

悬索结构平衡及振动非线性有限元分析^{*}

唐建民 赵 引

(河海大学土木工程学院 南京 210098)

摘 要 采用五节点索单元,提出了悬索结构平衡及自由振动非线性分析的一种新的有限元方法,将索元变形后的位置用修正的 Lagrangian 坐标的四次多项式来表示,并在索元变形后的位置上由虚功原理建立了非线性有限元基本方程.所提出的非线性有限元分析方法可充分考虑拉索的几何非线性特性的影响,并给悬索结构的找形及振动分析带来方便.此外,对单索结构的平衡及自振特性进行了计算分析.

关键词 悬索结构;非线性分析;有限元;自由振动

中图分类号 TU393.3

悬索结构在工程上的应用日益广泛,如大型体育建筑的屋盖部分以及斜拉桥、拉线塔、游览索道等等.目前对悬索结构的分析主要是采用数值或解析方法,针对不同的问题作出不同的假设.国外在这方面的研究开展得比较早,也相对比较成熟.我国的研究则开展得比较晚,尚属于起步阶段.迄今为止,可用于悬索结构非线性有限元分析的方法主要有两节点杆单元^[1]和多节点曲线单元^[2,3].这些单元几乎都是在悬索结构的初始态已经确定的基础上建立的.在已确定的初始几何上,基于总体 Lagrangian 描述建立位移函数和有限元方程.这样建立起来的有限元方程用于悬索结构荷载态的分析比较方便,而不能直接或不便于用于悬索结构初始几何及内力的确定.事实上,悬索结构设计的关键就在于其初始几何及内力的确定.悬索结构属于大位移几何非线性问题,而对结构的几何非线性分析除可采用总体 Lagrangian 坐标外,也可利用修正的 Lagrangian 坐标.因此,本文提出了一种新的五节点索单元有限元方法,将索元变形后的位置用修正的 Lagrangian 坐标的四次多项式来描述,直接在三维整体坐标系下,在索元变形后的位置上由虚功原理建立非线性有限元基本方程.这样建立起来的有限元方程可十分方便地用于悬索结构的初始平衡及自由振动的分析.文中对单索结构的平衡及自振特性进行了计算分析.

1 索元的非线性几何及物理关系

1.1 变位函数

基于修正的 Lagrangian 描述,在整体坐标系 $Oxyz$ 中,设索元变形后的位置为

$$\mathbf{X}^* = [\mathbf{N}] \mathbf{X}_N^* \quad (1)$$

其中

$$\begin{aligned} \mathbf{X}^* &= [x^* \ y^* \ z^*]^T \\ \mathbf{X}_N^* &= [x_1^* \ y_1^* \ z_1^* \ x_2^* \ y_2^* \ z_2^* \ \dots \ x_5^* \ y_5^* \ z_5^*]^T \\ [\mathbf{N}] &= \begin{bmatrix} N_1 & 0 & 0 & N_2 & 0 & 0 & N_3 & 0 & 0 & N_4 & 0 & 0 & N_5 & 0 & 0 \\ 0 & N_1 & 0 & 0 & N_2 & 0 & 0 & N_3 & 0 & 0 & N_4 & 0 & 0 & N_5 & 0 \\ 0 & 0 & N_1 & 0 & 0 & N_2 & 0 & 0 & 0 & N_3 & 0 & 0 & 0 & 0 & N_5 \end{bmatrix} \\ N_1 &= \frac{1}{6} \xi (1 - \xi - 4\xi^2 + 4\xi^3) \\ N_2 &= -\frac{4}{3} \xi (1 - 2\xi - \xi^2 + 2\xi^3) \end{aligned}$$

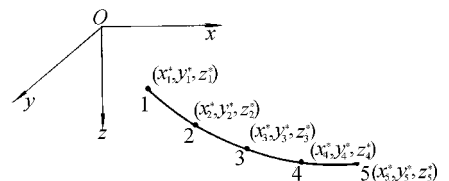


图 1 索单元模型

Fig. 1 Cable element model

收稿日期:1997-11-17

第一作者简介:唐建民,男,博士后,副教授,结构工程专业,主要从事空间钢结构现代计算理论与方法研究.

* 博士后科学基金资助项目.

$$N_3 = 1 - 5\xi^2 + 4\xi^4$$

$$N_4 = \frac{4}{3}(\xi(1 + 2\xi - \xi^2 - 2\xi^3))$$

$$N_5 = -\frac{1}{6}(\xi(1 + \xi - 4\xi^2 - 4\xi^3)) \quad (-1 \leq \xi \leq 1)$$

$$\xi = 2s/l$$

式中: s ——索单元变形前任意点至中点的无应力弧长; l ——索单元无应力长度. 上标“ $*$ ”表示索元变形后的位置, 以下同.

