

破开算子法用于二维流场计算的误差分析

胡庆云

(河海大学数学物理系 南京 210098)

摘 要 对破开算子法应用于二维流场计算时由于将算子分裂和分步计算造成的误差进行了分析研究. 首先介绍分步误差概念和推求方法, 然后, 对流场计算中若干典型的破开格式, 在不同算例下, 计算出对应的分步误差值, 再与数值验证相对照, 结果吻合. 结论是: 在地形变化复杂, 流场流态改变剧烈时, 要慎用破开算子法. 对破开算子法在二维流场计算中的应用和改进有明确的指导意义.

关键词 破开算子法; 浅水波方程; 分步误差; 中间变量

中图号 TV13

破开算子法是苏联学者 Yanenko 等人于 50 年代中期提出^[1]. 在我国, 使用破开算子法计算实际水流问题, 是在 80 年代初^[2]. 此后, 大量运用该法的文章见于各种文献报道. 在破开算子法的基础上, 提出了各种不同的分步算法. 例如: 分步有限差分法、分步杂交法、准解析法等.

然而, 破开算子法并不是对所有问题都是行之有效的. 文献 3 指出, 当计算的时步长 Δt 较大时, 沿坐标轴向分步将产生轴化效应. 文献 4 在研究苏州河口整治问题时, 由于流场流态变化过于剧烈, 不得不使用不分步的计算法.

分步有可能导致较大误差, 文献 5 对此进行了专门研究, 提出了分步误差和比较方程等概念. 分步误差指由于算子分裂、分步计算引起的额外的截断误差项. 以往研究者认为它是高阶微量, 可以忽略. 可是, 对于具体实际问题, 固定的计算时步长 Δt , 分步误差不一定是微量. 不分步计算模型的截断误差, 一般是方程的精确解关于时间变量或空间变量的导数项组成, 有明确的物理意义可寻, 对此已有一些研究成果. 破开算子法计算模型的截断误差, 在计算上的困难是含有中间变量. 中间变量是联系分步计算格式的过渡值, 没有具体的物理意义, 在算子非线性情形, 中间变量不能关于未知解函数显式地解开. 文献 5 将破开格式的截断误差处理为不分步计算模型的截断误差与分步误差之和. 这两种截断误差, 由于其产生的途径不一, 对近似解的影响也就不同.

本文除介绍用破开算子法求解浅水波方程的分步误差计算法外, 还将用不同的破开格式、在不同算例下计算出的分步误差值与数值验证相对照, 所得结果对破开算子法在二维流场计算中的应用和改进有明确的指导意义.

1 分步误差推导

设 L 是满足如下性质的非线性算子 $LQ = I(Q, Q)$:

(i) 关于第二个作用是线性的, 即

$$I(u, \alpha v + \beta w) = \alpha I(u, v) + \beta I(u, w) \quad \alpha, \beta \in R^1 \quad (1)$$

(ii) 关于第一个作用, 存在泛函 B , 使任意函数 A 有

$$I(u + A \cdot \Delta t, v) = I(u, v) + B(u, A, v) \cdot \Delta t \quad (2)$$

例如: $Lu = u \frac{\partial u}{\partial x}$, 因为导数项的变化较大, 取 $\frac{\partial}{\partial x}$ 为第二个作用, 它是线性的, 满足性质(i). 在函数 u 的变化不大时, L 的非线性作用, 可作局部线性化处理, 即视 $\frac{\partial}{\partial x}$ 前的 u 是已知系数, 把 $\frac{\partial}{\partial x}$ 前的系数作为第一个作

用 则 $\frac{\partial}{\partial x}$ 前关于系数 u 的作用满足性质(ii).

设有偏微分方程：

$$\frac{\partial Q}{\partial t} = (L_1 + L_2)Q \tag{3}$$

式中 L_i ——满足性质(i)(ii)的非线性算子 ($i = 1, 2$); Q ——待求的未知解函数.

现考虑带有一个权系数的形式更广泛的破开算子法：

$$(Q^{n+1/2} - Q^n)/Dt = \beta L_1(Q^n, Q^{n+1/2}) + (1 - \beta)L_2(Q^n, Q^n) \tag{4}$$

$$(Q^{n+1} - Q^{n+1/2})/Dt = (1 - \beta)L_1(Q^{n+1/2}, Q^{n+1/2}) + \beta L_2(Q^{n+1/2}, Q^{n+1}) \tag{5}$$

其中 $0 \leq \beta \leq 1$. 当 $\beta = 1$ 时, 是一般文献报道中常见的破开算子法; 当 $\beta = 1/2$ 时, 就是 ADI 法.

