

DOI:10.3876/j.issn.1000-1980.2025.02.010

准脆性岩石断裂问题的准键有限元法

朱其志¹, 刘武¹, 赵星光², 张仁杰¹, 周廷昱¹

(1. 河海大学岩土力学与堤坝工程教育部重点实验室, 江苏南京 210098;
2. 核工业北京地质研究院国家原子能机构高放废物地质处置创新中心, 北京 100029)

摘要: 为解决全域准键方法(QBM)结构分析计算和内存开销较大的问题, 将QBM与有限元法(FEM)相结合, 提出新的准键有限元法(QBFEM)。QBFEM采用统一的线性单元进行空间离散, 将初始裂隙区和潜在损伤区设置为准键区域, 进行连续-不连续数值分析, 在材料无损区域采用有限元分析, 且过渡区无需设置耦合区域。利用QBM和QBFEM对不同数量级网格结构进行刚度矩阵组装运算, 验证了QBFEM的数值高效性和计算准确性。单孔平板拉伸、预制单裂缝平板剪切和静水压力下无损重力坝分析表明, QBFEM能够准确捕捉固体材料I型裂缝的萌生与扩展。

关键词: 准键方法; 准键-有限元耦合; 准脆性材料; 裂隙演化

中图分类号: TU45 **文献标志码:** A **文章编号:** 1000-1980(2025)02-0078-10

Quasi-bond finite element method for fracture problem of quasi-brittle rocks

ZHU Qizhi¹, LIU Wu¹, ZHAO Xingguang², ZHANG Renjie¹, ZHOU Tingyu¹

(1. Key Laboratory of Ministry of Education for Geomechanics and Embankment Engineering, Hohai University, Nanjing 210098, China;
2. CAEA Innovation Center on Geological Disposal of High Level Radioactive Waste, Beijing Research Institute of Uranium Geology, Beijing 100029, China)

Abstract: Given the fact that computational effort and memory requirements are considerable when applying the quasi-bond method (QBM) to structural analyses, this paper introduces a hybrid numerical method combining QBM and the classical finite element method for modeling and simulating deformation and crack evolution in quasi-brittle materials. The proposed approach, referred to as QBFEM, utilizes linear elements for spatial discretization of structures. Cracked material regions and potential damage zones are designated as quasi-bond analysis domains where continuous-discontinuous solutions are performed, while non-damaged zones are solved using the finite element method without involving any coupling regions along the QBM-FEM transition zones. Subsequently, several tests of stiffness matrix assembling by both QBM and QBFEM for different meshes were conducted to demonstrate the efficiency of QBFEM. Finally, three numerical examples—plate with a single hole under tension, single crack plate under shear, and undamaged gravity dam under hydrostatic pressure—are provided for validation, which demonstrate that QBFEM can effectively capture the initiation and propagation of Mode I fracture in solid materials.

Key words: quasi-bond method (QBM); QBM-FEM coupling; quasi-brittle material; crack evolution

在材料、力学和工程科学领域, 裂隙萌生和演化一直是研究热点和具有挑战的问题。随着计算机科学的发展和计算机硬件的不断提升, 数值模拟已成为研究材料与结构非线性行为的重要手段之一^[1]。根据基本原理和假设的不同, 数值模拟方法大致可以分为连续方法和非连续方法两类^[2-4]。

连续方法采用连续介质力学理论描述微观结构变化引起的应变场和应力场演化, 例如有限元法、有限差分法和傅立叶谱法^[5-7]等。基于连续方法的结构有限元分析一般采用连续损伤理论模型, 将微裂缝的产生和扩展视为刚度矩阵的退化, 采用这种方法的有多尺度损伤模型^[8-9]、非局部损伤理论^[10]、相场损伤模型^[11]等。在复杂裂缝和强不连续面情况下, 连续方法在计算速度和灵活性方面仍面临诸多困难。

针对连续方法在描述断裂问题方面的不足, 基于非连续假设的离散方法逐渐发展^[12-13]。常用的离散方

作者简介: 朱其志(1979—), 男, 教授, 博士, 主要从事多尺度岩石力学本构理论与工程应用研究。E-mail: qizhi_zhu@163.com

引用本文: 朱其志, 刘武, 赵星光, 等. 准脆性岩石断裂问题的准键有限元法[J]. 河海大学学报(自然科学版), 2025, 53(2): 78-87.

ZHU Qizhi, LIU Wu, ZHAO Xingguang, et al. Quasi-bond finite element method for fracture problem of quasi-brittle rocks[J]. Journal of Hohai University (Natural Sciences), 2025, 53(2): 78-87.

法有离散元法、扩展有限元法和非连续变形分析法等。离散元法和非连续变形分析法通常先将材料计算区域离散为相互接触的颗粒,利用牛顿第二定律和最小势能原理建立系统的控制方程,常用于计算结构大变形和分析断裂问题^[14-15]。近场动力学方法^[16]最早由 Silling 教授提出,其基于非局部作用思想建立并使用空间积分形式构建系统平衡方程,避免了不连续面处微分方程的奇异性问题,可实现在统一理论框架内求解连续和不连续问题。早期的近场动力学方法被称为“键基”模型,其缺陷在于泊松比是固定的^[17]。Zhu 等^[18]提出了考虑力键转动效应的双参数键基近场动力学模型。Ni 等^[19]采用 PD-FEM 耦合方法开展了对裂缝扩展问题的模拟。Li 等^[20]通过局部域物质点拟合得到位移场,重新构建了扩展键基近场动力学的数值模型,使其能够处理结构大变形问题。Wang 等^[21]提出了适用于非均质结构裂缝扩展的键失效模型,模拟了复合岩层压裂过程。同时也注意到,近场动力学方法的计算开销比有限元大大增加,并且存在边界数值问题。

Li 等^[22]提出了新颖的准键方法(quasi-bond method, QBM),采用间接连接(准键)等效材料的刚度矩阵,通过准键断裂描述材料的损伤行为,在模拟裂缝的萌生和扩展、各向异性损伤等方面有诸多优势,整体系数矩阵的非零元素带宽与经典有限元一致,能够有效消除边界问题。为了结合 QBM 和有限元法(finite element method, FEM)优势,提升结构数值分析效率,本文提出一种准键有限元法(quasi-bond finite element method, QBFEM)。QBFEM 利用有限元网格对材料进行离散,在材料裂缝萌生区和潜在扩展区采用 QBM 计算,在无损伤连续区采用 FEM 计算。使用该方法对无损方板进行了弹性变形分析,并将 QBM 和 QBFEM 计算效率进行对比,最后对单孔平板的拉伸、预制单裂缝平板剪切和静水压力下的无损重力坝等 3 个算例的裂缝扩展过程进行模拟,对 QBFEM 的计算效率和精度进行验证。

1 QBFEM 基本理论

1.1 准键方法

与键基近场动力学不同,准键方法考虑节点间的间接连接,每个节点都由一定数量的准键连接(为兼顾计算精度和计算效率,每个节点联系的准键数量取 24~48 较为合适)。每个准键只有一个端点连接计算节点,另一端由其他相邻节点进行计算。如图 1 所示,以计算节点 I 为起点向四周生成一组射线与单元边界相交,所形成的线段即为准键(初始构型中的红色虚线)。

