

深开挖有限元分析中释放荷载模拟 ——三种常用方法比较及改进的 Mana 法

高俊合 赵维炳 李兴文

(河海大学岩土工程研究所 南京 210098)

摘 要 论述深开挖有限元分析中释放荷载的三种模拟方法——Mana 法、单元应力内插法和位移法。通过实例对比分析指出：位移法精度最高，但程序处理较繁琐；单元应力内插法计算效果最差，编程也不方便；Mana 法概念明确，易于程序处理，但第一级开挖荷载偏大，以致影响以后各级的计算效果。文中对 Mana 法改进后，计算精度明显提高。

关键词 深开挖；有限元分析；释放荷载；结点力；改进的 Mana 法

中图分类号 TU473

影响深开挖有限元分析结果的因素很多^[1,2]，如土体非线性、土-支护结构相互作用、固结、降水和开挖荷载的模拟等。其中，开挖荷载模拟的影响是首要的。如果开挖荷载的模拟不正确，其它一切工作等于白费。

研究者们已提出多种开挖荷载模拟方法，常见诸于文献中的有：Mana 法^[3]、单元应力内插法^[4,5]（以下简称应力法）和由位移直接求结点力法^[6]（以下简称位移法）。这三种方法的坚持者各执一词。究竟哪种方法精度高，哪种方法好，目前尚未有研究报道。本文对这三种方法作了详细对比研究。

1 开挖荷载模拟

若某级开挖之前，开挖面上结点力为 $\{F\}$ ，给该级开挖面上的结点施加与此相反的结点荷载 $-\{F\}$ ，并将挖去的单元从计算网格中删除，即可使开挖面成为应力自由面。再进行有限元计算，即可得到该级开挖完成后的位移场和应力场。由此可见，开挖荷载模拟的实质是如何求挖去的土体对其下结点所产生的结点力。求结点力的常用方法有三种：Mana 法、单元应力内插法和位移法。

1.1 Mana 法

Mana 法的表达式为^[7]

$$\{F\} = \sum_{i=1}^{NE} \int_v [B]^T \{\sigma'\} dv - \int_v [N]^T \gamma dv + \int_v [B]^T \{U\} dv \tag{1}$$

式中：NE——该级开挖面被挖去的单元总数； $[B]$ ——单元应变矩阵； $\{\sigma'\}$ ——单元有效应力矢量； γ ——体力，如渗透力等； $[N]$ ——单元位移形函数； $\{U\}$ ——孔压变化量。

该方法物理概念明确，程序处理简单，但对单元精度要求较高（例如要求用等参单元等）；对于三角形单元，效果不佳。

若采用水土合算，则 Mana 法的表达式简化为

$$\{F\} = \sum_{i=1}^{NE} \int_v [B]^T \{\sigma\} dv \tag{2}$$

式中： $\{\sigma\}$ ——单元总应力矢量；其它符号意义同前。

式(2)中只有 $\{\sigma\}$ 是未知量。对于第一级开挖， $\{\sigma\}$ 即为单元初始应力（一般为自重应力）。

第二级以后的各级开挖，单元应力不再是自重应力，而是有限元计算出的单元应力。

1.2 单元应力内插法

单元应力内插法认为,开挖面上结点力由结点的应力而非由单元应力推算,但是,结点应力却是由相邻单元的中心应力内插求得.故这里称之为单元应力内插法.下面以一个三级开挖的基坑(图1)为例,ACDB,CEFD,EGHF分别为第一、二、三级开挖.

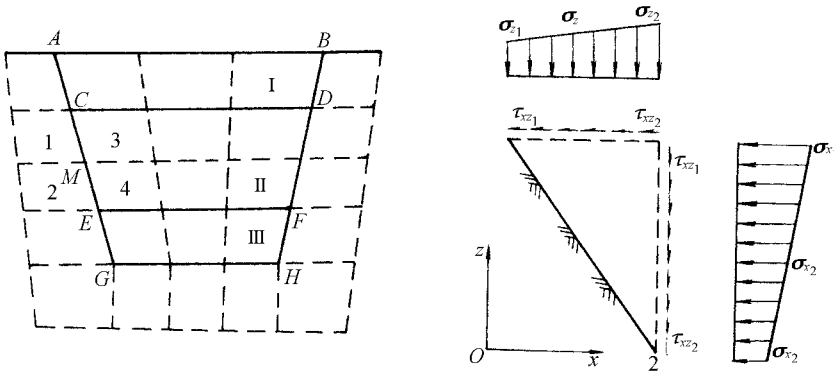


图1 开挖剖面及结点间应力分布

Fig.1 Excavation profile and stress distribution between two nodes

第一级开挖面上结点应力就是各结点的初应力.

