈抛物线形,明显反映了这一规律。使用 SRM 时,同时对边坡岩土黏聚力和内摩擦角进行折减,再代入岩土模型进行计算,计算所得 F_s 相对较小,计算结果相对保守,但结果乐于被工程技术人员接受。

F_s 计算结果对工程设计影响较大,GB 50330—2013《建筑边坡工程技术规范》规定,对于一般工况下的永久边坡,等级为一级、二级和三级时对应安全系数分别为 1.35、1.30 和 1.25,即相应等级和工况边坡的安全系数应不小于规范规定值,不满足时应对边坡进行处理。以此规范为例,采用 GIM 和 SRM 取 $F_s < 1.35$ 进行分析,两种方法计算结果对比如图 5 所示。

由图 5 可知,GIM 和 SRM 计算结果误差最大为 10.46%,最小为 0.09%,除最大误差外其余均在 10% 以内。 $F_s < 1.2$ 时,两种方法计算结果误差均在 5% 以内,整体呈现边坡越稳定(F_s 越大),计算误差越大;边坡越趋于极限状态($F_s = 1$),误差越小甚至计算结果相等。对于按规范需加固边坡,采用 SRM 计算 F_s 结果偏保守,而 GIM 计算结果相对偏大,但误差均在 5% 以内,且边坡越趋于极限状态,两种方法计算 F_s 结果误差越小甚至相等。对于稳定性好以及非常稳定的边坡计算 F_s 时,除了考虑边坡荷载、几何形态以及岩土体参数等因素外,还需关注计算方法对边坡稳定性的影响。

5 结 论

- a. 基于极限分析理论所推导含坡顶倾角的边坡安全系数 F_s 计算表达式,利用 MATHEMATICA 软件编写的优化计算程序计算边坡的安全系数,对比已有研究结果表明,本文推导公式及编写程序是正确有效的,且求解相对更优。
- b. 宽高比 B/H 越小,边坡三维效应越显著,反之, B/H 越大,边坡二维特性越明显。 $B/H > 5$ 时,相比二维计算结果,GIM 和 SRM 计算 F_s 三维结果误差分别在 10% 和 5% 以内; $B/H < 5$ 尤其当 $B/H < 3$ 时,边坡三维效应不容忽视,采用三维模型及参数计算更符合边坡工程实际情况。
- c. 安全系数 F_s 随参数 $c/\gamma H$ 和内摩擦角 φ 的增大而提高,随坡顶倾角 α 和边坡倾角 β 的增大而降低。当 $F_s = 1$ 时,GIM 和 SRM 计算结果接近且近似都等于 1; $F_s > 1$ 时,GIM 计算结果大于 SRM,且 F_s 越大,GIM 计算结果相对越大; $F_s < 1$ 时,SRM 计算结果大于 GIM,且 F_s 越小,SRM 计算结果相对越大。对于 F_s 在 1.2 以下的稳定边坡,GIM 和 SRM 计算结果误差在 5% 以内,边坡越接近极限稳定状态,两种方法计算结果误差越小。

参考文献:

[1] 高玉峰,王迪,张飞. 三维土质边坡稳定性分析方法研究现状与展望[J]. 河海大学学报(自然科学版),2015,43(5):456-464. (GAO Yufeng,WANG Di,ZHANG Fei. Current research and prospects of 3D earth slope stability analysis methods[J]. Journal of Hohai University(Natural Sciences),2015,43(5):456-464. (in Chinese))

[2] MICHALOWSKI R L,DRESCHER A. Three-dimensional stability of slopes and excavations[J]. Géotechnique,2009,59(10):839-850.

[3] YANG X L,LI Z W. Comparison of factors of safety using a 3D failure mechanism with kinematic approach[J]. International Journal of Geomechanics,2018,18(9):04018107.

[4] ZHENG H,THAM L G,LIU D F. On two definitions of the factor of safety commonly used in the finite element slope stability analysis[J]. Computers and Geotechnics,2006,33(3):188-195.