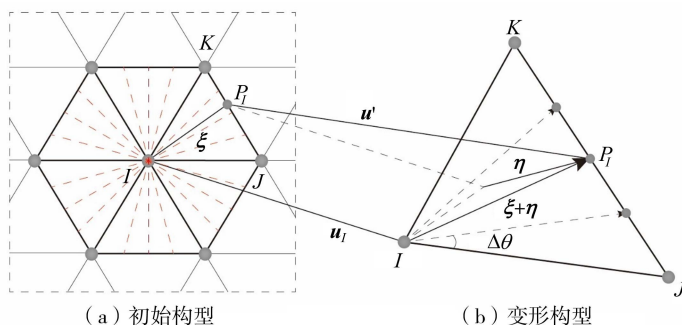


图 1 准键概念模型示意图

Fig. 1 Sketch of the quasi-bond conceptual model

在有限元网格中任取一个单元 IJK , 记通过节点 I 的某条准键与单元边界 JK 交于点 P_i , I, P_i 的位移向量,如图 1 所示,该准键两端点的相对位置 ξ 可用端点位置矢量表示为 $\xi = x_p - x_i$ 。图 1 中 u_i, u' 分别为节点 I, P_i 的位移向量。 I 与 P_i 之间的相对位移矢量 $\eta(x_i, \xi)$ 为^[22]

$$\eta = \varepsilon \cdot \xi \quad (1)$$

式中 ε 为准键所在区域的应变。

计算节点 I 在 n 方向的键力密度 $f_i(x_i, n)$:

$$f_i(x_i, n) = D \cdot \eta \quad (2)$$

其中 $D = \frac{1}{\|\xi\|^2} [cn \otimes n + k(I - n \otimes n)]$ $n = \frac{\xi + \eta}{\|\xi + \eta\|} \approx \frac{\xi}{\|\xi\|}$

式中: D 为准键刚度张量; c, k 分别为准键的轴向刚度和切向刚度; I 为二阶单位张量; n 为准键的单位方向向量。

在小变形条件下,准键轴向变形,即准键伸长率可用应变和方向向量表示:

$$l = \mathbf{n} \cdot \boldsymbol{\varepsilon} \cdot \mathbf{n} = \frac{1}{\|\boldsymbol{\xi}\|} \boldsymbol{\eta} \cdot \mathbf{n} \quad (3)$$

同样得到准键相对转动产生的切向变形 $\boldsymbol{\gamma}$:

$$\boldsymbol{\gamma} = \mathbf{n} \cdot \boldsymbol{\varepsilon} \cdot (\mathbf{I} - \mathbf{n} \otimes \mathbf{n}) = \frac{1}{\|\boldsymbol{\xi}\|} [\boldsymbol{\eta} - (\boldsymbol{\eta} \cdot \mathbf{n})\mathbf{n}] \quad (4)$$

根据式(1)、式(2),准键的应变能密度 ω 可以表示为

$$\omega = \frac{1}{2} \boldsymbol{\eta} \cdot \mathbf{D} \cdot \boldsymbol{\eta} = \frac{1}{2} c l^2 + \frac{1}{2} k \boldsymbol{\gamma} \cdot \boldsymbol{\gamma} \quad (5)$$

在二维情况下,任一节点处的局部应变能密度可根据单位圆上的积分得到:

$$W = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \omega d\theta = \frac{1}{4\pi} \int_0^{2\pi} (c l^2 + k \boldsymbol{\gamma} \cdot \boldsymbol{\gamma}) d\theta \quad (6)$$

则二维情况下的有效弹性张量为

$$\mathbf{C} = \frac{\partial^2 W}{\partial \boldsymbol{\varepsilon}^2} = \frac{1}{4\pi} \int (c \mathbf{N} + \frac{1}{2} k \mathbf{T}) d\theta = \frac{1}{2} c \mathbf{J} + \frac{1}{4} (c + k) \mathbf{K} \quad (7)$$

其中 $\mathbf{N} = \mathbf{n} \otimes \mathbf{n} \otimes \mathbf{n} \otimes \mathbf{n}$ $\mathbf{T} = (\mathbf{n} \otimes \mathbf{n}) \otimes (\mathbf{I} - \mathbf{n} \otimes \mathbf{n})$ $\mathbf{J} = \frac{1}{2} \mathbf{I} \otimes \mathbf{I}$ $\mathbf{K} = \mathbf{I} \otimes \mathbf{I} - \mathbf{J}$

在平面应力状态下, $c = E/(1-\nu)$ 且 $k = E(1-3\nu)/(1-\nu^2)$, E 为杨氏模量, ν 为材料泊松比;在平面应变状态下, $c = E/[(1+\nu)(1-2\nu)]$ 且 $k = (1-4\nu)E/[(1+\nu)(1-2\nu)]$ 。

1.2 准键法-有限元法耦合计算

QBFEM 耦合计算如图2所示,对目标结构 Ω 进行几何建模,生成有限元计算网格,将计算区域划分为有限元区域 Ω_{FEM} 和准键区域 Ω_{QBM} 。根据两种方法的计算特点,将预制裂缝和裂缝潜在扩展区域设置在准键区域 Ω_{QBM} 内。在耦合边界上,节点刚度矩阵由准键方法和有限元方法共同计算得到,且来自互不重叠的单元体,彼此独立互不影响,故不需设置耦合过渡区。

在准键区域,节点 I 处的节点力合力 \mathbf{q}_I 由与 I 相连的准键合力和其他节点准键计算键力时给节点 I 带来的反力合力共同构成:

$$\mathbf{q}_I = \sum_{i=1}^e \sum_{j=1}^{M_i} \frac{1}{N_i} \mathbf{f}_I(\boldsymbol{\xi}_{i,j}) S_i h \quad (8)$$

式中: e 为准键区域内与节点 I 连接的单元数量; M_i 为每个与节点 I 相连单元内准键的数量; N_i 为第 i 单元内的准键数量; $\boldsymbol{\xi}_{i,j}$ 为第 i 单元内与 I 连接的第 j 准键; $\mathbf{f}_I(\boldsymbol{\xi}_{i,j})$ 为准键 $\boldsymbol{\xi}_{i,j}$ 的键力密度; S_i 为第 i 单元的面积; h 为模型厚度。

根据牛顿第二定律,节点 I 在某时刻的运动方程可以表示为

$$m_I \ddot{\mathbf{u}} = \mathbf{q}_I + \mathbf{b}_I \quad (9)$$

式中: m_I 为物质质量; $\ddot{\mathbf{u}}$ 为加速度; \mathbf{b}_I 为体力。

准键区域系统的力平衡方程可以表示为

$$\mathbf{K}_{\text{QB}} \mathbf{U}_{\text{QB}} = \mathbf{F}_{\text{QB}} = \sum_{i=1}^{m_{\text{QB}}} \mathbf{V}_i^T \mathbf{F}_i \quad (10)$$

式中: \mathbf{K}_{QB} 为准键区域刚度矩阵; \mathbf{U}_{QB} 、 \mathbf{F}_{QB} 分别为准键区域位移矢量和力矢量; m_{QB} 为准键区域内单元数量; \mathbf{V}_i 为准键区域 Ω_{QBM} 中第 i 单元的节点自由度转换矩阵; \mathbf{F}_i 为第 i 单元荷载向量。