1.2 Lagrangian 应变

用变形和未变形弧长表示的 Lagrangian 应变的表达式为

$$\epsilon_s = \frac{1}{2} \left[\left(\frac{ds^*}{ds} \right)^2 - 1 \right] \quad (2)$$

由于 $ds^* = \sqrt{dx^{*2} + dy^{*2} + dz^{*2}}$, 代入上式得

$$\epsilon_s = \frac{1}{2} \left(\frac{d\mathbf{X}^{*T}}{ds} \frac{d\mathbf{X}^*}{ds} - 1 \right) \quad (3)$$

由式(1)则

$$\frac{d\mathbf{X}^*}{ds} = \frac{d[\mathbf{N}]}{ds} \mathbf{X}_N^* = [\mathbf{N}] \mathbf{X}_N^* \quad (4)$$

将式(4)代入式(3)则

$$\epsilon_s = \frac{1}{2} (\mathbf{X}_N^{*T} \mathbf{B} \mathbf{X}_N^* - 1) \quad (5)$$

其中

$$\mathbf{B} = [\mathbf{N}]^T [\mathbf{N}]$$

1.3 Kichhoff 应力与索元内力

假定索是理想柔性的, 那 Kichhoff 应力与 Lagrangian 应变的关系可表示为

$$\sigma_s = E \epsilon_s \quad (6)$$

建立在已变形几何上的索元内力可记为

$$T = AE(1 + E_s) \epsilon_s \quad (7)$$

式中: E_s ——索元的伸长率,

$$E_s = \frac{ds^*}{ds} - 1 \quad (8)$$

从式(2)~(8)可以看出 E_s 又可表示为

$$E_s = \sqrt{\mathbf{X}_N^{*T} \mathbf{B} \mathbf{X}_N^*} - 1 \quad (9)$$

将式(5)及(9)代入式(7)则索元张力为

$$T = \frac{1}{2} AE (\mathbf{X}_N^{*T} \mathbf{B} \mathbf{X}_N^* - 1) \sqrt{\mathbf{X}_N^{*T} \mathbf{B} \mathbf{X}_N^*} \quad (10)$$

2 索元的非线性运动方程

根据虚功原理, 则

$$\delta W = \int_0^L \delta \mathbf{X}^{*T} \mathbf{f}^* ds^* + \delta \mathbf{X}_N^{*T} \mathbf{r} - \int_0^L A \sigma_s \delta \epsilon_s ds = 0 \quad (11)$$

式中: $\mathbf{f}^*$ ——沿索元变形后弧长分布的总分布荷载; $\mathbf{r}$ ——节点集中荷载; A ——未变形索元的截面积; σ_s , ϵ_s ——沿索元变形后轴向的 Kichhoff 应力和 Lagrangian 应变.

式(11)最后一项表示内力虚功, 根据式(5)~(6)可写为

$$\delta U = \delta \mathbf{X}_N^{*T} \frac{1}{2} \int_0^L AE (\mathbf{X}_N^{*T} \mathbf{B} \mathbf{X}_N^* - 1) \mathbf{B} ds \mathbf{X}_N^* \quad (12)$$

分布荷载 $\mathbf{f}^*$ 由三项组成, 即

$$\mathbf{f}^* = \mathbf{f}_I^* + \mathbf{f}_g^* + \mathbf{f}_D^* \quad (13)$$

其中

$$\mathbf{f}_I^* = -m \frac{ds}{ds^*} \ddot{\mathbf{X}}^* \quad (14)$$

$$\mathbf{f}_g^* = \frac{ds}{ds^*} \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ mg \end{Bmatrix} \quad (15)$$

式中: $\mathbf{f}_I^*$ $\mathbf{f}_g^*$ $\mathbf{f}_D^*$ ——索元的惯性力、自重和均布外荷载; m ——沿索元未变形弧长分布的均布质量。

将式(13)(14)(15)代入式(11)并整理得

$$[m] \ddot{\mathbf{X}}_N^* + [K_E] \mathbf{X}_N^* - \mathbf{p} - \mathbf{q} - \mathbf{r} = 0 \quad (16)$$

其中

$$[m] = \int_0^L m [N]^T [N] ds \quad (17)$$

$$[K_E] = \frac{1}{2} \int_0^L AE (\mathbf{X}_N^{*T} \mathbf{B} \mathbf{X}_N^* - 1) \mathbf{B} ds \quad (18)$$

$$\mathbf{p} = \int_0^L [N]^T \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ mg \end{Bmatrix} ds \quad (19)$$

$$\mathbf{q} = \int_0^L [N]^T \mathbf{f}_D^* ds \quad (20)$$

式(16)为全量形式的平衡方程,为了求解方便,通常采用增量方程。为此,对式(16)微分,则无阻尼自由振动方程为

$$[m] \delta \ddot{\mathbf{X}}_N^* + [\delta K_E] \mathbf{X}_N^* + [K_E] \delta \mathbf{X}_N^* = 0 \quad (21)$$

