

DOI:10.3876/j.issn.1000-1980.2024.04.007

三维弹塑性问题的比例边界有限元法

李 云, 杜成斌, 江守燕

(河海大学力学与工程科学学院, 江苏 南京 210098)

摘要: 为了研究三维复杂结构的非线性硬化问题, 在考虑关联流动准则的 Von Mises 塑性屈服准则和各向同性/随动硬化准则的本构模型中, 引入一致切线模量, 并基于比例边界有限元方法和平衡八叉树算法对本构模型进行求解。采用 Newton-Raphson 迭代法求解位移和应力的非线性方程, 为了减少计算量, 仅在比例中心点执行并储存迭代过程的变量, 同时采用 Fortran 语言编制了求解程序。两个算例计算结果表明, 该模型的计算结果具有较高的准确性。

关键词: 三维比例边界有限元法; 八叉树网格; 弹塑性; 屈服准则; 硬化问题

中图分类号: O346

文献标志码: A

文章编号: 1000-1980(2024)04-0047-09

Scaled boundary finite element method for three-dimensional elastoplastic problems

LI Yun, DU Chengbin, JIANG Shouyan

(College of Mechanics and Engineering Science, Hohai University, Nanjing 210098, China)

Abstract: In order to study the nonlinear hardening problem of three-dimensional complex structural materials, the consistent tangent modulus was introduced into the constitutive model considering the Von Mises plastic yield criterion and isotropic/kinematic hardening model, and the constitutive model was solved based on the scaled boundary finite element method (SBFEM) and balanced octree algorithm. The Newton Raphson iteration method was used to solve the elastic-plastic increment of displacement and stress. In order to reduce the computational complexity, the variables of the iteration process were only executed and stored at the proportional center point of the subdomain. At the same time, a solution program was developed using Fortran language. Two application examples show that the calculation results of the model have high accuracy.

Key words: 3D SBFEM; octree grid; elastoplasticity; yield criterion; hardening problem

在工程结构的数值模拟中, 非线性问题是重要而富有挑战性的问题^[1-2]。弹塑性理论结合数值算法获得的结构在各种外因(荷载、温度变化或边界约束变动等)作用下产生的应力、变形及承载能力等, 是判断结构是否满足安全性的重要依据^[3-5]。因此, 研究工程结构弹塑性响应的数值计算十分重要^[6-7]。

许多学者致力于结构的弹塑性数值模拟研究^[8-10]; 方刚等^[11]采用有限元法(finite element method, FEM)对钢槽进行了弹塑性分析, 模拟了冲压过程的应力、应变等; Nguyen-Thoi 等^[12]扩展了基于节点的平滑有限元法(node-based smoothed finite element method, NS-FEM), 分别使用三角形和四面体网格对 2D 和 3D 结构进行了复杂的黏弹塑性分析; 楼志文等^[13]基于应变理论提出了弹塑性边界元法的拟线性解, 解决了应变硬化和理想塑性等弹塑性问题; Chang 等^[14]基于 ABAQUS 平台编写了扩展有限元法(extended finite element method, XFEM)的用户自定义单元, 采用弹塑性 XFEM 分析了网格尺寸和计算方法对 J 积分精度的影响, 模拟了具有单边裂纹铸铁试样的拉伸试验。

相比于 FEM 与 BEM(boundary element method, BEM), SBFEM(scaled boundary finite element method, SBFEM)融合了两种方法的优势, 形成了固有的特点^[15-16]。三维 SBFEM 只在边界表面上进行离散化, 子域的形状可以是任意多面体, 通过与八叉树算法^[17-18]相结合, 生成具有高度灵活性的三维网格。为了拓展

基金项目: 国家重点研发计划项目(2018YFE0122400); 国家自然科学基金项目(51579084)

作者简介: 李云(1992—), 男, 博士研究生, 主要从事计算力学与虚拟仿真研究。E-mail: 190208040007@hhu.edu.cn

通信作者: 杜成斌(1965—), 男, 教授, 博士, 主要从事水工结构工程中的力学问题研究。E-mail: cbdu@hhu.edu.cn

引用本文: 李云, 杜成斌, 江守燕. 三维弹塑性问题的比例边界有限元法[J]. 河海大学学报(自然科学版), 2024, 52(4): 47-55.

LI Yun, DU Chengbin, JIANG Shouyan. Scaled boundary finite element method for three-dimensional elastoplastic problems[J]. Journal of Hohai University(Natural Sciences), 2024, 52(4): 47-55.

SBFEM 处理材料非线性问题^[19-20]的能力,在二维 SBFEM 的弹塑性问题上,Ooi 等^[21]通过多边形 SBFEM 将结构灵活分解为任意多边形网格来模拟结构中的弹塑性响应,对二维裂缝扩展弹塑性问题的模拟比 FEM 更准确,计算效率更高;Behnke 等^[22]使用 SBFEM 推导了有界域的 SBFE 形状函数,并将其纳入有限元 (finite element, FE) 框架,通过应用子结构技术将 SBFEM 与 FEM 的优点相结合,用 FE 的概念计算几何和物理非线性问题,无需求解非线性微分方程;Lin 等^[23]通过结合 SBFEM 与同伦分析方法 (homotopy analysis method, HAM),将非线性问题转化为无限数量的线性泊松型子问题,为求解二维非线性泊松型问题提供了新方法。相对来讲,三维 SBFEM 的弹塑性问题研究较为缓慢,主要原因之一为三维复杂结构的离散难以实现。近年来随着平衡八叉树自动网格划分技术的成熟,Liu 等^[24]将 SBFEM 二维弹塑性分析方法扩展至三维,基于立体三维打印文件格式的三维 SBFEM,采用返回映射算法,在弹塑性刚度矩阵中引入了稳定矩阵消除杂散模态,有效模拟了三维复杂结构的静、动力弹塑性响应,但是没有采用一致切向刚度法,仅考虑了线性硬化效应,未计及非线性硬化效应。

本文在基于相关联等向/随动硬化 Von Mises 本构模型中引入一致切线模量,结合三维 SBFEM 理论,采用平衡八叉树算法构建具有离散简单、网格过渡快、单元模式少等优势 SBFE 网格模型,采用 Newton-Raphson 迭代法求解位移和应力的非线性方程,为了减少计算量,仅在比例中心点执行并储存迭代过程的变量,使用 Fortran 语言编制了求解程序,同时利用 2 个算例对本文模型进行验证。