在有限元区域,平衡方程组采用经典的形式:

$$\mathbf{K}_{\text{FE}} \mathbf{U}_{\text{FE}} = \mathbf{F}_{\text{FE}} \quad (11)$$

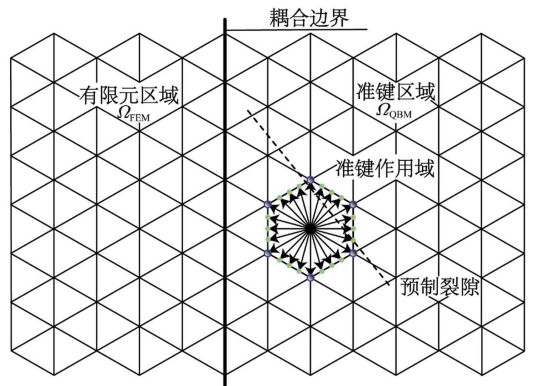


图2 QBFEM 耦合计算示意图

Fig. 2 Diagram of QBFEM coupling calculation

式中: \mathbf{K}_{FE} 为有限元区域刚度矩阵; \mathbf{U}_{FE} 、 \mathbf{F}_{FE} 分别为有限元区域位移矢量和力矢量。

2 QBFEM 的数值实现

2.1 系统刚度矩阵

因准键区域和有限元区域相互独立,结构的系统整体刚度矩阵 \mathbf{K}_A 可由 \mathbf{K}_{QB} 和 \mathbf{K}_{FE} 组合得到:

$$\mathbf{K}_A = \mathbf{K}_{\text{QB}} + \mathbf{K}_{\text{FE}} \quad (12)$$

其中

$$\mathbf{K}_{\text{QB}} = \sum_{I=1}^n \mathbf{K}_I \quad \mathbf{K}_I = \sum_{i=1}^e \sum_{j=1}^{M_I} \mathbf{Q}_i^T \mathbf{H}_I \mathbf{Q}_i$$

$$\mathbf{H}_I = W_I \begin{bmatrix} -\mathbf{D} & \lambda_k \mathbf{D} & \lambda_j \mathbf{D} \\ \lambda_k \mathbf{D} & -\lambda_j^2 \mathbf{D} & -\lambda_k \lambda_j \mathbf{D} \\ \lambda_j \mathbf{D} & -\lambda_j \lambda_k \mathbf{D} & -\lambda_j^2 \mathbf{D} \end{bmatrix} \quad W_I = S_i h / N_i$$

式中: n 为准键区域内节点数量; \mathbf{K}_I 为节点 I 的刚度矩阵; \mathbf{Q}_i 为准键区域 Ω_{QBM} 的节点自由度的转换矩阵; \mathbf{H}_I 为节点 I 处键力与键力反力共同作用的单元刚度矩阵; W_I 为节点 I 处的准键体积微元; λ_k 、 λ_j 分别为键力在节点 k 、 J 上的分配系数。

根据各单元刚度矩阵 \mathbf{R} 得到 \mathbf{K}_{FE} :

$$\mathbf{K}_{\text{FE}} = - \sum_{i=1}^{m_{\text{FE}}} \mathbf{L}_i^T \mathbf{R} \mathbf{L}_i \quad (13)$$

其中

$$\mathbf{R} = \int_{\Omega} \mathbf{B}_i^T \mathbf{C}' \mathbf{B}_i d\Omega$$

式中: m_{FE} 为有限元区域 Ω_{FEM} 内包含的单元数量; \mathbf{L}_i 为有限元区域 Ω_{FEM} 内第 i 单元的节点自由度转换矩阵(满足 $\mathbf{u} = \mathbf{L}_i \mathbf{u}_i$, \mathbf{u} 为系统总体系节点位移向量; \mathbf{u}_i 为第 i 单元内节点的位移向量); \mathbf{B}_i 为第 i 单元形函数梯度矩阵; \mathbf{C}' 为有限元弹性矩阵。

二维情况下, \mathbf{B}_i 的计算公式为

$$\mathbf{B}_i = \begin{bmatrix} \frac{\partial N_1}{\partial x} & 0 & \frac{\partial N_2}{\partial x} & 0 & \frac{\partial N_3}{\partial x} & 0 \\ 0 & \frac{\partial N_1}{\partial y} & 0 & \frac{\partial N_2}{\partial y} & 0 & \frac{\partial N_3}{\partial y} \\ \frac{\partial N_1}{\partial y} & \frac{\partial N_1}{\partial x} & \frac{\partial N_2}{\partial y} & \frac{\partial N_2}{\partial x} & \frac{\partial N_3}{\partial y} & \frac{\partial N_3}{\partial x} \end{bmatrix} \quad (14)$$

2.2 应变光滑化

在用准键计算材料断裂时,为减小网格对计算的影响,提高计算的稳定性和计算结果的准确性,在断裂区域设置局部域进行位移场拟合,如图3所示,局部域内节点 I 的应变场通过将区域内所有节点的位移进行最小二乘拟合来实现。通常情况下,局部域半径 r 应大于任一三角形单元,具体大小应根据材料特性确定。Li等^[22]详细讨论了 r 对计算结果的影响,结果显示断裂强度对 r 的取值并不敏感,故本文不对 r 的敏感性做详细分析。

在局部域内,采用光滑应变 $\bar{\boldsymbol{\varepsilon}}$ 计算:

$$l = \mathbf{n} \cdot \bar{\boldsymbol{\varepsilon}} \cdot \mathbf{n} \quad (15)$$

$\bar{\boldsymbol{\varepsilon}}$ 确定方法如下:

$$\begin{bmatrix} \bar{\boldsymbol{\varepsilon}} \\ \mathbf{r} \end{bmatrix} = \mathbf{G} \mathbf{U} \quad (16)$$

其中

$$\mathbf{G} = (\mathbf{X}^T \mathbf{X})^{-1} \mathbf{X}^T$$

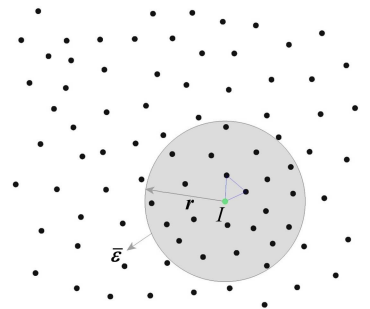


图3 局部域内应变光滑化示意图

Fig. 3 Diagram of strain smoothing in local domain

$$\mathbf{X} = \begin{bmatrix} x_{1,1} & x_{2,1} & x_{3,1} & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ x_{1,i} & x_{2,i} & x_{3,i} & 1 \end{bmatrix} \quad \mathbf{U} = \begin{bmatrix} u_{1,1} & u_{2,1} & u_{3,1} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ u_{1,i} & u_{2,i} & u_{3,i} \end{bmatrix}$$