第二级开挖面上某点,如M点的应力可由该点周围的四个单元1,2,3,4的应力内求得.取内插函数

$$\sigma = \alpha_1 + \alpha_2 x + \alpha_3 z + \alpha_4 xz \tag{3}$$

式中: $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4$ ——待定系数; x, z ——结点或单元形心的坐标.

将上述四个单元的形心坐标和应力代入上式,得

$$\begin{Bmatrix} \sigma_{x_1} \\ \sigma_{x_2} \\ \sigma_{x_3} \\ \sigma_{x_4} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & x_1 & z_1 & x_1 z_1 \\ 1 & x_2 & z_2 & x_2 z_2 \\ 1 & x_3 & z_3 & x_3 z_3 \\ 1 & x_4 & z_4 & x_4 z_4 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \\ \alpha_4 \end{Bmatrix} \tag{4}$$

则

$$\begin{Bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \\ \alpha_4 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & x_1 & z_1 & x_1 z_1 \\ 1 & x_2 & z_2 & x_2 z_2 \\ 1 & x_3 & z_3 & x_3 z_3 \\ 1 & x_4 & z_4 & x_4 z_4 \end{bmatrix}^{-1} \begin{Bmatrix} \sigma_{x_1} \\ \sigma_{x_2} \\ \sigma_{x_3} \\ \sigma_{x_4} \end{Bmatrix} \tag{5}$$

将M点的坐标及待定系数 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4$ 代入式(3)即可求得 σ_x .同理,可求得M点的 σ_z 和 τ_{xz} .对于开挖面两端点C,D,因其周围不足四个单元,它们的应力可由其下的单元应力外插得到.

各结点应力知道后,假定开挖面上两结点之间的应力成线性分布(见图1),可求得各点的等效结点力:

$$\left. \begin{aligned} F_{x_1} &= \frac{1}{6}[(2\sigma_{x_1} + \sigma_{x_2})(z_1 - z_2) + (2\tau_{xz_1} + \tau_{xz_2})(x_2 - x_1)] \\ F_{x_2} &= \frac{1}{6}[(2\sigma_{x_2} + \sigma_{x_1})(z_1 - z_2) + (2\tau_{xz_2} + \tau_{xz_1})(x_2 - x_1)] \\ F_{z_1} &= \frac{1}{6}[(2\sigma_{z_1} + \sigma_{z_2})(x_1 - x_2) + (2\tau_{xz_1} + \tau_{xz_2})(z_1 - z_2)] \\ F_{z_2} &= \frac{1}{6}[(2\sigma_{z_1} + \sigma_{z_2})(x_1 - x_2) + (2\tau_{xz_2} + \tau_{xz_1})(z_1 - z_2)] \end{aligned} \right\} \tag{6}$$

对开挖面上各段边界循环并叠加,即可求出相应的结点力.

1.3 位移法

对于第一级开挖,结点应力仍为各结点初始应力,通过假定两点之间应力成线性分布,可由式(6)计算出

结点力.

第二级以后的开挖,位移法就不同于单元应力内插法,结点力是根据相应结点的位移量直接求开挖面等效结点力的增量 $\{\Delta F\}_{i-1}$,与该级开挖前等效结点力叠加而得.即第 i 级开挖所要施加的等效结点力为

$$\{F\}_i = \{F\}_0 + \sum_{j=1}^{i-1} \{\Delta F\}_j$$

(7)

式中: $\{F\}_0$ ——初始结点力; $\{\Delta F\}_j$ ——第 j 级开挖所产生的结点力增量.

