

连续参数集值下鞅的收敛定理*

朱永忠

(河海大学数学物理系 南京 210098)

摘 要 首先给出了连续参数集值下鞅的定义. 继而证明了连续参数集值下鞅的三个等价定理 :

(a) $\mathcal{B}_{\text{wkc}}^A(X)$ 值下鞅等价于任给 $\tau_1 < \tau_2, \tau_1, \tau_2 \in T, \int_{\Omega} F_{\tau_1} dP \subset \int_{\Omega} F_{\tau_2} dP$ (b) $\mathcal{B}_{\text{fc}}^A(X)$ 值下鞅等价于任给 $s, t \in R_+, s < t, S_F^1(\mathcal{F}_s) \subset \text{cl}\{E(g | \mathcal{F}_s), g \in S_F^1(\mathcal{F}_t)\}$ (c) X^* 可分时, 闭凸集值下鞅等价于任给 $s, t \in R_+, s < t, A \in \mathcal{F}_s, \text{cl} \int_A F_s dP \subset \text{cl} \int_A F_t dP$. 最后给出了弱紧凸集值随机集族的弱收敛定理和 X 有 RNP, X^* 可分时, 闭凸集值右连续下鞅的弱收敛定理.

关键词 弱紧凸集, 闭凸集, 连续参数, 集值下鞅, 收敛定理

中图号 O211.6

1 概念和记号

设 $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ 为一完备的概率空间, X 为实可分的 Banach 空间, 范数为 $\|\cdot\|$, 对偶空间为 X^* , 记

$$P_{(w)kc}(X) = \{A \subset X; A \text{ 非空 (弱) 闭 (凸)}\}$$
$$P_{(w)kc}(X) = \{A \subset X; A \text{ 非空 (弱) 紧 (凸)}\}$$

对于任意的 $A \in P(X)$, 记

$$\|A\| = \sup\{\|x\|; x \in A\}$$
$$\mathcal{B}(X) = \{F \in P(X) \text{ a.e.}; F \text{ 可测且 } E\|F\| < \infty\}$$
$$\mathcal{B}_{\text{fc}}(X) = \{F \in P_{\text{fc}}(X) \text{ a.e.}; F \in \mathcal{B}(X)\}$$
$$\mathcal{B}_{\text{wkc}}^A(X) = \{F \in P_{\text{wkc}}(X) \text{ a.e.}; F \in \mathcal{B}(X)\}$$

对于任意的 $x^* \in X^*, A \in P(X)$ 称

$$\sigma(x^*, A) = \sup\{x^*, x; x \in A\}$$

为 A 的支撑函数.

如果 $F: \Omega \rightarrow P(X)$ 为随机集, 则 F 的积分为

$$\int_{\Omega} F dP = \{ \int_{\Omega} f dP; f \in S_F^1 \}$$

其中 $\int_{\Omega} f dP$ 为 Bochner 积分, $L^1(\Omega, X)$ 是 $\Omega \rightarrow X$ 的 Bochner 可积映射全体, $S_F^1 = \{f \in \mathcal{B}(\Omega, X); f(\omega) \in F(\omega) \text{ a.e.}\}$.

设 F 为随机集, 若有一随机集 $\mathcal{A}(F/\mathcal{F})$ 记为 G 满足

$$S_{\mathcal{A}(\mathcal{F})}^1 = \text{cl}\{E(f/\mathcal{F}); f \in S_F^1\}$$

则称 $\mathcal{A}(F/\mathcal{F})$ 为随机集 F 关于 $\mathcal{F}$ 的条件期望.

2 连续参数集值下鞅

$\{\mathcal{F}_t; t \in R_+ = [0, \infty)\}$ 为 $\mathcal{F}$ 的上升子 σ 域流, 满足通常条件 :

收稿日期 :1997-05-04
作者简介 朱永忠, 男, 讲师, 概率统计专业, 主要从事统计及随机过程研究.
* 河海大学青年科学基金资助项目.

(a) $\forall s, t \in R_+, s \leq t$, 有 $\mathcal{F}_s \subset \mathcal{F}_t$;

(b) $\mathcal{F}_0$ 包含 $\mathcal{F}$ 中一切 P 零测集;

(c) $\forall t \in R_+$, 有 $\mathcal{F}_t = \bigcap_{u>t} \mathcal{F}_u$.

T 为所有简单停时全体.

随机集族 $\{F_t; t \in R_+\}$ 若有 $\alpha(x^*, F_t) \rightarrow \alpha(x^*, F), t \rightarrow \infty$ a.e., $\forall x^* \in X^*$, 则称 $\{F_t; t \in R_+\}$ 弱收敛于 F , 记为 $F_t \xrightarrow{w} F$ a.e..