式中: \mathbf{G} 为光滑应变转换矩阵; \mathbf{U} 为局部域内所有节点位移构成的矩阵; \mathbf{X} 为局部域内所有节点位置矩阵。

2.3 损伤计算

在模拟断裂过程中,形成单位裂缝表面所需的总应变能由以下函数得到^[22]:

$$G_c = \sum_{s=1}^{N_s} \frac{A_s}{A} \sum_{j=1}^{M_j} \omega(x_s, \xi) \frac{\Delta\Theta_j}{\Theta} + \sum_{t=1}^{N_t} \frac{A_t}{A} \sum_{j=1}^{M_j} \omega(x_t, \xi) \frac{\Delta\Theta_j}{\Theta} \quad (17)$$

式中: N_s 、 N_t 分别为断裂面两侧节点数量; A 为产生的裂缝表面的面积; $\Delta\Theta_j$ 为第 j 准键的立体角; Θ 为节点准键立体角总和, 二维情况下, $\Theta = 2\pi$, 三维情况下, $\Theta = 4\pi$; x_s 、 x_t 分别为节点 s 、 t 的位置坐标。

二维情况下, 单位断裂面积内所有准键断裂所需的功可以以积分的形式表示:

$$G_c = 2\delta \int_{-\pi}^{\pi} (cl_c^2/4\pi) d\theta \quad (18)$$

式中: δ 为裂缝宽度; l_c 为准键的断键临界伸长率。

根据式(17)和式(18)推导出 l_c 为

$$l_c = \sqrt{2G_c/c\delta} \quad (19)$$

准键 ξ 拉伸破坏准则表示为

$$\rho(\xi) = \begin{cases} 1, l < l_c & \text{不发生断裂} \\ 0, l \geq l_c & \text{发生断裂} \end{cases} \quad (20)$$

式中 $\rho(\xi)$ 为力键断裂函数。

将式(20)代入式(2)得到:

$$f_l = \frac{cl\rho(\xi)}{\|\xi\|} \mathbf{n} \quad (21)$$

采用 Newton-Raphson 方法进行准脆性断裂分析, 具体求解流程如图 4 所示。在描述损伤时, 根据断裂准则判断是否断键, 任一节点 I 处的等效损伤 φ_I 可表示为

$$\varphi_I = 1 - \frac{1}{N_I} \sum_{i=1}^e \sum_{j=1}^{M_j} \rho(\xi) \quad (22)$$

式中 N_I 为节点 I 处的所有力键的数量。

3 数值算例验证

3.1 二维平板拉伸弹性验证

为了验证耦合方法的有效性, 分别采用 QBFEM、标准 QBM 与 FEM 求解无损二维平板的位移场, 并比较计算结果。薄板简化为平面应力问题, 尺寸及边界条件如图 5(a) 所示。平板底部固定, 顶部最大加载位移 $u_{y,\max} = 0.01 \text{ mm}$, 预设位移增量 $\Delta u_y = 1 \times 10^{-4} \text{ mm}$ 。数值模拟采用三节点三角形单元, 包含 11 862 个节点和 23 322 个单元, 如图 5(b) 所示。材料杨氏模量为 $E = 30 \text{ GPa}$, 泊松比 $\nu = 1/3$ 。

根据计算结果输出平板模型的位移云图(图 6), 并给出 3 种方案耦合边界上的计算结果对比(图 7)。由图 6 和图 7 可知, QBFEM 与标准 QBM、FEM 计算精度相近, 结果准确可靠, 证明在计算材料无损变形时, QBFEM 可行。