仍以图 1 所示的三级开挖为例,第二、三级开挖面上初始结点力分别为 $\{F\}_{II0}$ 和 $\{F\}_{III0}$,由于第一级开挖而使第二、三级开挖面上结点所产生的结点力增量分别为 $\{\Delta F\}_{II1}$, $\{\Delta F\}_{III1}$.某结点的结点力增量可由与该点相邻的下面两个单元的劲度矩阵与该点位移增量相乘并叠加得到.即,第二级开挖时开挖面上的等效结点力为

$$\{F\} = \{F\}_{II0} + \{\Delta F\}_{II1}$$

(8)

同样可计算出由于第二级开挖使第三级开挖面上结点产生的结点力增量 $\{\Delta F\}_{III2}$,则第三级开挖时开挖面上的结点力为

$$\{F\} = \{F\}_{III0} + \{\Delta F\}_{III1} + \{\Delta F\}_{III2}$$

(9)

2 实例分析

为对比上述三种方法,以某一深基坑^[8]为例进行分析说明.

2.1 实例概况

基坑地层自上而下依次为粘土、粉土、粉细砂、细砂和中砂.支护结构形式为钻孔灌注桩,桩长 16 m,直径 80 cm,桩顶加一道锁口梁,地表以下 6 m 处设置一道腰梁,共分二级开挖, - 2 m 至 - 6 m(负号表示地表面以下)为第一级开挖, - 6 m 至 - 9.8 m 为第二级开挖.

2.2 有限元分析

有限元计算网格如图 2 所示.土体采用邓肯-张双曲线模型^[5],采用总应力法计算.邓肯模型中的前几个参数 C , φ , k , k_{ur} , n , n_{ur} , R_f 可由三轴固结不排水剪求出,见表 1.由于不排水,泊松比 μ 为定值,取 0.3.灌注桩取为线弹性材料,其弹模 $E = 210 \text{ GPa}$,泊松比 $\mu = 0.1667$.两道圈梁简化为弹簧,其系数为 $k_n = 6000 \text{ kN/m}$.

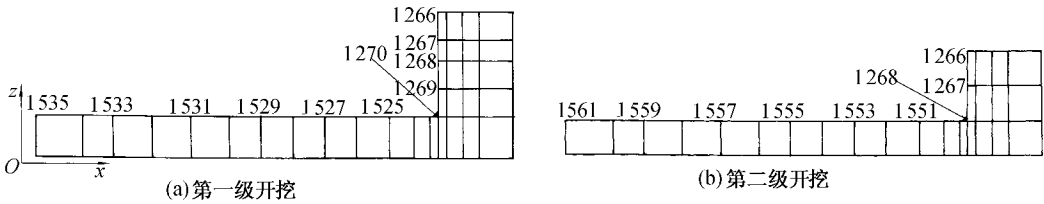


图 2 开挖面及附近计算网格

Fig.2 Excavation profile and the near by calculational mesh

表 1 土体邓肯参数

Table 1 Parameters of Duncan model

土层	C/kPa	φ/kPa	k	n	R_f	k_{ur}	n_{ur}
粉土	1.64	29.1	150.8	0.69	0.87	165.6	1.05
粉砂	2.30	31.0	254.1	0.75	0.96	198.8	1.10
中砂	1.20	33.2	521.0	0.84	0.98	517.5	1.17

2.3 开挖释放荷载计算

分别采用上述三种方法模拟开挖面上荷载释放. Mana 法由式(2)直接求开挖面结点力.单元应力内插法和位移法与前面的放坡开挖稍有不同.位于支护桩上的结点的结点应力不能由该结点周围四个单元(两个土单元和两个桩单元)的应力内插,而由该结点以下两个土单元外插求得.因为开挖荷载是由挖去的土体产生而非土和桩共同产生.否则,这些结点的开挖荷载明显偏大,支护桩的位移也偏大.

位移法也存在类似的问题,支护桩上的几个结点的结点力增量,应由结点左边两个土单元的刚度矩阵与该点位移相乘并叠加而得,否则,释放荷载偏小.

三种方法计算的开挖面上各结点的结点力列于表2中.