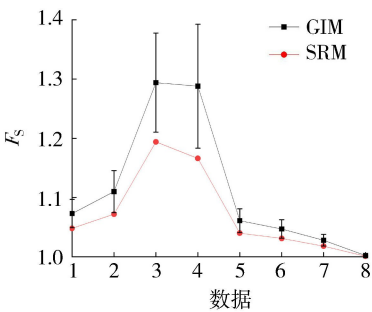


图 5 SRM 与 GIM 边坡安全系数计算结果对比

Fig.5 Result comparison of slope safety factor using SRM and GIM

- [5] 宋二祥,孔郁斐,杨军. 土工结构安全系数定义及相应计算方法讨论[J]. 工程力学,2016,33(11):1-10. (SONG Erxiang, KONG Yufei, YANG Jun. Discussion of safety factor definitions and computation methods for geotechnical structures[J]. Engineering Mechanics,2016,33(11):1-10. (in Chinese))
- [6] 吴梦喜,杨家修,湛正刚. 边坡稳定分析的虚功率法[J]. 力学学报,2020,52(3):663-672. (WU Mengxi, YANG Jiaxiu, ZHAN Zhenggang. A virtual power slope stability analysis method[J]. Chinese Journal of Theoretical and Applied Mechanics, 2020,52(3):663-672. (in Chinese))
- [7] 胡长明,袁一力,王雪艳,等. 改进的容重增加法原理及离心模型试验数值模拟[J]. 计算力学学报,2019,36(6):768-776. (HU Changming, YUAN Yili, WANG Xueyan, et al. Research on the principle of the modified gravity increase method and its application on the numerical simulation of centrifugal model test[J]. Chinese Journal of Computational Mechanics,2019,36(6):768-776. (in Chinese))
- [8] GAO Y F, ZHANG F, LEI G H, et al. An extended limit analysis of three-dimensional slope stability[J]. Géotechnique,2013,63(6):518-524.
- [9] WANG L, SUN D, LI L. Three-dimensional stability of compound slope using limit analysis method[J]. Canadian Geotechnical Journal,2019,56:116-125.
- [10] 夏元友,陈春舒. 考虑土体多参数非均质性及各向异性锚固边坡抗震稳定性极限分析[J]. 岩石力学与工程学报,2018,37(4):829-837. (XIA Yuanyou, CHEN Chunshu. Seismic stability limit analysis of reinforced soil slopes with prestressed cables considering inhomogeneity and anisotropy of multiple parameters[J]. Chinese Journal of Rock Mechanics and Engineering, 2018,37(4):829-837. (in Chinese))
- [11] 饶平平,吴健,崔纪飞,等. 裂缝边坡三维极限上限拓展分析[J]. 岩土工程学报,2021,43(9):1612-1620. (RAO Pingping, WU Jian, CUI Jifei, et al. Extended three-dimensional analysis of cracked slopes using upper-bound limit analysis method[J]. Chinese Journal of Geotechnical Engineering,2021,43(9):1612-1620. (in Chinese))
- [12] 侯超群,邓欣,孙志彬等. 非线性准则下三维加筋边坡稳定性的上限分析[J]. 中国公路学报,2018,31(2):124-132. (HOU Chaoqun, DENG Xin, SUN Zhibin, et al. upper bound analysis of stability of three-dimensional reinforced slopes based on nonlinear failure criterion[J]. China Journal of Highway and Transport,2018,31(2):124-132. (in Chinese))
- [13] WANG L, SUN D, LI L. 3D stability of partially saturated soil slopes after rapid drawdown by a new layer-wise summation method[J]. Landslides,2019,16:295-313.
- [14] SAADA Z, MAGHOUS S, GARNIER D. Stability analysis of rock slopes subjected to seepage forces using the modified Hoek-Brown criterion[J]. International Journal of Rock Mechanics and Mining Sciences,2012,55:45-54.
- [15] TAYLOR D W. Stability of earth slopes[J]. Boston Society of Civil Engineers,1937,24(3):199-223.
- [16] 卢坤林. 基于极限平衡理论的土质边坡空间效应研究与应用[D]. 合肥:合肥工业大学,2013.
- [17] HUNGR O, SALGADO F M, BYRNE P M. Evaluation of a three-dimensional method of slope stability analysis[J]. Canadian Geotechnical Journal,1989,26(4):679-686.
- [18] LESHCHINSKY D, BAKER R, SILVER M L. Three-dimensional analysis of slope stability [J]. International Journal for Numerical and Analytical Methods in Geomechanics,1985,9(3):199-223.
- [19] HOVLAND H J. Three-dimensional slope stability analysis method[J]. Journal of the Geotechnical Engineering Division,1977,103(9):971-986.
- [20] HUANG C C, TSAI C C, CHEN Y H. Generalized method for three-dimensional slope stability analysis [J]. Journal of Geotechnical and Geoenvironmental Engineering,2002,128(10):836-848.
- [21] LI A J, MERIFIELD R S, LYAMIN A V. Three-dimensional stability charts for slopes based on limit analysis methods[J]. Canadian Geotechnical Journal,2010,47(12):1316-1334.

(收稿日期:2021-08-30 编辑:胡新宇)