1 弹塑性问题的 SBFEM

对于任意形状的空间计算域,SBFEM 将其划分成多个子域,子域可以是任意多面体,从而大大增加了网格划分的适应性和灵活性。在子域内引入比例中心 (O'),且满足子域边界均对比例中心可见。以比例中心为原点建立由径向坐标 ξ 和环向坐标 η, ζ 组成的比例边界坐标系,如图 1 所示。在 SBFEM 中,位移场在径向关于 ξ 解析,在环向则由节点位移插值近似获得,收敛于 FEM 近似解,因此 SBFEM 的位移解具有半解析的特点^[25-26]。

1.1 比例边界坐标变换

三维 SBFEM 以子域比例中心为原点建立比例边界局部坐标,子域内任意一点在笛卡尔坐标系下的坐标 (x, y, z) 可由比例边界局部坐标 (ξ, η, ζ) 表示为^[27]

$$x(\xi, \eta, \zeta) = x_0 + \xi(x_b - x_0)$$
(1)

$$y(\xi, \eta, \zeta) = y_0 + \xi(y_b - y_0)$$
(2)

$$z(\xi, \eta, \zeta) = z_0 + \xi(z_b - z_0)$$
(3)

式中: (x_b, y_b, z_b) 为边界上任意一点的坐标; (x_0, y_0, z_0) 为比例中心的坐标。

通过雅克比矩阵 J 建立两个坐标系的关系:

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial \xi} \\ \frac{\partial}{\partial \eta} \\ \frac{\partial}{\partial \zeta} \end{bmatrix} = J \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x} \\ \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial z} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial x}{\partial \xi} & \frac{\partial y}{\partial \xi} & \frac{\partial z}{\partial \xi} \\ \frac{\partial x}{\partial \eta} & \frac{\partial y}{\partial \eta} & \frac{\partial z}{\partial \eta} \\ \frac{\partial x}{\partial \zeta} & \frac{\partial y}{\partial \zeta} & \frac{\partial z}{\partial \zeta} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x} \\ \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial z} \end{bmatrix}$$
(4)

1.2 三维 SBFE 公式

假定径向位移为 $u(\xi)$, 则该子域内任意一点的位移 $u(\xi, \eta, \zeta)$ 可通过插值函数 $N_1(\eta, \zeta)$ 表示为^[22-23]

$$u(\xi, \eta, \zeta) = N_1(\eta, \zeta) u(\xi)$$
(5)

将位移函数代入几何方程可以得到应变场的表达式为

$$\epsilon(\xi, \eta, \zeta) = L u(\xi, \eta, \zeta)$$
(6)

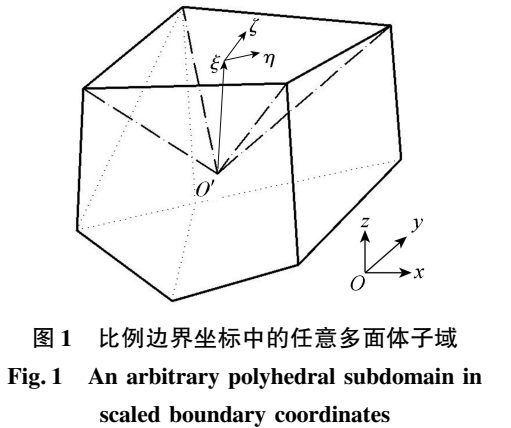


图 1 比例边界坐标中的任意多面体子域
Fig. 1 An arbitrary polyhedral subdomain in scaled boundary coordinates

其中

$$\mathbf{L} = \mathbf{b}_1 \frac{\partial}{\partial \xi} + \frac{1}{\xi} \left(\mathbf{b}_2 \frac{\partial}{\partial \eta} + \mathbf{b}_3 \frac{\partial}{\partial \zeta} \right)$$

式中: $\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \mathbf{b}_3$ 为中间转换矩阵; $\mathbf{L}$ 为线弹性情况下的微分算子。

将式(5)代入式(6), 应变-位移矩阵表示的应变场 $\boldsymbol{\varepsilon}(\xi, \eta, \zeta)$ 为

$$\boldsymbol{\varepsilon}(\xi, \eta, \zeta) = \mathbf{B}_1(\eta, \zeta) \mathbf{u}(\xi)_{,\xi} + \frac{1}{\xi} \mathbf{B}_2(\eta, \zeta) \mathbf{u}(\xi) \quad (7)$$

其中 $\mathbf{B}_1(\eta, \zeta) = \mathbf{b}_1(\eta, \zeta) \mathbf{N}_1(\eta, \zeta)$ $\mathbf{B}_2(\eta, \zeta) = \mathbf{b}_2(\eta, \zeta) \mathbf{N}_1(\eta, \zeta)_{,\eta} + \mathbf{b}_3(\eta, \zeta) \mathbf{N}_1(\eta, \zeta)_{,\zeta}$

若不考虑体力的作用, 引入系数矩阵, 弹性静力学问题的虚功方程^[25-26]可以简洁地表述为

$$\begin{aligned} & \delta \mathbf{u}^T(\xi) [\mathbf{E}_0 \mathbf{u}(\xi)_{,\xi} + \mathbf{E}_0^T \mathbf{u}(\xi) - \mathbf{P}] - \\ & \int_0^1 \delta \mathbf{u}^T(\xi) \left[\mathbf{E}_0 \xi \mathbf{u}(\xi)_{,\xi\xi} + (2\mathbf{E}_0 + \mathbf{E}_1^T - \mathbf{E}_1) \mathbf{u}(\xi)_{,\xi} + (\mathbf{E}_1 - \mathbf{E}_2) \frac{1}{\xi} \mathbf{u}(\xi) \right] d\xi = 0 \end{aligned} \quad (8)$$

式中: $\mathbf{u}(\xi)_{,\xi}, \mathbf{u}(\xi)_{,\xi\xi}$ 分别为 $\mathbf{u}(\xi)$ 对 ξ 的一阶和二阶偏导数; $\mathbf{E}_0, \mathbf{E}_1, \mathbf{E}_2$ 为系数矩阵; $\mathbf{P}$ 为荷载向量。