由式(4)推知：

$$Q^{n+1/2} = Q^n + A \cdot Dt \tag{6}$$

其中 $A = \beta L_1(Q^n, Q^{n+1/2}) + (1 - \beta)L_2(Q^n, Q^n)$

据性质(ii)：

$$L_i(Q^{n+1/2}, Q) = L_i(Q^n + A \cdot Dt, Q) = L_i(Q^n, Q) + B(Q^n, A, Q) \cdot Dt \quad (i = 1, 2)$$

代入式(5), 经整理得

$$\begin{aligned} (Q^{n+1} - Q^{n+1/2})/Dt &= (1 - \beta)L_1(Q^n, Q^{n+1/2}) + \beta L_2(Q^n, Q^{n+1}) + \\ &((1 - \beta)B(Q^n, A, Q^{n+1/2}) + \beta B(Q^n, A, Q^{n+1})) \cdot Dt \end{aligned} \tag{7}$$

式(4)+(7)得

$$\begin{aligned} (Q^{n+1} - Q^n)/Dt &= L_1(Q^n, Q^{n+1/2}) + L_2(Q^n, \beta Q^{n+1} + (1 - \beta)Q^n) + \\ &((1 - \beta)B(Q^n, A, Q^{n+1/2}) + \beta B(Q^n, A, Q^{n+1})) \cdot Dt \end{aligned} \tag{8}$$

$(1 - \beta) \times$ 式(4) $- \beta \times$ 式(7)并解出 $Q^{n+1/2}$, 为了和式(6)区别, 记为 $Q_*^{n+1/2}$,

$$\begin{aligned} Q_*^{n+1/2} &= \beta Q^{n+1} + (1 - \beta)Q^n + Dt \cdot L_2(Q^n, (1 - \beta)^2 Q^n - \beta^2 Q^{n+1}) - \\ &Dt^2 \cdot \beta((1 - \beta)B(Q^n, A, Q^{n+1/2}) + \beta B(Q^n, A, Q^{n+1})) \end{aligned} \tag{9}$$

式(9)代入式(8)中得

$$(Q^{n+1} - Q^n)/Dt = (L_1 + L_2)(Q^n, \beta Q^{n+1} + (1 - \beta)Q^n) + E_1 + E_2 \tag{10}$$

其中 $E_1 = Dt \cdot L_1(Q^n, L_2(Q^n, (1 - \beta)^2 Q^n - \beta^2 Q^{n+1}))$

$$\begin{aligned} E_2 &= Dt \cdot ((1 - \beta)B(Q^n, A, Q^{n+1/2}) + \beta B(Q^n, A, Q^{n+1})) - \\ &Dt^2 \cdot \beta L_1(Q^n, (1 - \beta)B(Q^n, A, Q_*^{n+1/2}) + \beta B(Q^n, A, Q^{n+1})) \end{aligned}$$

式(10)是与破开格式(4)(5)等效的不分步差分格式[比较方程^[5]]与微量 $E_1 + E_2 = O(Dt)$ 之和的形式. 我们把微量 $E_1 + E_2$ 称为分步误差. 在 L_1, L_2 线性的假定下, $E_2 = O$ [参见文献[5]], 式(10)不含有中间变量 $Q^{n+1/2}$. 一般情形, $E_2 \neq 0$, E_2 中含有 $Q^{n+1/2}$. 记(6)式确定的中间变量 $Q^{n+1/2} = G_1(Q^n)$, 式(9)确定的中间变量 $Q_*^{n+1/2} = G_2(Q^n, Q^{n+1})$, 其中 G_1, G_2 是隐函数, 一般用迭代法解出. 当 Q^{n+1} 取解 Q 在 $(n + 1)Dt$ 时的精确解时, 有可能 $Q^{n+1/2} \neq Q_*^{n+1/2}$. 因为 $Q^{n+1/2} = G_1(Q^n)$ 与式(6)等价, $Q_*^{n+1/2} = G_2(Q^n, Q^{n+1})$ 与式(9)等价, 根据不同消元过程所需公式确定 E_2 中的中间变量 $Q^{n+1/2}$.

2 二维流场的误差分析与数值验证

对二维浅水波方程的三种常见破开方式, 按坐标轴向破开^[2]记为 $P1$, 按物理意义破开^[3]记为 $P_{\chi(1)}$, ADI 格式记为 $A1$, 计算出相对分步误差值(表 1). 相对分步误差值指分步误差与控制项比的最大值. 控制项指参与微分方程中的某个起主要作用的项, 即从数值上看较大的那一项.