由式(18)则

$$[\delta K_E] \mathbf{X}_N^* = \int_0^L AE (\mathbf{X}_N^{*T} \mathbf{B} \delta \mathbf{X}_N^*) \mathbf{B} ds \mathbf{X}_N^* = [K_L] \delta \mathbf{X}_N^* \quad (22)$$

式中 $[K_L]$ ——索元的大位移刚度矩阵。由式(22)则

$$[K_L] = \int_0^L AE \mathbf{B} \mathbf{X}_N^* \mathbf{X}_N^{*T} \mathbf{B} ds \quad (23)$$

因此,式(21)可写为

$$[m] \delta \ddot{\mathbf{X}}_N^* + [K_T] \delta \mathbf{X}_N^* = 0 \quad (24)$$

$$[K_T] = [K_E] + [K_L] \quad (25)$$

式中 $[K_T]$ ——单元的切线刚度矩阵。

3 求解方法

3.1 静力平衡问题

根据式(16)(24)静力平衡问题全、增量形式的整体平衡方程可写为

$$\Psi = \mathbf{K}_E \mathbf{X}_N^* - \mathbf{F} = 0 \quad (26)$$

$$\mathbf{K}_T \delta \mathbf{X}_N^* = -\Psi \quad (27)$$

式中的 $\mathbf{K}_T$ 、 $\mathbf{K}_E$ 可由各索元的 $[K_T]$ $[K_E]$ 集合而成, $\mathbf{F}$ 是作用在结构上包括等效节点荷载在内的节点荷载,可由各单元的 $\mathbf{p}$ $\mathbf{q}$ $\mathbf{r}$ 集合得到。根据式(26)(27)即可用 Newton-Raphson 法进行求解。对于初始平衡问题,若各索元的无应力长度已知,只需事先假定结构的形状,即假定各节点初始坐标,用方程(26)和(29)进行迭代修正至平衡位置,这样就可方便地找出结构的初始几何及内力。

3.2 特征值问题

设 $\delta \mathbf{X}_N^* = \mathbf{C} e^{i\omega t}$ 根据式(24)可建立结构的不计阻尼自由振动特征方程

$$(\mathbf{K}_T - \omega^2 \mathbf{M}) \mathbf{C} = 0 \quad (28)$$

式中: $\mathbf{K}_T$ ——静力平衡终了时的整体切线刚度矩阵; $\mathbf{M}$ ——整体质量矩阵,可由索元的质量矩阵 $[m]$ 集合得到; ω ——结构的自振频率; $\mathbf{C}$ ——相应的特征向量。利用子结构迭代法,根据式(28)可方便地求得结构的低

阶频率和振型.

4 算例分析

利用本文方法对两个单索的静动力问题进行计算.

算例 1(图 2)是一初始平衡态已知的小垂度单索结构,已知其初始水平张力为 10 kN,初始水平荷载为 0.2 kN/m,弹性模量为 $E=170\text{ GPa}$,截面积为 0.674 cm^2 .采用本文方法计算该结构在终态荷载 $q=0.5\text{ kN/m}$ 作用下的静力平衡问题(结构列于表 1),并与文献 2]的五节点曲线元进行了比较,从表 1 结果可以发现两者是十分吻合的.

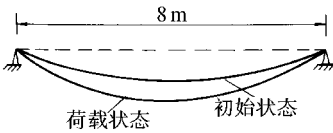


图 2 算例 1 模型
Fig.2 Model of example 1

表 1 算例 1 终态荷载作用下的计算结果

Table 1 Results of example 1 acted by the last load

采用方法	中点挠度 /cm	水平张力 /kN
本文	21.089	18.994
文献 2]	21.09	19.00

算例 2 是一支座不等高的单索结构.为了表述方便,文中采用了无量纲量纲: $x_N=X_N^*/l$, $\Omega=\omega/\sqrt{g/l}$, 其中 l 是索元的无应力长度.采用本文模型,首先研究了弹性刚度 $AE/(mgl)$ 对其初始平衡的影响(图 3),结果表明,随着弹性刚度 $AE/(mgl)$ 的增大,平衡曲线渐趋平坦;然后分析了该结构在弹性刚度 $AE/(mgl)=1000$ 情况下的自振频率和低阶振型(结果分别示于图 4、5 和表 2 中).