表2 第一级开挖面结点力
Table 2 Nodal force on the first excavation profile

方法	结点力	1266	1267	1268	1551	1553	1555	1557	1559	1561
Mana 法	F_x	29.65	78.62	48.96	0.000 1	0.000 1	0.000 1	0.000 1	0.001	0.00
	F_z	17.79	11.59	-29.38	-352.55	-489.65	-489.65	-489.65	-489.65	-244.83
应力法	F_x	0.0	38.62	32.18	32.18	32.18	32.18	32.18	32.18	32.18
	F_z	0.0	-11.59	-23.17	-278.06	-386.20	-386.20	-386.20	-386.20	-193.10
位移法	F_x	0.0	38.62	32.18	32.18	32.18	32.18	32.18	32.18	32.18
	F_z	0.0	-11.59	-23.17	-278.06	-386.20	-386.20	-386.20	-386.20	-193.10

注:1266,1267,1268等为开挖面结点号,其中1266~1270号位于桩上,自上而下分布,1525~1535号沿坑底自右向左间隔排列,以下各表类似,详见图2.

表3 第二级开挖面结点力
Table 3 Nodal force on the second excavation profile

方法	结点力	1268	1269	1270	1525	1527	1529	1531	1533	1535
Mana 法	F_x	99.85	150.84	58.45	-50.47	-3.54	-1.08	-0.94	-0.43	0.00
	F_z	88.90	101.07	-8.53	-321.84	-386.61	-385.93	-386.24	-386.27	-193.13
应力法	F_x	0.00	108.95	77.22	123.22	97.33	91.50	90.67	85.65	0.00
	F_z	0.00	-98.55	-86.68	-474.84	-597.79	-592.31	-592.69	-595.61	-301.46
位移法	F_x	0.00	-2.12	57.18	116.57	136.67	137.73	134.68	131.91	0.00
	F_z	0.00	104.35	106.41	16.25	24.72	19.60	18.12	11.61	3.92

3 三种方法比较

3.1 开挖荷载大小

由表2可见,三种方法计算的水平向结点力(F_x)都远小于竖直向结点力(F_z),而Mana法的垂直开挖面上(即桩体上)几个结点,如1266,1267和1268的水平结点力(F_x)稍大一些,但水平开挖面上的结点力则很小,甚至为零.第二级开挖三种方法的水平向结点力均有所增加,甚至与竖直向的结点力相当(如位移法).竖直向结点力,以Mana法最大,位移法最小.

3.2 支护桩位移

三种方法计算的支护桩水平位移见图3.由图可见,Mana法和位移法的结果较接近实际观测值,只是第二级开挖Mana法算出的桩体顶部位移量偏大,位移法算出的桩体顶部位移量偏小,单元应力内插法算出的位移量明显偏大.

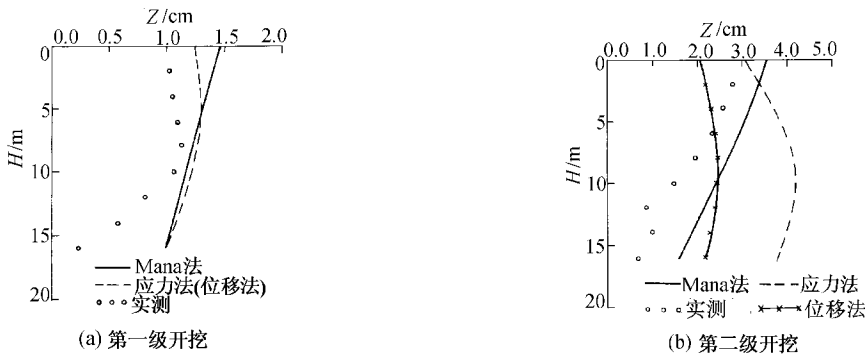


图3 桩体位移(Z表示位移,H表示深度)

Fig.3 Displacement of pile(Z—displacement,H—depth)

3.3 基坑外侧地面沉降

三种方法的基坑外侧地面沉降对比见图 4 ,不同开挖荷载计算方法对地面沉降的影响似乎没有对支护桩位移的影响那么大. 单元应力内插法的计算值稍大些 ,位移法较接近实测值 ,而 Mana 法偏小.