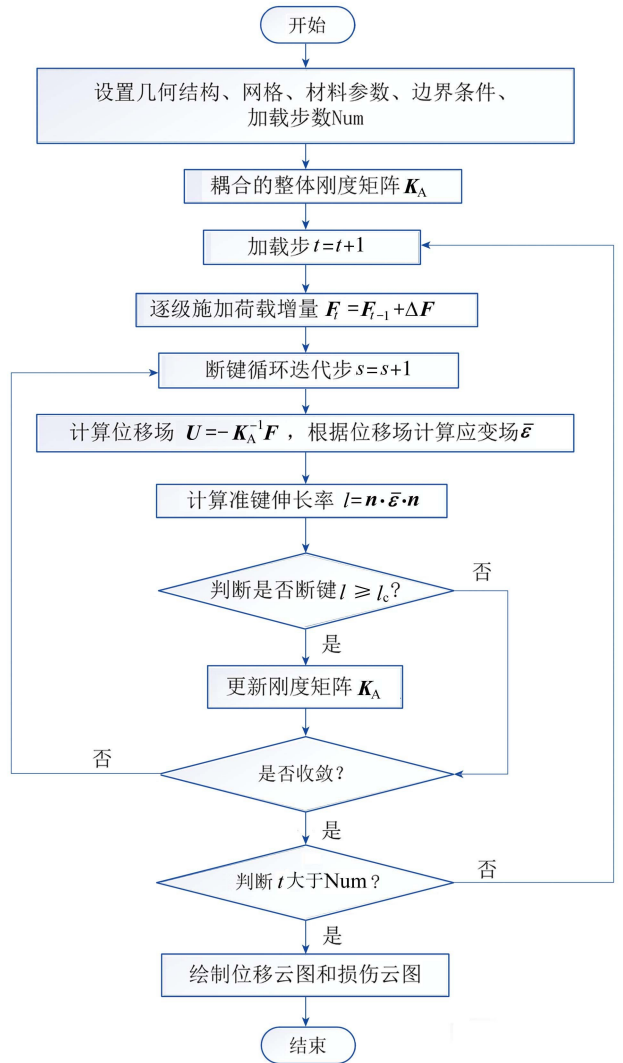


图 4 断裂求解流程

Fig. 4 Flow chart of fracture solving

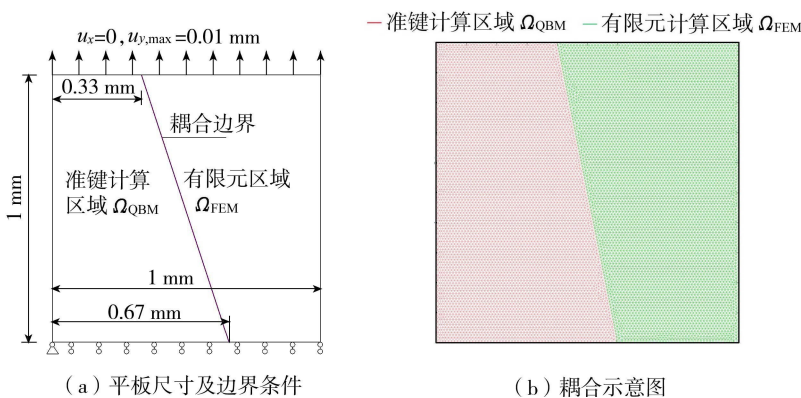


图 5 平板几何尺寸及耦合示意图

Fig. 5 Plate geometry and coupling diagram

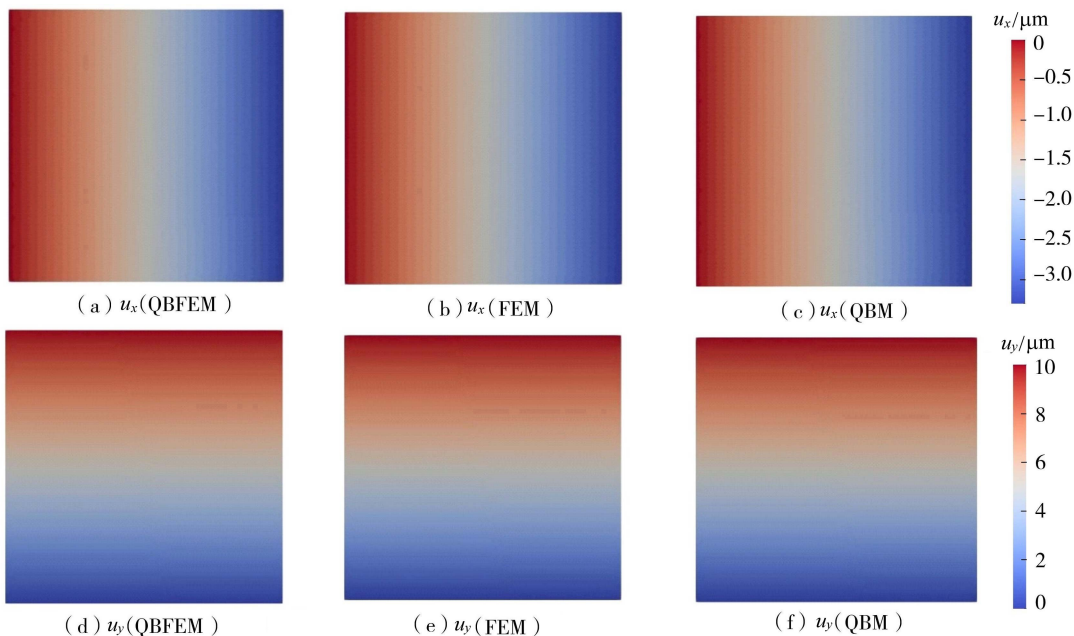


图 6 平板模型的位移云图

Fig. 6 Displacement cloud image of plate

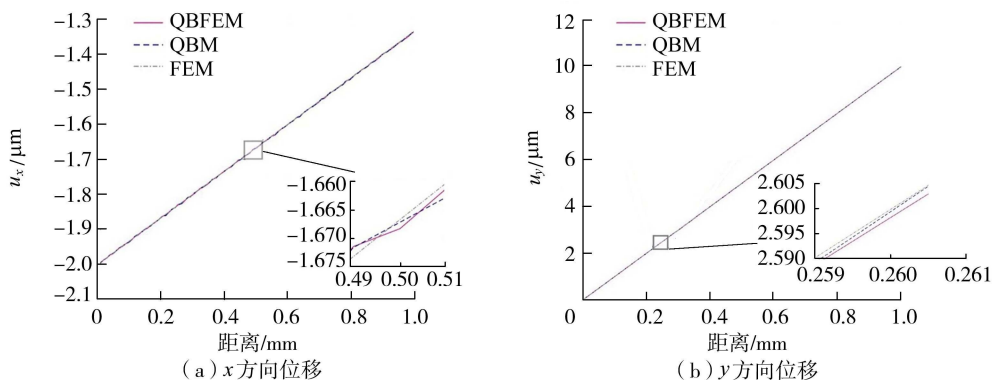


图 7 耦合边界上 QBFEM、QBM 和 FEM 计算结果对比

Fig. 7 Comparison of QBFEM, QBM and FEM calculation results on the coupled boundary

为进一步检验 QBFEM 的计算效率,分别采用 QBM 和 QBFEM 计算不同数量级的网格结构的整体刚度矩阵。由表 1 可知,在保证计算精度的前提下,QBFEM 可以大大提高计算效率。计算采用的计算机硬件条件如下:处理器为 i9-12900H@2.50 GHz,内存 64 GB,操作系统 Windows 11 Enterprise 64 bit。

3.2 二维裂缝扩展问题

3.2.1 单孔平板拉伸试验模拟

为验证 QBFEM 在计算材料裂缝萌生及扩展问题中的可行性,首先采用带孔平板拉伸试验进行数值模拟,研究拉伸作用下平板内裂缝的萌生和发展,并与 Zhou 等^[23]的计算结果进行比较。

模型设定为平面应力问题,采用边长为 1 mm 的方板,平板中间存在一个直径为 0.2 mm 的圆孔,如图 8(a)所示。预计裂缝会从圆孔两侧萌生,随后沿水平扩展至结构左右两边,因此设置图 8(b)红色区域为损伤潜在区域,在该区域采用准键方法进行数值计算。采用三节点三角形单元,计算网格共包含 22 203 个节点和 44 003 个单元,其中准键区域 37 415 单元,有限元区域 6 588 个单元。

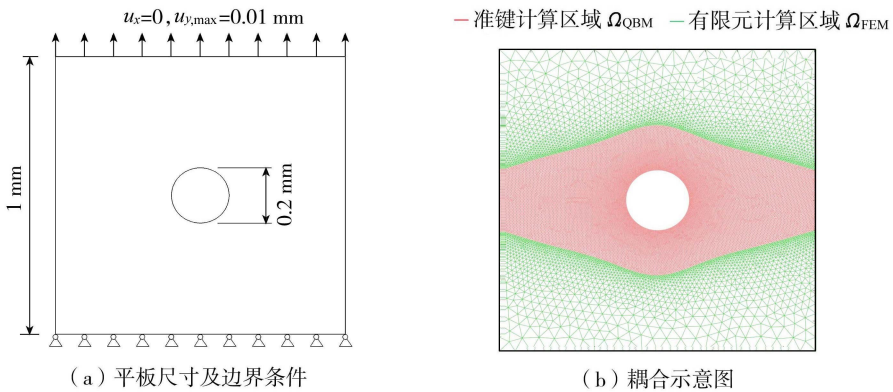


图 8 单孔平板尺寸及耦合示意图

Fig. 8 Dimensions and coupling diagram of single-hole plate

材料杨氏模量 $E=30$ GPa,泊松比 $\nu=0.2$,准键断裂的临界伸长率 $l_c=0.011$,顶部最大加载位移 $u_{y,max}=0.01$ mm,预设加载位移增量为 $\Delta u_y=2.5 \times 10^{-4}$ mm。

根据每一步计算结果输出模型的位移云图(图 9)和等效损伤云图(图 10)。由于平板发生断裂, x 方向和 y 方向位移均在裂缝两侧发生突变。如图 9(a)所示, x 方向上,平板裂缝下部几乎没有发生位移,上部在 x 方向位移也很小。在 y 方向上,如图 9(b)所示,在裂缝上部位移几乎均匀为 0.01 mm,裂缝下部几乎没有位移。