要使式(8)在任意 $\delta \mathbf{u}(\xi)$ 的情况下恒成立, 必须同时满足 2 个条件:

$$\mathbf{P} = \mathbf{E}_0 \mathbf{u}(\xi)_{,\xi} + \mathbf{E}_0^T \mathbf{u}(\xi) \quad (9)$$

$$\mathbf{E}_0 \xi^2 \mathbf{u}(\xi)_{,\xi\xi} + (2\mathbf{E}_0 + \mathbf{E}_1^T - \mathbf{E}_1) \xi \mathbf{u}(\xi)_{,\xi} + (\mathbf{E}_1 - \mathbf{E}_2) \mathbf{u}(\xi) = 0 \quad (10)$$

基于虚功原理推导的 SBFEM 位移控制方程(10)是一个关于 $\mathbf{u}(\xi)$ 的齐次二阶 Euler-Cauchy 微分方程组, 引入变量 $\mathbf{X}(\xi)$, 变换化简后得到变量 $\mathbf{X}(\xi)$ 的一阶常微分方程组:

$$\xi \mathbf{X}(\xi)_{,\xi} = -\mathbf{Z} \mathbf{X}(\xi) \quad (11)$$

式中系数矩阵 $\mathbf{Z}$ 为哈密顿矩阵。

对 $\mathbf{Z}$ 进行特征分解, 将特征向量矩阵 $\boldsymbol{\Psi}$ 和特征值矩阵 $\boldsymbol{\Lambda}$ 进行如下分块:

$$\mathbf{Z} \begin{bmatrix} \boldsymbol{\Psi}_{11} & \boldsymbol{\Psi}_{12} \\ \boldsymbol{\Psi}_{21} & \boldsymbol{\Psi}_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{\Psi}_{11} & \boldsymbol{\Psi}_{12} \\ \boldsymbol{\Psi}_{21} & \boldsymbol{\Psi}_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{S}_{11} & 0 \\ 0 & \mathbf{S}_{22} \end{bmatrix} \quad (12)$$

式中: $\mathbf{S}_{11}, \mathbf{S}_{22}$ 为特征值子矩阵, 分别表示有界域的解、无界域的解; $\boldsymbol{\Psi}_{11}, \boldsymbol{\Psi}_{21}$ 分别为特征值对应的位移模态和应力模态。

对于有界域, 子域的刚度矩阵为

$$\mathbf{K}_e = \boldsymbol{\Psi}_{21} \boldsymbol{\Psi}_{11}^{-1} \quad (13)$$

1.3 三维 SBFEM 应变场

从子域的整体位移中提取子域边界上的节点位移 $\mathbf{u}_b$, 可得到位移场 $\mathbf{u}(\xi, \eta, \zeta)$ ^[24-26]:

$$\mathbf{u}(\xi, \eta, \zeta) = \mathbf{N}_u(\eta, \zeta) \boldsymbol{\Psi}_{11} \xi^{-S_{11}-0.5I} \boldsymbol{\Psi}_{11}^{-1} \mathbf{u}_b \quad (14)$$

将位移场 $\mathbf{u}(\xi, \eta, \zeta)$ 中 $\mathbf{u}_b$ 的系数定义为 SBFEM 的形函数 $\boldsymbol{\Phi}(\xi, \eta, \zeta)$:

$$\boldsymbol{\Phi}(\xi, \eta, \zeta) = \mathbf{N}_u(\eta, \zeta) \boldsymbol{\Psi}_{11} \xi^{-S_{11}-0.5I} \boldsymbol{\Psi}_{11}^{-1} \quad (15)$$

引入应变模态 $\boldsymbol{\Psi}_e$, 子域的比例边界应变-位移矩阵 $\mathbf{B}$ 可表述为

$$\mathbf{B}(\xi, \eta, \zeta) = \boldsymbol{\Psi}_e(\eta, \zeta) \xi^{-S_{11}-0.5I} \boldsymbol{\Psi}_{11}^{-1} \quad (16)$$

子域的应变场表述为

$$\boldsymbol{\varepsilon}(\xi, \eta, \zeta) = \mathbf{B}(\xi, \eta, \zeta) \mathbf{u}_b \quad (17)$$

1.4 基于 SBFEM 的弹塑性分析

基于相关联等向/随动硬化 Von Mises 本构模型的一致切线模量 $\mathbf{D}_{ep}$ 可表示为^[28]

$$\mathbf{D}_{ep} = \mathbf{D} - \frac{4\mu^2 \mathbf{N} \otimes \mathbf{N}}{2\mu + H_\alpha + \sqrt{\frac{2}{3}} \frac{\partial H_\alpha}{\partial e_p} \gamma' + \sqrt{\frac{2}{3}} \frac{\partial \kappa}{\partial e_p}} - \frac{4\mu^2 \gamma'}{\|\text{tr} \boldsymbol{\delta}\|} (\mathbf{I}_{\text{dev}} - \mathbf{N} \otimes \mathbf{N}) \quad (18)$$

其中

$$\boldsymbol{I}_{\text{dev}} = \begin{bmatrix} \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} & -\frac{1}{3} & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{1}{3} & -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} \end{bmatrix}$$

式中: $\boldsymbol{D}$ 为弹性本构矩阵; μ 为剪切模量; $\boldsymbol{N}$ 为垂直于屈服面的单位偏张量; H_α 为硬化塑性模量的非线性形式; e_p 为有效塑性应变; γ' 为塑性一致性参数导数相对于应变增量的导数; κ 为由各向同性硬化模型确定的弹性域的半径; $\text{tr}\boldsymbol{\delta}$ 为偏应力与背影力的差值。

弹塑性 SBFEM 公式通过虚功原理推导^[27-28], 对于任意求解域, 其增量虚功方程为

$$\int_{\Omega} \delta \Delta \boldsymbol{\varepsilon}^T \Delta \boldsymbol{\sigma} d\Omega = \int_{\Gamma} \delta \boldsymbol{u}^T \boldsymbol{f}_t d\Gamma + \int_{\Omega} \delta \boldsymbol{u}^T \boldsymbol{f}_b d\Omega - \int_{\Omega} \delta \boldsymbol{\varepsilon}^T \boldsymbol{\sigma} d\Omega \tag{19}$$