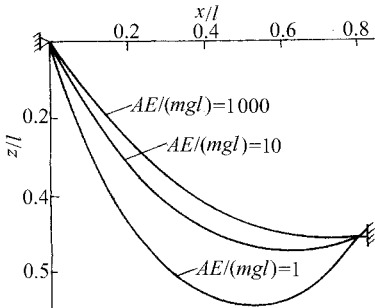


图 3 弹性刚度 $AE/(mgl)$ 对平衡的影响
Fig.3 Elastic effects on equilibrium shape

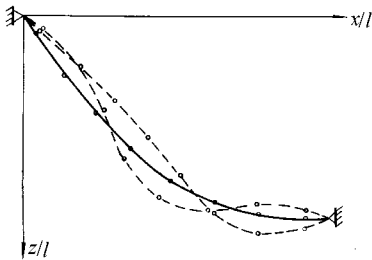


图 4 $AE/(mgl)=1000$ 时的 xz 向两个低阶振型
Fig.4 Two first vibration type in xz for $AE/(mgl)=1000$

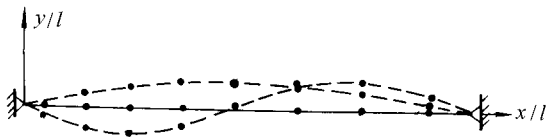


图 5 $AE/(mgl)=1000$ 时的 y 方向两个低阶振型
Fig.5 First two y modes for $AE/(mgl)=1000$

表 2 不同单元数量下的自振频率(低阶)

Table 2 Natural frequency comparison for various numbers of elements

单元数量	$(\Omega_y)_1$	$(\Omega_y)_2$	$(\Omega_{xz})_1$	$(\Omega_{xz})_2$
1	2.768 4	8.837 3	12.625 0	17.137 0
2	2.724 2	5.726 4	5.107 8	8.820 7
3	2.717 3	5.488 8	4.937 4	8.008 4
4	2.715 1	5.424 6	4.878 2	7.755 3

5 结 论

算例分析表明本文方法是精确有效的.采用本文方法,在索元的无应力长度已知的情况下,可通过假定结构的初始形状进行迭代,得到结构真正平衡的初始几何和内力.

文中虽然仅考察了单索的平衡及振动问题,但本文方法同样适用于空间索网、索桁等悬索结构的非线性静、动力分析.

参 考 文 献

- 1 唐建民. 柔性结构非线性分析的杆单元有限元法. 中南工学院学报, 1996, 10(1): 50 ~ 55
- 2 Tang Jianmin, Shen Zuyan, Qian Ruojun. A nonlinear finite element method with five-node curved element for analysis of cable structures. Proceedings of the IASS International Symposium, Italy: Milano, 1995, 2: 929 ~ 935
- 3 Schrefeer B A, Odorizzi S. A total lagrangian geometrically nonlinear analysis of combined beam and cable structures. Computers and Structures, 1983, 17(1): 115 ~ 127
- 4 Webster R L. On the static analysis of structures with strong geometric nonlinearity. Computers and Structures, 1979, 11: 137 ~ 145

Nonlinear Finite Element Method for Equilibrium and Natural Frequencies of Cable Structures

Tang Jianmin Zhao Yin

(College of Civil Engineering, Hohai Univ., Nanjing 210098)

Abstract By use of five-node cable element, a new finite element method for nonlinear analysis of equilibrium and natural frequencies of cable structures is presented in this paper. The deformed geometry of the element is defined as polynomial of four terms in terms of updated Lagrangian coordinates. All geometric nonlinearities are retained and elastic deformation is taken into consideration. The method can be easily applied to the analysis of form finding if the unstressed length of cables is given. The problems of static deflection and natural frequency for small oscillation about the nonlinear equilibrium position are investigated for single-span cables.

Key words cable structures; nonlinear analysis; finite element; natural frequency

· 简讯 ·

《河海大学学报(社会科学版)》公开出版发行

经国家新闻出版署批准《河海大学学报(社会科学版)》于 1999 年起公开出版发行。

《河海大学学报(社会科学版)》为社科类学术期刊, 主要刊登哲学、政治学、文学、史学、语言学、法学、社会学、心理学、经济学、管理学、高等教育学等社会科学方面的研究成果、学术论文、综述等学术性文章。

《河海大学学报(社会科学版)》国内统一刊号为 CN32 - 1521/C, 国际标准刊号为 ISSN1008 - 3316。季末出版, 16 开本, 每期 80 页。自办发行, 每份定价 3.00 元, 全年 16 元(含邮寄费)。

欢迎投稿, 欢迎订阅。

本刊地址: 南京市西康路 1 号《河海大学学报(社会科学版)》编辑部

邮编 210098

电话 (025) 8713777 - 51381

电子信箱: kkb@hhu.edu.cn

征订处: 本刊编辑部

《河海大学学报(社会科学版)》编辑部