3.4 基坑底部隆起

与地面沉降相比 ,基坑底部隆起对开挖荷载计算方法的反应灵敏得多(图 5). 很明显 ,第一级开挖 Mana 法比其他方法隆起量大 ,而第二级 ,应力法明显比 Mana 法和位移法的隆起量大. 由于没有实际观测值作对比 ,不好说哪一种最精确 ,但由这三种方法算出的结点力(表 2) ,可以判断出应力法的结果偏大 ,而位移法和 Mana 法较准确些.

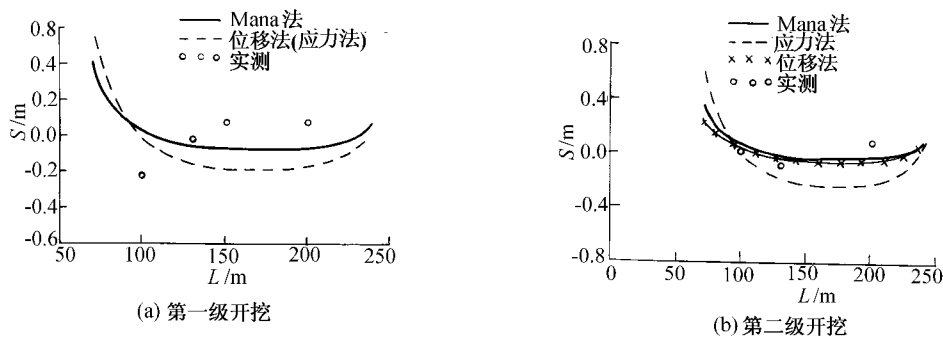


图 4 基坑外侧地面沉降(S 表示沉降量 , L 表示距离)
Fig.4 Grounds settlement of external pit(S —settlement , L —distance)

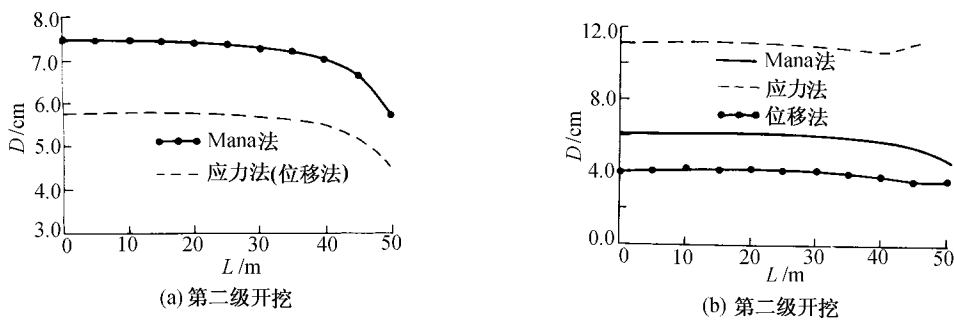


图 5 基坑底部隆起(D 表示隆起量 , L 表示距离)
Fig.5 Heave of foundation pit(D —heave , L —distance)

4 讨 论

从以上分析可以看出 :第一级开挖 ,三种方法的计算结果相差不大 ;第二级开挖 ,三种方法差别很大 ,尤其是桩体位移较突出. 这是因为在第一级开挖时 ,三种方法(实际上 ,后两种方法一致)用来计算结点力的单元应力或结点应力都是精确的(即自重应力) ,故求得的结点力差别不会太大. 而第二级以后结点力的求法就完全不同了. Mana 法用的是应变矩阵的转置矩阵乘上单元中心应力. 众所周知 ,有限元法直接求得的是单元中心应力 ,这是精确值. 相应地 ,Mana 法的结果是精确的 ,至少不会有大的误差. 而单元应力内插法须由单元应力内插近似地求结点应力 ,再假定两点之间的应力成线性分布 ,进而求结点力. 可见 ,单元应力内插法用到两次近似或假定 ,因此求得的结点力只能是不准确的 ;位移法在求结点力的过程中没有任何假定 ,其结果不会有大的误差.