式中: $\Delta \boldsymbol{\sigma}$ 为增量应力场; $\boldsymbol{f}_b$ 为体力; $\boldsymbol{f}_t$ 为面力; $\delta \boldsymbol{\varepsilon}$ 为虚应变场; $\delta \boldsymbol{u}$ 为虚位移场。考虑虚位移的任意性, 将虚位移、虚应变和增量应力代入增量虚功方程, 可得:

$$\left(\int_{\Omega} \boldsymbol{B}^T(\xi, \eta, \zeta) \boldsymbol{D}_{ep} \boldsymbol{B}(\xi, \eta, \zeta) d\Omega \right) \Delta \boldsymbol{u}_b^n = \int_{\Gamma} \boldsymbol{\Phi}^T(\xi, \eta, \zeta) \boldsymbol{f}_t|_{n+1} d\Gamma + \int_{\Omega} \boldsymbol{\Phi}^T(\xi, \eta, \zeta) \boldsymbol{f}_b|_{n+1} d\Omega - \int_{\Omega} \boldsymbol{B}^T(\xi, \eta, \zeta) \boldsymbol{\sigma}(\xi, \eta, \zeta)|_n d\Omega \tag{20}$$

式中 n 为荷载步计数。

式(20)等号左端的积分表示子域的弹塑性刚度矩阵 $\boldsymbol{K}_{ep}$, 等号右端前两项积分之和为外部荷载向量, 右端第三项为内部荷载向量。

组集求解域内所有子域的非线性方程式(20), 可得弹塑性 SBFEM 增量控制方程, 即:

$$\left(\sum_{i=1}^{n_{\text{pol}}} \boldsymbol{K}_{ep,i} \right) \Delta \boldsymbol{u}_b = \sum_{i=1}^{n_{\text{pol}}} \left(\boldsymbol{F}_{\text{ext},i} \Big|_{j+1} - \boldsymbol{F}_{\text{int},i} \Big|_j \right) \tag{21}$$

式中: $\Delta \boldsymbol{u}_b$ 为节点位移增量; $\boldsymbol{F}_{\text{ext},i}$ 为第 i 个子域的外荷载向量; $\boldsymbol{F}_{\text{int},i}$ 为第 i 个域的内力向量; j 为当前荷载步数; n_{pol} 为子域个数。

2 与 SBFEM 相结合的自动八叉树算法

SBFEM 与八叉树算法可以完美结合, 由于没有悬挂节点问题的困扰, 因此可以高度灵活地生成网格。与 FEM 相比, SBFEM 的边界离散比体积离散简单得多。八叉树算法是一种基于层次树的网格生成算法, 根据设定的最大和最小尺寸进行八分递归切割, 快速生成跨尺度正方体单元格, 如网格在不规则边界处存在锯齿状, 可采用多面体裁剪, 提高边界离散精度^[27]。具体步骤如下:

a. 按 2 : 1 原则进行八叉树算法的递归运算。假设问题域的立方体是父立方体, 确定模型最大尺寸, 根据需求设定递归精度。父立方体被拟合到一个 $2m \times 2m \times 2m$ 个子立方体包围框中, m 为整数。采用 2 : 1 的平衡分割原则将每个立方单元分割成 8 个大小相等的立方体单元, 递归地分割原立方体, 直到满足指定的离散精度停止, 子单元信息被有效地存储在树形数据结构。八叉树算法示意图如图 2 所示, 图 2(a) 为 $16 \times 16 \times 16$ 子立

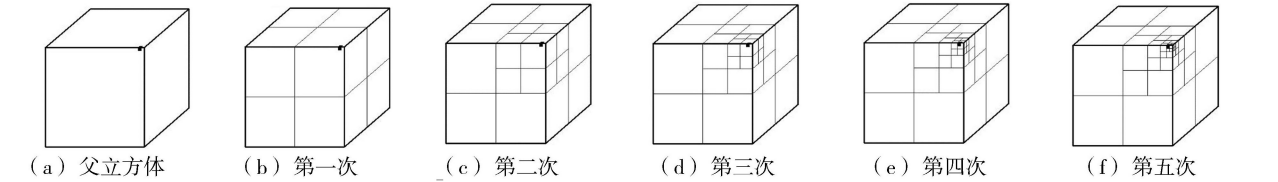


图 2 八叉树网格分解示意图
Fig.2 Octree grid segmentation

方体组成的父立方体,其中灰点为 1 子立方体;图 2(b) ~ (f) 分别为第一次至第五次分割。

b. 进行边界域内点、交点和外点判别,连接有关切割点。遵循判断点、分割线、切割面、切割体、生成单元的自下而上原则,鉴别边界域内点、边界交点、边界域外点,执行切割,连接切割点实现分割面。

c. 形成切割后的子立方体。对八叉树算法的子立方体执行分割面运算,可得到如图 3 的单元格。单元格的 8 个角节点由黑色圆圈(●)表示;当一条边连接两个尺寸较小的单元格时,该边引入一个边中点,边中点由空心圆圈(○)表示;当一个面连接 4 个较小尺寸的面单元格时,该面引入一个面中点,面中点由十字(+)表示。

d. 对八叉树算法的体单元进行边界(面)离散,形成边界积分单元。子体元的面划分为三角形和四边形单元(也可划为其他多边形),存在的角节点、边中点与面中点用黑色圆圈(●)表示,根据需要引入的面中点用黑色矩形(■)表示,离散成由三角形、1 : 2 矩形和正方形等如图 4 所示的 7 种类型面单元。