笔者的计算是对下述三个算例在恒定流下进行的. 取一个长为 2 400 m, 宽为 200 m, 下游水位比上游低 0.2 m, 河底糙率 $n = 0.0025$ 的顺直河道. 对这个河道的河底地形分三种情况就构成了三个算例. 算例 1, 在一浅的矩形截面棱柱形河道中加深“Z”字形河沟; 算例 2, 对称抛物形截面的棱柱形河道; 算例 3, 在一矩形截面的棱柱形河道中端, 建一埋于水下的丁坝. 表 1 是三种常见算法在各算例下的相对分步误差值.

表 1 各算例的相对分步误差值

Table 1 The value of step-by-step relative errors in all calculating examples

算例	计算时步长 $\Delta t/s$	P1			A1			$D_{X(1)}$		
		EG_z	EG_u	EG_v	EG_z	EG_u	EG_v	EG_z	EG_u	EG_v
1	5	0.0287	3.1512	0.1570	0	0.0208	0.0042	0	0.0968	0.0610
	15	0.0860	9.4479	0.2466	0	0.0623	0.0126	0	0.2841	0.1806
	30	0.1720	18.8824	0.2572	0	0.1247	0.0251	0	0.5411	0.3549
2	5	0.0393	0.0312	0.0701	0	0.0001	0.0019	0	0.0374	0.0701
	15	0.1178	0.0936	0.2104	0	0.0002	0.0057	0	0.1122	0.2101
	30	0.2355	0.1872	0.4209	0	0.0005	0.0115	0	0.2242	0.4205
	60	0.4701	0.3743	0.8417	0	0.0010	0.0230	0	0.4479	0.8410
	150	1.1690	0.9356	2.1054	0	0.0025	0.0575	0	1.1153	2.1026
3	5	0.0500	0.7976	0.3145	0	0.0183	0.0022	0	0.0503	0.0638
	15	0.1500	2.3954	0.5437	0	0.0550	0.0065	0	0.1427	0.1471
	30	0.3000	4.7980	3.5268	0	0.1101	0.0130	0	0.2788	0.3046
	60	0.6002	9.6193	*	0	0.2202	0.0259	0	0.5265	0.7133
	150	1.5019	24.1506	*	0	0.5505	0.0648	0	1.4243	1.4677

注： EG_z 是连续方程的相对分步误差值； EG_u 、 EG_v 分别是 u 动量方程和 v 动量方程的相对分步误差值；* 表示误差值超过 100。

对以上三个算例,分别用不同的算法,在上述时步长 Δt 下,计算其流场。相应于 P1 和 $P_{X(1)}$ 的比较方程^[4],记为 PN。A1 算法对算例 1,在 $\Delta t \leq 45$ s 稳定。对算例 3,在 $\Delta t \leq 60$ s 稳定。各种算法对不同计算时步长 Δt 下,计算出的流场与对应的算法在 $\Delta t = 5$ s 时的流场比较,取最大流速差,然后,再关于不同 Δt 的最大流速差取算术平均值,得表 2。

算例 1 和算例 3 的流场图见图 1、图 2。各算法对算例 2 绘出的流场图均较理想。

表 2 最大流速差

Table 2 Maximum difference of flow velocity

算例	P1	$P_{X(1)}$	A1	PN
1	0.3751	0.0800	0.0006	0.0001
2	0.0078	0.0005	0.0001	0.000076
3	0.3812	0.2449	0.0012	0.0009

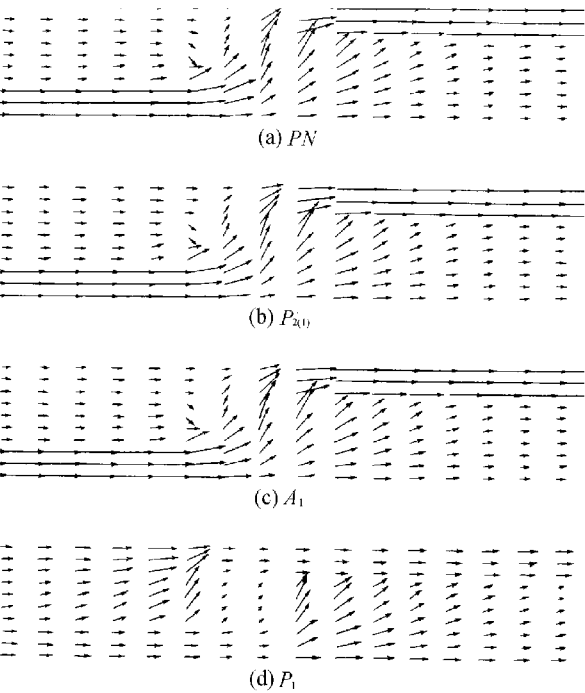


图 1 算例 1 的流场 ($\Delta t = 30$ s)