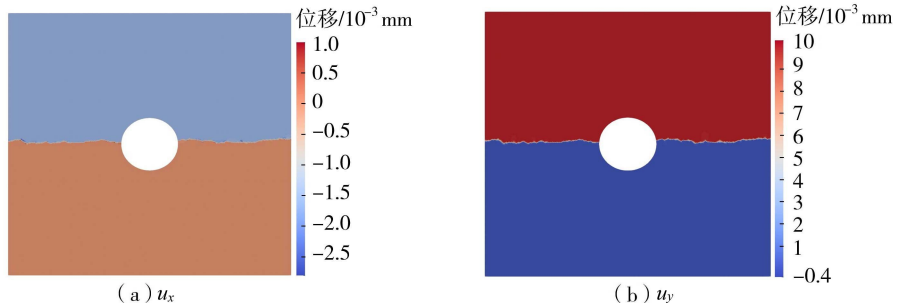


图 9 拉伸单孔平板位移分布云图

Fig. 9 Displacement distribution color map of tensile single-hole plate

图 10(a)为 $u_y=0.003$ mm 时的损伤云图,平板最终的等效损伤云图如图 10(b)所示,蓝色表示结构连续无损伤区域,红色表示裂缝产生。由图 10 可知,单孔平板受拉情况下,裂缝首先从圆孔两侧萌生,随着加载量增大,逐渐向两边水平扩展,最终发生贯通,与 Zhou 等^[23]的计算结果基本一致。

3.2.2 预制单裂缝平板剪切试验模拟

考虑平面应力问题,边长为 1 mm 的方板的左侧中间部位设置一宽度 0.01 mm 及长度 0.5 mm 的水平初始裂缝,如图 11(a)所示。根据裂缝可能萌生和扩展区域,将结构右下角设置为潜在损伤区并进行准键计

表 1 QBM 和 QBFEM 整体刚度矩阵的组装时间

Table 1 Global stiffness matrix assembly time using QBM and QB-FEM

网格单元数/个	准键单元数/个		组装时间/s	
	QBM	QBFEM	QBM	QBFEM
9 864	9 864	3 838	1.351 5	0.663 1
35 416	35 416	7 085	4.792 8	1.836 3
68 017	68 017	16 041	8.852 3	3.152 1
190 432	190 432	43 655	24.765 3	8.870 2
417 991	417 991	10 124	56.648 6	13.369 4
854 603	854 603	152 964	118.031 7	39.983 1

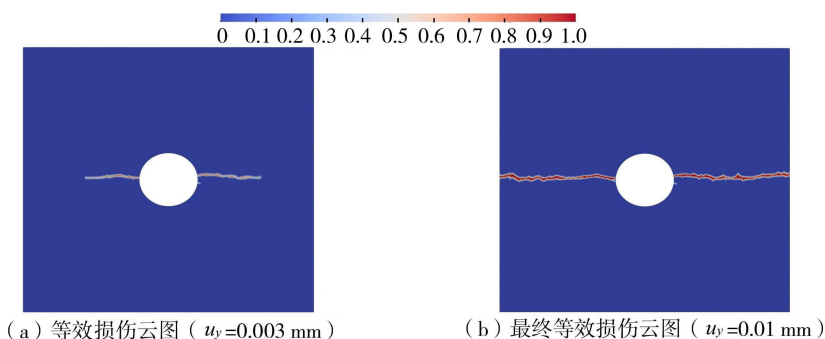


图 10 拉伸单孔平板的等效损伤云图

Fig. 10 Equivalent damage color map of tensile single-hole plate

算,其他区域采用有限元计算,如图 11(b)所示。采用三节点三角形单元网格离散结构,共计 6721 个节点和 13204 个单元,其中准键区域 8888 个单元,有限元区域 4316 个单元。材料杨氏模量为 $E = 210$ GPa,泊松比 $\nu = 1/3$,准键断键的临界伸长率设置为 $l_c = 0.011$,顶部最大加载位移 $u_{x,max} = 0.014$ mm,预设位移增量 $\Delta u_x = 1.4 \times 10^{-4}$ mm。

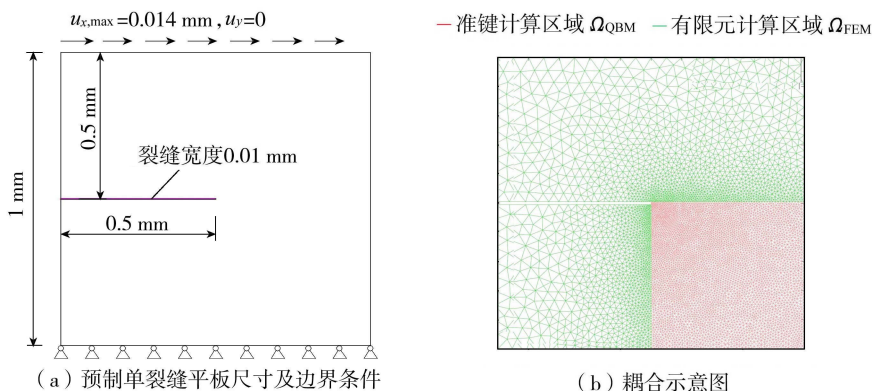


图 11 预制单裂缝平板尺寸及耦合示意图

Fig. 11 Dimensions and coupling diagram of single-pre-crack plate

平板最终位移分布如图 12 所示,在 x 方向上,裂缝左侧几乎未发生位移,顶部及左上部分位移最大,几乎为预设的最大加载位移 $u_{x,max} = 0.014$ mm,裂缝右侧位移从下到上逐渐增大。如图 12(b)所示,平板在 y 方向几乎没有位移,在裂缝右侧小部分范围内,存在少量位移。

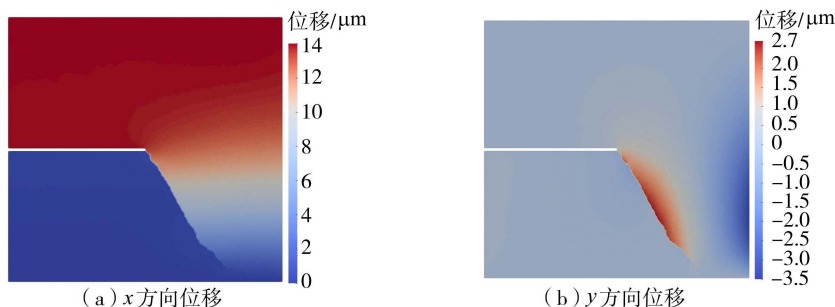


图 12 剪切预制单裂缝平板位移分布云图

Fig. 12 Displacement distribution color map of shear single-pre-crack plate

根据每一步计算结果输出等效损伤云图(图 13(a)),结构裂缝从预制裂缝位置萌生,由中间向右下方逐渐扩展,其中蓝色部分表示模型连续无损伤区域,红色表示产生断裂,介于蓝色和红色之间表示该部分断裂不完全。由图 13(b)可知,QBFEM 预测的导致断裂发展的荷载与近场动力学^[24]计算结果相比,整体较相近。

3.2.3 静水压力下无损重力坝模拟

该算例模拟了二维平面应变假设条件下重力坝上游坝踵位置裂缝的萌生和扩展。计算模型采用 Santillán 等^[25]提供的相关参数。大坝几何形状如图 14(a)所示,坝高 100 m,上游坡面垂直,下游坡面