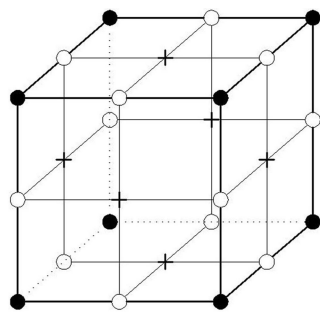


图 3 八叉树体单元
Fig. 3 Octree cube element

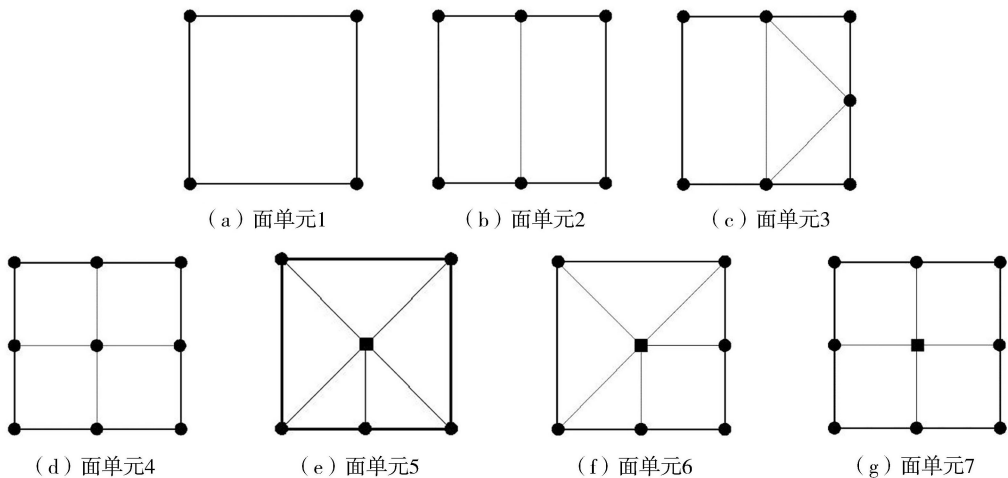


图 4 八叉树算法子域的面离散

Fig. 4 Face discretization of subdomain in octree algorithm

3 静力弹塑性问题的 SBFEM 分析流程

静力弹塑性问题的 SBFEM 分析采用 Fortran 语言编程实现,程序主要流程图如图 5 所示。

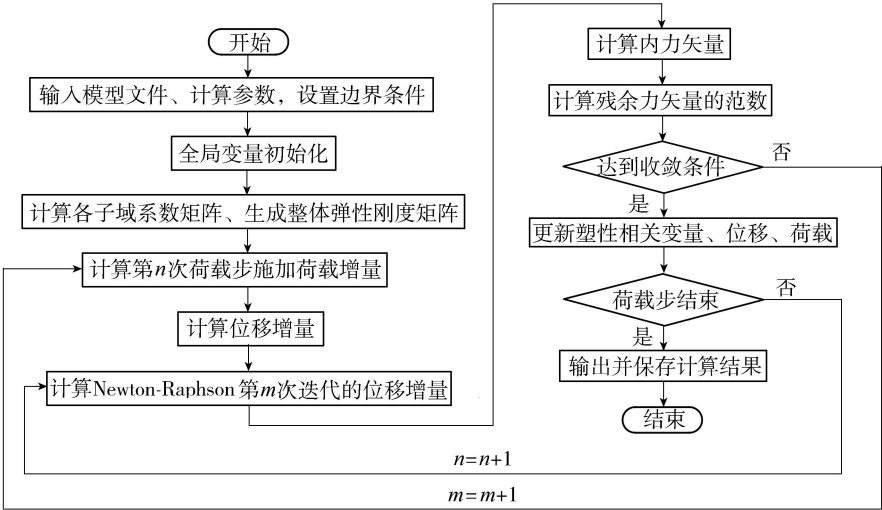


图 5 弹塑性问题的 SBFEM 程序流程示意图

Fig. 5 SBFEM flow chart of elastoplastic program

4 算例验证

算例 1 空心球体的内半径 $a=1\text{ m}$, 外半径 $b=2\text{ m}$, 且内部承受压力 $P=9.5\text{ MPa}$ 。假设球体服从 Von Mises 塑性屈服准则, 材料的弹性模量 $E=100\text{ GPa}$, 泊松比 $\nu=0.3$, 屈服应力 $\sigma_Y=10\text{ MPa}$ 。由于球体的对称性, 仅对该球体的八分之一建模且划分网格, 如图 6 所示。

受内部压力的空心球体存在球坐标系 (r, θ, φ) 的解析解^[24], 球体区域 $(a \leq r \leq b)$ 中的径向位移 u_r 、径向应力 σ_r 、环向应力 σ_θ 和 σ_φ 分别为

$$u_r = \begin{cases} \frac{2\sigma_y}{3E} \frac{c^3}{b^3} \left[(1-2\nu)r + (1+\nu) \frac{b^3}{2r^2} \right] & c < r \leq b \\ \frac{\sigma_y}{E} r \left[(1-\nu) \frac{c^3}{r^3} - \frac{2(1-2\nu)}{3} \left(1 + 3\ln \frac{c}{r} - \frac{c^3}{b^3} \right) \right] & a \leq r \leq c \end{cases} \quad (22)$$

$$\sigma_r = \begin{cases} -\frac{2}{3} \frac{c^3}{b^3} \left(\frac{b^3}{r^3} - 1 \right) \sigma_y & c < r \leq b \\ -\frac{2}{3} \left(1 + 3\ln \frac{c}{r} - \frac{c^3}{b^3} \right) \sigma_y & a \leq r \leq c \end{cases} \quad (23)$$

$$\sigma_\varphi = \sigma_\theta = \begin{cases} \frac{2}{3} \frac{c^3}{b^3} \left(\frac{b^3}{2r^3} + 1 \right) \sigma_y & c < r \leq b \\ \frac{2}{3} \left(\frac{1}{2} - 3\ln \frac{c}{r} + \frac{c^3}{b^3} \right) \sigma_y & a \leq r \leq c \end{cases} \quad (24)$$

式中 c 为球体弹塑性区域交界处的半径, 弹性区域为 $a \leq r \leq c$, 塑性区域为 $c < r \leq b$ 。

将空心球体沿径向、环向边均匀离散, 得到不同大小尺寸的网格单元。使用 SBFEM 对图 7 所示 4 种不同尺寸的网格模型进行弹塑性收敛性研究, 通过对比解析解, 得到不同网格模型的单元径向位移百分比误差(表 1)。由表 1 可知, 网格细化的程度越高, 网格质量相对越好, 收敛效果越好。由于网格 4 的误差最小, 选择网格 4 进行模型的径向位移、最大主应力等弹塑性分析。