Fig.1 The flow field of calculating example 1 ($\Delta t = 30$ s)

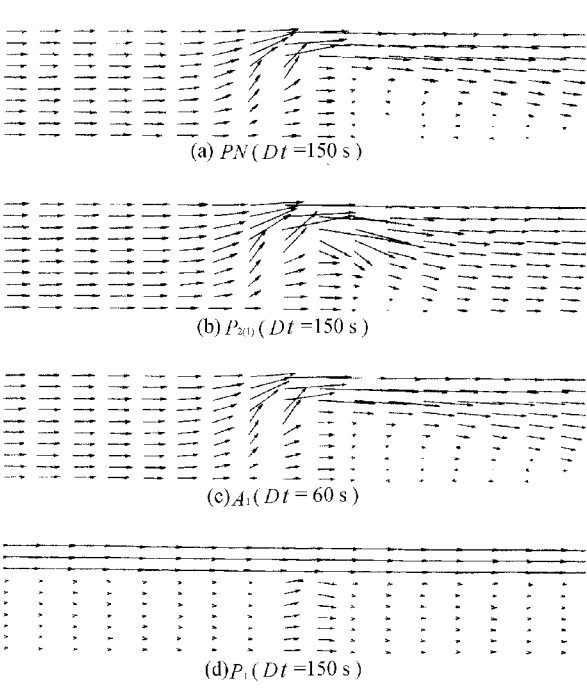


图 2 算例 3 的流场

Fig.2 The flow field of calculating example 3

由以上图表可见,对应于较大分步误差值的算法,其流速差也较大,流场图也不合理。算例 1 和算例 3,最大分步误差的取值点与最大流速差的取值点都发生在地形改变剧烈处。算例 2,地势变化平缓,这些点呈

随机分布.数值验证的结论与分步误差值的分析是吻合的.

3 结 束 语

一个破开格式可以看成是一个不分步差分格式(比较方程)与一个微量(分步误差)和的形式.以往研究者认为 ,分步误差与比较方程相比 ,是一个高阶微量.然而 ,这种认识是基于一种形式上的推导.事实上 ,究竟是不是“ 微量 ”,还取决于计算时步长 Δt 前的系数.在解决实际问题时 , Δt 总是固定的 ,很多情况下 ,并不能取得很小 ,破开算子法舍去的分步误差是不是“ 微量 ”就值得怀疑.本文研究表明 ,在地形变化复杂处 ,对有些破开格式 ,分步误差可能很大 ,甚至于不太大的 Δt 亦是远超过方程的控制项.因而 ,得到的数值解背离物理事实.分步误差的研究和计算 ,在破开格式的算法比较和改进上 ,具有明显的指导意义.

参 考 文 献

1 Yanenko N N. Methode apas fractionnaires. Armand Colin , 1968. 63 ~ 77
2 何少岑 林秉南. 破开算子法在二维潮流计算中的应用. 海洋学报 , 1984 (2) : 261 ~ 271
3 王船海 程文辉. 河道二维非恒定流计算. 河海大学学报 , 1987 , 15 (3) : 39 ~ 53
4 王船海 ,程文辉. 河道二维非恒定流场计算方法研究. 水利学报 , 1991 (1) : 10 ~ 17
5 胡庆云 王船海 李光炽等. 破开算子法的误差研究. 河海大学学报 , 1993 , 21 (1) : 110 ~ 113

Error Analysis for Operator Splitting Method Used for
Two-Dimensional Flow Pattern Calculation

Hu Qingyun

(Dept. of Mathematics and Physics , Hohai Univ. , Nanjing 210098)

Abstract Analyzed in this paper is operator splitting and step-by-step calculation-induced error in the operator splitting method used for two-dimensional flow pattern calculation. The step-by-step error and its estimating method are introduced first , and then the values of the step-by-step error corresponding to different calculating examples by using some typical splitting forms are calculated. The main conclusion is that the operator splitting method should be used carefully where the variation of flow patterns is violent. The results presented in the paper have distinct significance for application and modification of the operator splitting method for two-dimensional flow pattern calculation.

Key words operator splitting method ; shallow wave equation ; step-by-step error ; middle-variable