5 改进的 Mana 法

从以上分析可以看出 ,Mana 法计算的桩体顶部位移明显比其他方法及实际观测值大 ,这是因为 ,若开挖

前地基处于自重应力状态(通常深基坑都如此),地表处的结点力应该为零,而 Mana 法计算的结点力却不为零(表 2 中的 1266 和 1268 结点),故结果偏大.理论上讲,第二级开挖,Mana 法计算的结点力应该是精确的,但桩体顶部位移仍然偏大.笔者认为,这是由于第一级结果的影响.所以,在用 Mana 法时,第一级开挖应该用各结点的自重应力直接求结点力,而第二级及以后的各级开挖再用 Mana 法.为验证这种改进的 Mana 法,对以上的实例再进行计算.桩体位移计算结果如图 6,对比实测值及较精确的位移法结果,发现改进后的 Mana 法计算结果有明显改观,桩体顶部位移更接近实测值.

6 结 语

开挖释放荷载的模拟对有限元分析相当重要.文中论述的三种方法,以位移法精度最高,但程序处理较繁琐;单元应力内插法计算效果最差,编程也不方便;Mana 法概念明确,易于程序处理,精度也较高,但第一级开挖荷载偏大,以致影响以后各级的计算效果,文中对其作了改进,改进后的 Mana 法精度明显提高.

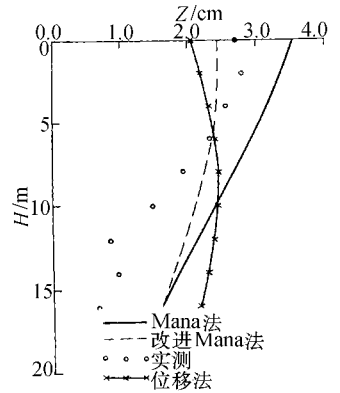


图 6 改进的 Mana 法计算的桩体位移过程 (Z 表示位移量, H 表示深度)
Fig.6 Pile displacement of the modified Mana method
(Z—displacement, H—depth)

参 考 文 献

- 1 Tusi Y, Cheng Y K. A fundamental study of braced excavation construction. *Computers and Geotechnics*, 1989, 8: 39 ~ 64
- 2 高俊合, 赵维炳, 施建勇. 土体非线性影响的深基坑支护研究综述. *水利水电科技进展*, 1994, 17(4): 14 ~ 17
- 3 Mana A I, Clough G W. Prediction of movements for braced cuts in clay. *Journal of Geotechnical Engineering Division*, 1981, 107: 759 ~ 778
- 4 Kulhaway F H. 填方与挖方. 见: 德赛 C S, 克里斯琴 J T 主编. 卢世深等译. *岩土工程数值法*. 北京: 中国建筑工业出版社, 1981. 383 ~ 386
- 5 钱家欢, 殷宗泽. *土工数值分析*. 北京: 中国铁道出版社, 1991. 214 ~ 218
- 6 Chandrasekaran V S, King G J. Simulation of excavation using finite elements. *Journal of Geotechnical Engineering Division*, 1974, 100 (GT9): 1086 ~ 1089
- 7 Ou C Y, Chiou D C, Wu T S. Three-dimension finite element analysis of deep excavation. *Journal of Geotechnical Engineering*, 1996, 122 (5): 337 ~ 345
- 8 赵维炳, 高俊合, 施建勇. 软土深基坑施工中深层土体水平位移测试. *大坝观测与土工测试*, 1997, 21(4): 31 ~ 34

Simulation of Unloading due to Excavation in F.E. Analysis —Modified Mana Method Based on Comparison of Three Methods

Gao Junhe Zhao Weibing Li Xingwen

(Research Institute of Geotechnical Engineering, Hohai Univ., Nanjing 210098)

Abstract In this paper, three methods for simulating the unloading due to excavation such as the displacement method, the stress method and the Mana method are compared in detail. It is shown that the accuracy of the displacement method is the best, but its computational program is complex; the accuracy of the stress method is the worst and program is difficult; the concept of the Mana method is precise, and it is easy to program, but the load for the first-stage excavation is on the large side and affects the accuracy of calculation for the excavation that follows. Finally an improved Mana method is presented.

Key words deep excavation; FEM; unloading; nodal force; modified Mana method