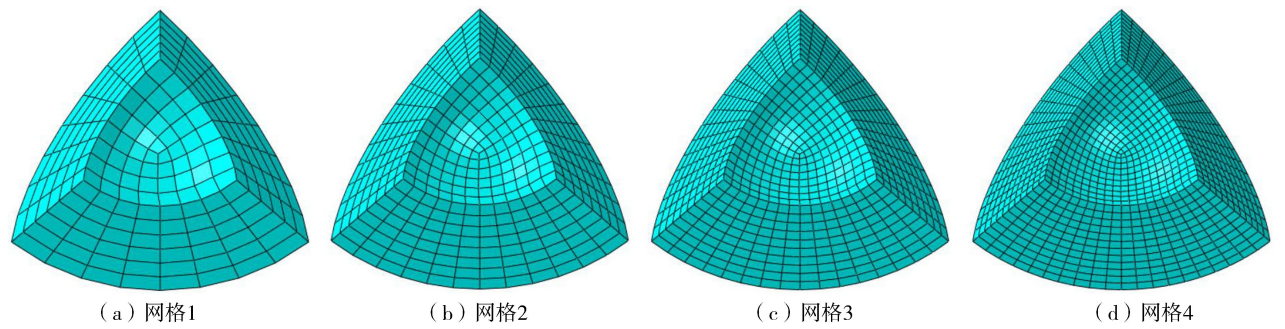


图 7 空心球体网格 1~4
Fig.7 Grid 1 to 4 of hollow sphere

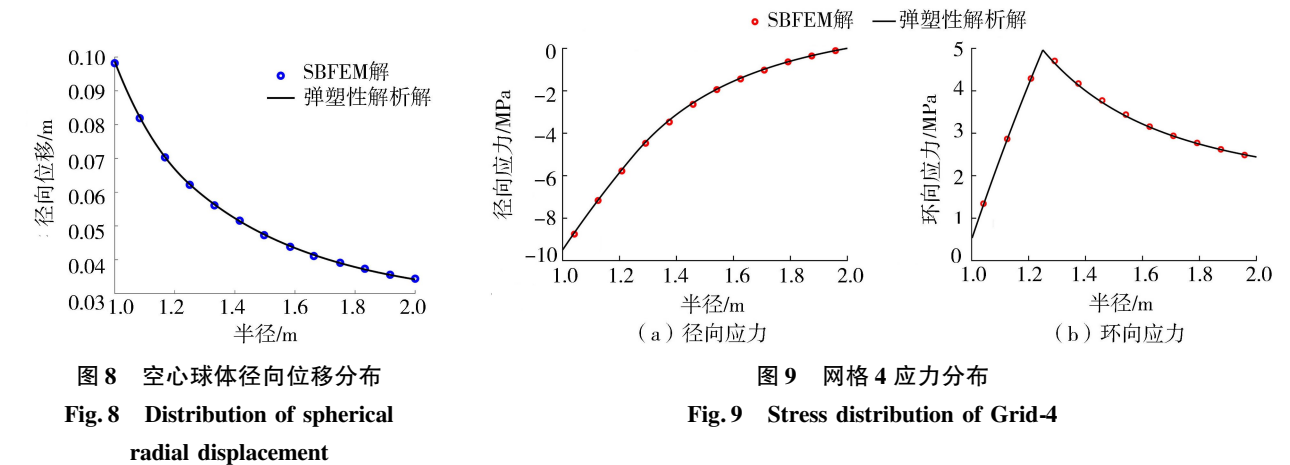
表 1 不同尺寸网格的收敛性

Table 1 Convergence of meshes

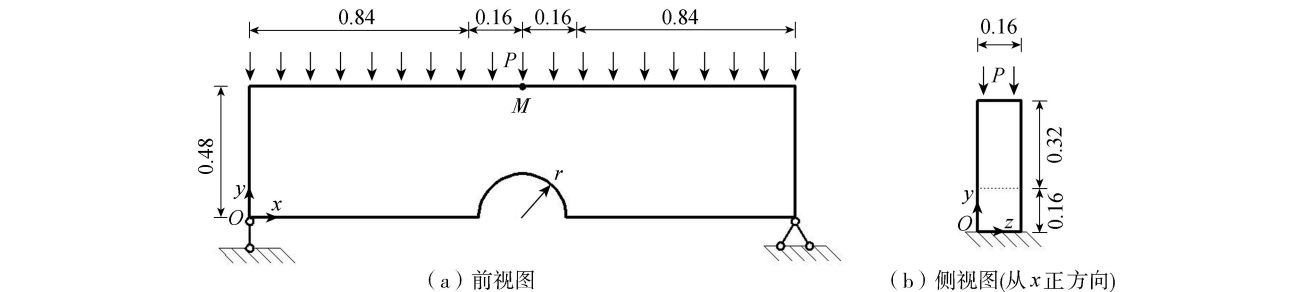
网格模型	径向单元数/个	环向单元数/个	子域总数/个	总自由度/个	位移百分比误差/%
网格 1	6	8	2 304	8 778	4.9
网格 2	8	12	6 912	24 678	2.8
网格 3	10	16	15 360	52 866	1.3
网格 4	12	20	28 800	96 798	0.6

由图 8 可知,随着空心球体内置压力的增大,径向位移增大,SBFEM 解与弹塑性解析解能够较好吻合。

在给定内置压力 P 下,图 9 给出了空心球体网格 4 的径向、环向应力分布曲线,可以发现,SBFEM 解与弹塑性解析解能够较好吻合,空心球体网格 4 的弹塑性区域交界大致处于距离内表面 $1/4$ 的位置。随着网格尺寸的细化,可以得到精确的弹塑性区域的交界半径。



算例 2 三维带半圆孔简支梁的几何尺寸为 $2.0\text{ m}\times0.48\text{ m}\times0.16\text{ m}$,且简支梁的中间位置带有一个半圆孔洞,孔洞半径为 0.32 m ,几何尺寸如图 10 所示。简支梁约束左端 ($x=0.0\text{ m}$) 竖向位移,约束右端 ($x=2.0\text{ m}$) 固定。沿简支梁顶面施加(竖直向下)的均布面力载荷 $P=12\text{ MPa}$ 。假设简支梁服从 Von Mises 塑性屈服准则,材料的弹性模量 $E=100\text{ GPa}$,泊松比 $\nu=0.333$,屈服应力 $\sigma_y=160\text{ MPa}$,不考虑屈服硬化,不计重力。



如图 11 所示,SBFEM 采用八叉树算法对简支梁模型建立 6 个三维网格模型,自动生成、处理从细化区域到非细化区域,修剪半圆孔洞的边界,在可能的屈服区和半圆孔周围的区域使用较小的八叉树网格单元离散,以更好地表示塑性变形和几何结构。SBFE 网格中使用了四边形单元和三角形单元,网络模型详细信息见表 2。