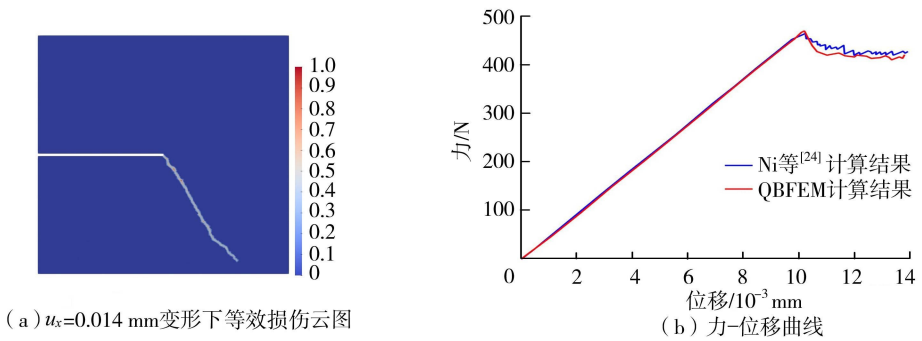
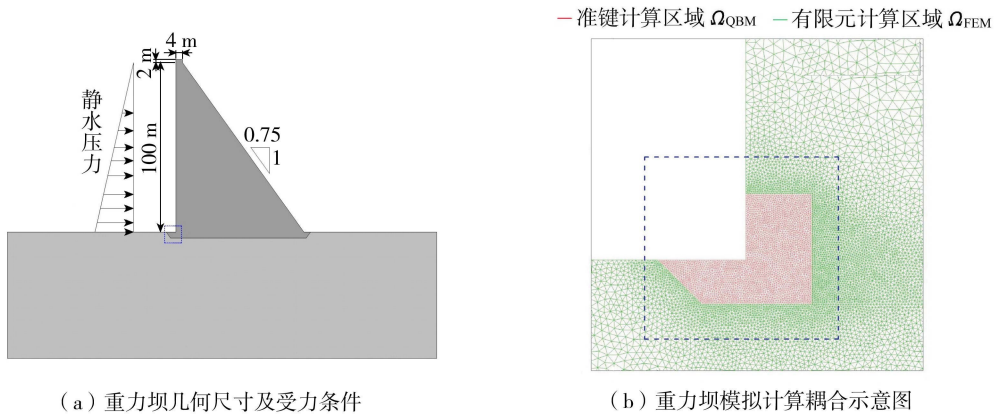


图 13 剪切预制单裂缝平板的等效损伤云图与力-位移曲线

Fig. 13 Equivalent damage color map and force-displacement curve of shear single-pre-crack plate

0.75 : 1, 坝顶高 2 m, 坝宽 4 m。上部坝体设置为混凝土材料, 杨氏模量 $E = 25$ GPa, 泊松比 $\nu = 0.25$, 密度 2400 kg/m³, 下部基础设置为岩石材料, 杨氏模量 $E = 20$ GPa, 泊松比 $\nu = 0.25$, 密度 2500 kg/m³。



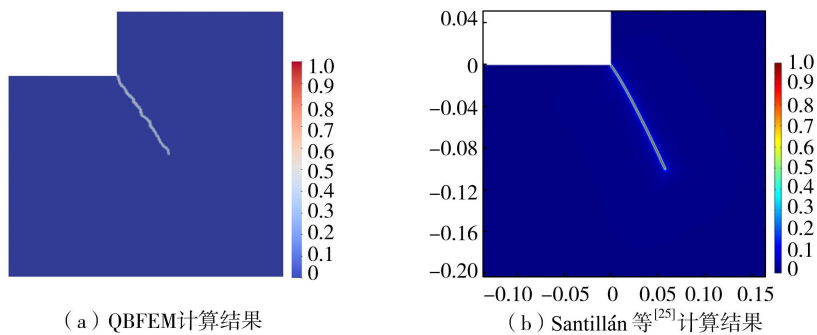
(a) 重力坝几何尺寸及受力条件

(b) 重力坝模拟计算耦合示意图

图 14 无初始损伤重力坝模型及耦合示意图

Fig. 14 Dimensions and coupling diagram of gravity dam without initial damage

该算例研究上游水位为 95.5 m 时大坝在静水压力和重力作用下的裂缝扩展状况。对于整个大坝而言, 上游坝踵为大坝薄弱位置, 是损伤发生的潜在区域, 因此将该部位设置为准键计算区域, 如图 14(b) 所示。坝底静水压力为 9.359×10^5 Pa, 加载步数设置 100。计算网格包含 16 994 个节点和 33 630 个三节点三角形单元, 其中准键区域 5 371 个, 有限元区域 28 259 个。由图 15 可知, QBFEM 预测的裂缝路径与 Santillán 等^[25]的基本一致。



(a) QBFEM 计算结果

(b) Santillán 等^[25]计算结果

图 15 QBFEM 计算结果和参考等效损伤云图

Fig. 15 Result of QBFEM and the equivalent damage color map of reference

4 结论与展望

a. 无损方板的 QBM、FEM 和 QBFEM 弹性变形分析表明, 不同方法得到的位移场分布规律相同, 计算误差满足要求, 验证了 QBFEM 的计算正确性。

b. QBFEM 能够有效模拟准脆性岩石类材料裂缝的萌生和发展过程,通过灵活设置准键计算区域和网格密度,可以实现对结构局部损伤和破坏过程进行精细化分析和预测。

c. 相较于标准 QBM, QBFEM 能大幅提升结构刚度矩阵的组装速率,在计算结构变形和损伤时充分发挥 QBM 和 FEM 各自的优势,实现快速准确的数值计算,因而适应大尺度模型的计算精度及效率需求,在土木水利、油气储存和深部地下工程等领域有着重要的应用价值。

d. QBFEM 目前仅实现二维结构的数值模拟,后续将进一步研究三维结构的 QBFEM 数值分析,以及考虑多场耦合过程的数值分析。

参考文献:

- [1] 唐春安. 数值模拟给岩石断裂力学发展带来的契机[C]//中国科协第三届青年学术年会. 北京:中国科学技术协会, 1998:52-55.
- [2] JING L R, HUDSON J A. Special issue: numerical methods in rock mechanics[J]. *International Journal of Rock Mechanics and Mining Sciences*, 2002, 39(4):407-408.
- [3] JING L. A review of techniques, advances and outstanding issues in numerical modelling for rock mechanics and rock engineering [J]. *International Journal of Rock Mechanics and Mining Sciences*, 2003, 40(3):283-353.
- [4] SINHA S, WALTON G. Understanding continuum and discontinuum models of rock-support interaction for excavations undergoing stress-induced spalling[J]. *International Journal of Rock Mechanics and Mining Sciences*, 2019, 123:104089.
- [5] KRAJČINOVIC D. Damage mechanics[J]. *Mechanics of Materials*, 1989, 8(2/3):117-197.
- [6] CRISFIELD M A. Non-linear finite element analysis of solids and structures, Vol I: essentials[M]. Chichester: John Wiley & Sons, 1991.
- [7] CAO Y J, SHEN W Q, BURLION N, et al. Effects of inclusions and pores on plastic and viscoplastic deformation of rock-like materials[J]. *International Journal of Plasticity*, 2018, 108: 107-124.
- [8] ZHAO L Y, ZHU Q Z, SHAO J F. A micro-mechanics based plastic damage model for quasi-brittle materials under a large range of compressive stress[J]. *International Journal of Plasticity*, 2018, 100: 156-176.
- [9] 朱其志. 多尺度岩石损伤力学[M]. 北京:科学出版社, 2019.
- [10] 赵启林, 孙宝俊, 江克斌. 非局部损伤模型的客观性研究[J]. *工程力学*, 2003, 20(5):185-189. (ZHAO Qilin, SUN Baojun, JIANG Kebin. The objectivity of non-local damage model [J]. *Engineering Mechanics*, 2003, 20(5): 185-189. (in Chinese))
- [11] DUDA F P, CIARBO NETTI A, SANCHEZ P J, et al. A phase-field/gradient damage model for brittle fracture in elastic-plastic solids[J]. *International Journal of Plasticity*, 2015, 65: 269-296.
- [12] POTYONDY D O, CUNDALL P A. A bonded-particle model for rock[J]. *International Journal of Rock Mechanics and Mining Sciences*, 2004, 41(8): 1329-1364.
- [13] HATZOR Y H, ARZI A A, ZASLIVSKY Y, et al. Dynamic stability analysis of jointed rock slopes using the DDA method: King Herod's Palace, Masada, Israel[J]. *International Journal of Rock Mechanics and Mining Sciences*, 2004, 41(5):813-832.
- [14] JING L, HUDSON J A. Numerical methods in rock mechanics[J]. *International Journal of Rock Mechanics and Mining Sciences*, 2002, 39(4): 409-427.
- [15] SHI G H. Discontinuous deformation analysis: a new numerical model for the statics and dynamics of deformable block structures [J]. *Engineering Computations*, 1992, 9(2): 157-168.
- [16] SILLING S A. Reformulation of elasticity theory for discontinuities and long-range forces[J]. *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*, 2000, 48(1): 175-209.
- [17] SILLING S A, EPTON M, WECKNER O, et al. Peridynamic states and constitutive modeling[J]. *Journal of Elasticity*, 2007, 88(2): 151-184.
- [18] ZHU Q Z, NI T. Peridynamic formulations enriched with bond rotation effects[J]. *International Journal of Engineering Science*, 2017, 121: 118-129.
- [19] NI T, ZACCARIOTTO M, ZHU Q Z, et al. Coupling of FEM and ordinary state-based peridynamics for brittle failure analysis in 3D[J]. *Mechanics of Advanced Materials and Structures*, 2021, 28(9):875-890.
- [20] LI W J, ZHU Q Z, NI T. A local strain-based implementation strategy for the extended peridynamic model with bond rotation [J]. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 2020, 358: 112625.

Engineering Journal,2012,45(11):134-140. (in Chinese))

- [15] 何晓宇,李宏男.地震与波浪联合作用下海洋平台动力特性分析[J].海洋工程,2007,25(3):18-25. (HE Xiaoyu, LI Hongnan. Dynamic analysis of offshore platform under seismic action and wave action[J]. The Ocean Engineering,2007,25(3):18-25. (in Chinese))
- [16] 赵秋红,许梦凡,董硕.地震-波浪耦合作用下考虑相位差影响的深水桥墩动力响应分析[J].中国公路学报,2021,34(5):86-98. (ZHAO QiuHong, XU Mengfan, DONG Shuo. Dynamic response analysis of deep-water piers under coupled earthquake-wave action considering phase difference[J]. China Journal of Highway and Transport,2021,34(5):86-98. (in Chinese))
- [17] YANG Zhaohui, ELGAMAL A. Influence of permeability on liquefaction-induced shear deformation[J]. Engineering Mechanics, 2002,128:720-729.
- [18] ELGAMAL A, YANG Zhaohui, PARRA E, et al. Modeling of cyclic mobility in saturated cohesionless soils[J]. International Journal of Plasticity,2003,19(6):883-905.
- [19] YANG Zhaohui, ELGAMAL A, PARRA E. Computational model for cyclic mobility and associated shear deformation[J]. Geotechnical and Geoenvironmental Engineering,2003,129(12):1119-1127.
- [20] 周林禄,苏雷,邱志坚,等.基于OpenSees的砂土本构模型对比研究[J].地震工程学报,2022,44(1):128-135. (ZHOU Linlu, SU Lei, QIU Zhijian, et al. Comparison of four constitutive models for sand based on OpenSees[J]. China Earthquake Engineering Journal,2022,44(1):128-135. (in Chinese))
- [21] LU Jinch. Parallel finite element modeling of earthquake ground response and liquefaction[D]. San Diego: University of California, San Diego,2006.
- [22] 王树青,梁丙臣.海洋工程波浪力学[M].青岛:中国海洋大学出版社,2013.
- [23] 李帅帅.波浪荷载作用下30万吨原油码头墩动力响应分析研究[D].大连:大连理工大学,2017.
- [24] 张琦,梁丙臣,邵珠晓.基于Copula函数的黄海波高周期联合统计分析[J].河海大学学报(自然科学版),2023,51(4):108-114. (ZHANG Qi, LIANG Bingchen, SHAO Zhuxiao. Joint statistical analysis of wave height and wave period of Yellow Sea based on Copula function[J]. Journal of Hohai University(Natural Sciences),2023,51(4):108-114. (in Chinese))
- [25] 柳玉良,杨洪旗,王爱群,等.圆形沉箱防波堤波压力的试验分析[J].海岸工程,2004,23(4):8-16. (LIU Yuliang, YANG Hongqi, WANG Aiqun, et al. Test and analysis of wave pressure on circular caisson breakwater[J]. Coastal Engineering,2002,23(4):8-16. (in Chinese))
- [26] SU Lei, LU Jinch, ELGAMAL A, et al. Seismic performance of a pile-supported wharf: three-dimensional finite element simulation[J]. Soil Dynamics and Earthquake Engineering,2017,95:167-179.
- [27] 钱向东,李晨,沈人杰.广义阻尼模型及其在混凝土重力坝地震响应分析中的应用[J].河海大学学报(自然科学版),2022,50(4):98-104. (QIAN Xiangdong, LI Chen, SHEN Renjie. A generalized damping model and its application in seismic response analysis of concrete gravity dam[J]. Journal of Hohai University (Natural Sciences), 2022, 50(4):98-104. (in Chinese))

(收稿日期:2024-04-18 编辑:熊水斌)

(上接第87页)

- [21] WANG W, ZHU Q Z, NI T, et al. Numerical simulation of interfacial and subinterfacial crack propagation by using extended peridynamics[J]. Computers & Structures, 2023, 279: 106971.
- [22] LI W J, ZHU Q Z. An innovative quasi-bond approach to bridge continuity, anisotropic damage and macroscopic fracture of solids and structures[J]. International Journal of Plasticity, 2024,172: 103829.
- [23] ZHOU Z Y, YU M, WANG X F, et al. Peridynamic study on fracture mode and crack propagation path of a plate with multiple cracks subjected to uniaxial tension[J]. CMES-Computer Modeling in Engineering & Sciences, 2023, 137(12):2593-2620.
- [24] NI T, ZACCARIOTTOM, ZHU Q Z, et al. Static solution of crack propagation problems in peridynamics[J]. Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, 2019, 346(APR. 1):126-151.
- [25] SANTILLÁN D, MOSQUERA J C, CUETO-FELGUEROSO L. Phase-field model for brittle fracture. Validation with experimental results and extension to dam engineering problems[J]. Engineering Fracture Mechanics, 2017, 178: 109-125.

(收稿日期:2024-09-18 编辑:刘晓艳)