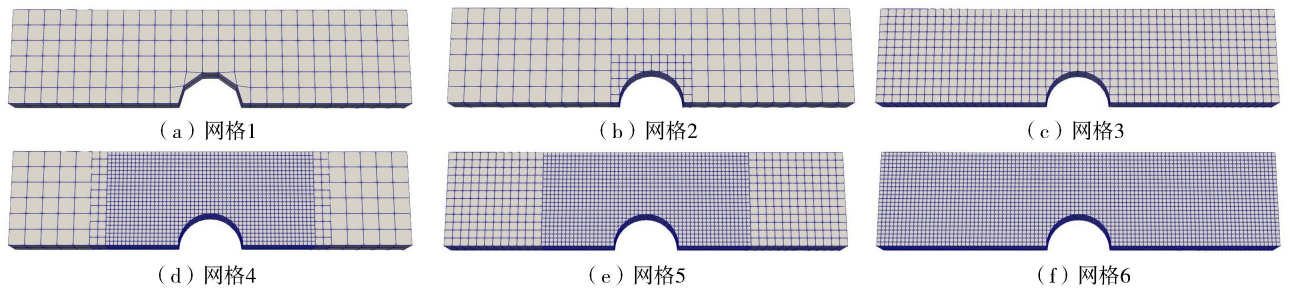


图 11 简支梁 SBFEM 网格

Fig. 11 SBFEM meshes for simply supported beam

对图 11 的模型进行弹塑性分析,设置 80 次荷载步控制荷载的加载。采用 Newton-Raphson 迭代法对每个荷载步进行迭代计算,提取每个荷载增量下节点 $M(x=1.00\text{ m},y=0.48\text{ m},z=0.0\text{ mm})$ 处的竖向位移、应力的输出变量,得到前 65 次荷载步、不同网格模型的荷载-位移曲线,如图 12 所示。由图 12 可知,起始荷载步加载

表 2 简支梁网格信息
Table 2 Mesh information of simply supported beams

网格模型	子域数/个	自由度数/个	边长/m
网格 1	292	1 638	0.08
网格 2	402	2 430	最大 0.08, 最小 0.04
网格 3	2 320	9 735	0.04
网格 4	9 576	35 781	最大 0.08, 中间过渡单元 0.04, 最小 0.02
网格 5	10 416	38 859	最大 0.04, 最小 0.02
网格 6	18 480	65 907	0.02

期间,材料是弹性的,应力-应变呈线性增长,应力小于屈服应力;后续荷载步加载期间,材料从弹性状态转变为塑性状态,应力-应变呈非线性增长;对于不同的网格模型,由于仅在比例中心单点采用返回映射算法确定 Newton-Raphson 迭代过程的有效塑性应变、背应力和塑性变量,当观测点附近的子域边长越小,模拟越精确,误差越小。

采用简支梁 SBFEM 网格 4 单元最大边长 0.08 m,最小边长 0.02 m,中间过渡单元边长 0.04 m,划分为 9 576 个子域和 35 781 个自由度;FE 网格采用较为均匀的六面体单元,有 18 656 个单元和 66 528 个自由度,前者的自由度数只有后者的 54%。荷载步加载第 65 步的竖向位移云图如图 13 所示,SBFEM 与 FEM 的非线性解几乎完全一致,验证了本文方法的准确性、可靠性。

5 结 语

本文提出了一种基于 SBFEM 的三维结构的弹塑性分析方法。八叉树网格划分算法大大简化了模型的前处理工作,充分发挥 SBFE 网格允许边界有悬挂节点的优势,可以快速精细的创建出高质量的三维 SBFEM 计算模型。弹塑性模型考虑了关联流动准则的 Von Mises 塑性屈服准则和组合线性各向同性/随动硬化准则。由 Fortran 95 编制三维弹塑性 SBFEM 程序实现了三维结构的弹塑性分析。2 个弹塑性分析算例计算结果表明,本文 SBFEM 计算结果收敛于解析解,并与有限元非线性解高度一致,验证了本文模型的准确性、可靠性。

致谢:本文研究得到了澳大利亚新南威尔士大学宋崇民教授的帮助,特此表示感谢。

参考文献:

[1] 陈张华,朱其志,吕超洋,等. 蟠龙抽水蓄能电站洞室围岩三轴试验及本构模型[J]. 河海大学学报(自然科学版),2022,50(5):105-110. (CHEN Zhanghua, ZHU Qizhi, LYU Chaoyang, et al. Triaxial compression test and constitutive model of surrounding rock of tunnels in Panlong Pumped-Storage Power Station[J]. Journal of Hohai University(Natural Sciences),2022,50(5):105-110. (in Chinese))

[2] 李宇,王佳豪,范陆,等. 长周期地震动的非弹性反应谱[J]. 河海大学学报(自然科学版),2023,51(2):138-149. (LI Yu, WANG Jiahao, FAN Lu, et al. Inelastic response spectra of long-period ground motions[J]. Journal of Hohai University(Natural Sciences),2023,51(2):138-149. (in Chinese))

[3] 钱向东,钮如嵩. 求解拱坝极限荷载的增量弹性有限元迭代法[J]. 河海大学学报(自然科学版),2016,44(3):203-208. (QIAN Xiangdong, NIU Rusong. Incremental elastic finite element iterative method for solution of ultimate load of arch dams[J]. Journal of Hohai University(Natural Sciences),2016,44(3):203-208. (in Chinese))

[4] LI Jiaoyan, THIESEN J, ROBERT K P, et al. Finite element analysis of fracture mechanics in micromorphic theory[J]. Journal of Micromechanics and Molecular Physics,2022,7(2):143-156.

[5] 程井,韦锦鹏,李宗樾,等. 基于 Neumann 展开随机有限元的混凝土重力坝结构可靠度分析[J]. 水利水电科技进展,

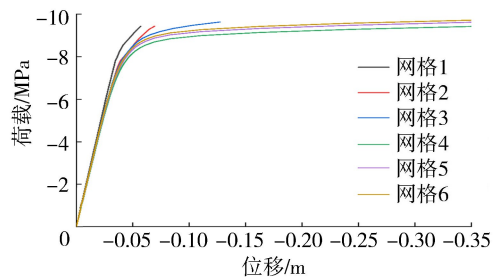


图 12 简支梁节点 M 荷载-位移曲线
Fig. 12 Load-displacement curve at the node M of simply support beam

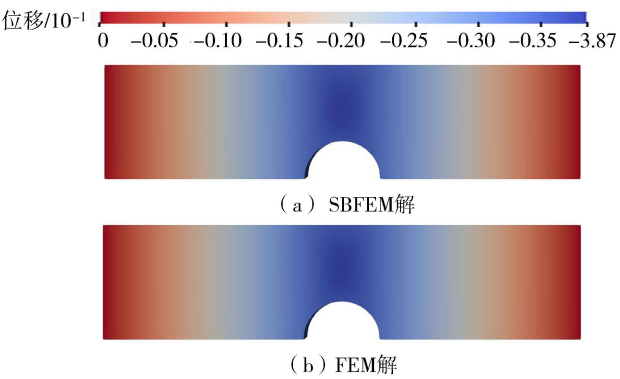


图 13 简支梁的竖向位移云图
Fig. 13 Vertical deformation cloud of simply supported beam

- 2019,39(2):46-50. (CHENG Jing, WEI Jinpeng, LI Zongyue, et al. Structure reliability analysis of concrete gravity dams using Neumann expansion stochastic finite element method[J]. Advances in Science and Technology of Water Resources, 2019, 39(2):46-50. (in Chinese))
- [6] ZHANI K, DARRIEULAT M, CHENAOUÏ A. Prediction of anisotropic elastoplastic instability with rice's criterion in plane compression[J]. Indian Journal of Science and Technology, 2021, 14(18):1452-1467.
- [7] ZHANG Ruifu, WU Minjun, REN Xiaosong, et al. Seismic response reduction of elastoplastic structures with inerter systems[J]. Engineering Structures, 2021, 230(1):111661.
- [8] BELYTSCHKO T, LIU W K, MORAN B, et al. Nonlinear finite elements for continua and structures[M]. New York: Wiley, 2013.
- [9] WRIGGERS P. Nonlinear finite element methods[M]. Berlin: Springer, 2008.
- [10] LIU Haoyuan, KAYNIA A M. Monopile responses to monotonic and cyclic loading in undrained sand using 3D FE with SANISAND-MSu[J]. Water Science and Engineering, 2022, 15(1):69-77.
- [11] 方刚, 曾攀. 金属板料冲裁过程的有限元模拟[J]. 金属学报, 2001, 37(6):653-657. (FANG Gang, ZENG Pan. Finite element simulation for blanking process of sheet metal[J]. Acta Metallurgica Sinica, 2001, 37(6):653-657. (in Chinese))
- [12] NGUYEN-THOI T, VU-DO H C, RABCZUK T, et al. A node-based smoothed finite element method (NS-FEM) for upper bound solution to visco-elastoplastic analyses of solids using triangular and tetrahedral meshes[J]. Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, 2010, 199(45):3005-3027.
- [13] 楼志文, 杨物华. 弹塑性边界元法的拟线性解[J]. 力学学报, 1986, 18(1):57-64. (LOU Zhiwen, YANG Wuhua. A quasilinear solution in elastoplastic boundary element method [J]. Chinese Journal of Theoretical and Applied Mechanics, 1986, 18(1):57-64. (in Chinese))
- [14] CHANG Yanjun, SONG Qiao, KUANG Zheng, et al. Fracture analysis of cast iron materials with cracks based on elastoplastic extended finite element method[J]. Acta Mechanica solida Sinica, 2019, 32(2):201-214.
- [15] 杜成斌, 何晓宇, 李欣竹. 基于比例边界有限元法的 Lamb 波在板中传播的模拟分析[J]. 河海大学学报(自然科学版), 2019, 47(4):374-380. (DU Chengbin, HE Xiaoyu, LI Xinzhu. Simulation of Lamb wave propagation in plate based on the scaled boundary finite element method[J]. Journal of Hohai University(Natural Sciences), 2019, 47(4):374-380. (in Chinese))
- [16] 江守燕, 李云, 杜成斌. 改进型扩展比例边界有限元法[J]. 力学学报, 2019, 51(1):278-288. (JIANG Shouyan, LI Yun, DU Chengbin. Improved extended scaled boundary finite element methods [J]. Chinese Journal of Theoretical and Applied Mechanics, 2019, 51(1):278-288. (in Chinese))
- [17] LIU Lei, ZHANG Junqi, SONG Chongmin, et al. An automatic approach for the acoustic analysis of three-dimensional bounded and unbounded domains by scaled boundary finite element method[J]. International Journal of Mechanical Sciences, 2019, 151:563-581.
- [18] XING Weiwei, ZHANG Junqi, SONG Chongmin, et al. A node-to-node scheme for three-dimensional contact problems using the scaled boundary finite element method[J]. Computer Methods in Applied Mechanics & Engineering, 2019, 347:928-956.
- [19] CHEN Kai, ZOU Degao, KONG Xianjing, et al. A novel nonlinear solution for the polygon scaled boundary finite element method and its application to geotechnical structures[J]. Computers and Geotechnics, 2017, 82:201-210.
- [20] 邹德高, 刘锁, 陈楷, 等. 基于四叉树网格和多边形比例边界有限元方法的岩土工程非线性静动力分析[J]. 岩土力学, 2017, 38(增刊2):33-40. (ZOU Degao, LIU Suo, CHEN Kai, et al. Nonlinear static and dynamic analysis for geotechnical engineering based on quadtree mesh and polygon scaled boundary finite element method[J]. Rock and Soil Mechanics, 2017, 38(Sup2):33-40(in Chinese))
- [21] OOI E T, SONG C, LOI F T. A scaled boundary polygon formulation for elasto-plastic analyses[J]. Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, 2014, 268:905-937.
- [22] BEHNKE R, MUNDIL M, BIRK C, et al. A physically and geometrically nonlinear scaled-boundary-based finite element formulation for fracture in elastomers[J]. International Journal for Numerical Methods in Engineering, 2014, 99(13):966-999.
- [23] LIN Zhiliang, LIAO Shijun. The scaled boundary FEM for nonlinear problems[J]. Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation, 2011, 16(1):63-75.
- [24] LIU Lei, ZHANG Junqi, SONG Chongmin, et al. Automatic scaled boundary finite element method for three-dimensional elastoplastic analysis[J]. International Journal of Mechanical Sciences, 2020, 171:105374.
- [25] WOLF J P, SONG C. The scaled boundary finite-element method-a primer: derivations[J]. Computers & Structures, 2000, 78:191-210.
- [26] SONG Chongmin. The scaled boundary finite element method: introduction to theory and implementation[M]. New Jersey: John Wiley & Sons, 2018.
- [27] 孔宪京, 邹德高, 陈楷. 比例边界有限元在岩土工程中的应用[M]. 北京: 科学出版社, 2022.
- [28] SIMO J C, TAYLOR R L. Consistent tangent operators for rate-independent elastoplasticity[J]. Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, 1985, 48(1):101-118.