定义1 适应族 $\{F_t, \mathcal{F}_t; t \in R_+\}$ 为闭凸集值随机集族, 且 $E \|F_t\| < \infty$, 若对任意 $s, t \in R_+$, 当 $s < t$ 时, 有

$$F_s \subset \mathcal{A}(F_t/\mathcal{F}_s) \quad (\text{a.e.})$$

则称 $\{F_t, \mathcal{F}_t; t \in R_+\}$ 为连续参数闭凸集值下鞅.

定理1 $\mathcal{L}_{\text{wkc}}(X)$ 值适应族 $\{F_t, \mathcal{F}_t; t \in R_+\}$ 为下鞅的充要条件为: 任给 $\tau_1 < \tau_2, \tau_1, \tau_2 \in T$, 有

$$\int_{\Omega} F_{\tau_1} dp \subset \int_{\Omega} F_{\tau_2} dp$$

证明 “必要性”: 任给 $x^* \in X^*$, 由于 $\{\alpha(x^*, F_t); t \in R_+\}$ 为实值下鞅, 故有

$$\int_{\Omega} \alpha(x^*, F_{\tau_1}) dp \leq \int_{\Omega} \alpha(x^*, F_{\tau_2}) dp$$

由文献[6]中性质3.4有 $\alpha(x^*, \int_{\Omega} F_{\tau_1} dp) \leq \alpha(x^*, \int_{\Omega} F_{\tau_2} dp)$, 又 $F_t \in \mathcal{L}_{\text{wkc}}(X)$ 及文献[6]中性质3.1的推论有 $\int_{\Omega} F_t dp \in P_{\text{wkc}}(X)$, 从而有 $\int_{\Omega} F_{\tau_1} dp \subset \int_{\Omega} F_{\tau_2} dp$.

“充分性”: 任给 $s, t \in R_+, s < t, A \in \mathcal{F}_s$, 令

$$\tau_2(\omega) = t \quad \tau_1(\omega) = \begin{cases} s & \omega \in A \\ t & \omega \notin A \end{cases}$$

则 $\tau_1, \tau_2 \in T$, 且 $\tau_1 \leq \tau_2$, 及

$$\int_{\Omega} F_{\tau_1} dp = \int_A F_s dp + \int_{A^c} F_t dp \quad \int_{\Omega} F_{\tau_2} dp = \int_A F_t dp + \int_{A^c} F_t dp$$

从而 $\forall x^* \in X^*$, 有

$$\alpha(x^*, \int_{\Omega} F_{\tau_1} dp) = \alpha(x^*, \int_A F_s dp) + \alpha(x^*, \int_{A^c} F_t dp)$$

$$\alpha(x^*, \int_{\Omega} F_{\tau_2} dp) = \alpha(x^*, \int_A F_t dp) + \alpha(x^*, \int_{A^c} F_t dp)$$

又

$$\alpha(x^*, \int_{\Omega} F_{\tau_1} dp) \leq \alpha(x^*, \int_{\Omega} F_{\tau_2} dp)$$

故有

$$\alpha(x^*, \int_A F_s dp) \leq \alpha(x^*, \int_A F_t dp)$$

由于 $F_t \in \mathcal{L}_{\text{wkc}}(X)$, 有

$$\int_A F_t dp \in P_{\text{wkc}}(X)$$

从而有

$$\int_A F_s dp \subset \int_A F_t dp$$

又由 A 的任意性即得

$$F_s \subset \mathcal{A}(F_t/\mathcal{F}_s) \quad (\text{a.e.})$$

定理2 $\mathcal{L}_{\text{fc}}(X)$ 值适应族 $\{F_t, \mathcal{F}_t; t \in R_+\}$ 为下鞅的充要条件为: $\forall s, t \in R_+, s < t$, 有:

$$S_{\mathcal{F}_s}^1(\mathcal{F}_s) \subset \text{cl}\{E(g/\mathcal{F}_s); g \in S_{\mathcal{F}_t}^1(\mathcal{F}_t)\}.$$

证明 由 $\{F_t, \mathcal{F}_t; t \in R_+\}$ 为下鞅当且仅当任给 $s, t \in R_+, s < t, F_s \subset \mathcal{A}(F_t/\mathcal{F}_s)$. 另外, $F_s \subset \mathcal{A}(F_t/\mathcal{F}_s)$ 的充要条件为 $S_{\mathcal{F}_s}^1(\mathcal{F}_s) \subset S_{\mathcal{F}_t}^1(\mathcal{F}_t)$ 其中 $G = \mathcal{A}(F_t/\mathcal{F}_s)$.

由文献[5]中的式(5.6)有

$$S_{\mathcal{G}}^1(\mathcal{F}_s) = \text{cl}\{E(g/\mathcal{F}_s); g \in S_{\mathcal{F}_t}^1(\mathcal{F}_t)\}$$

于是可知: $\{F_t, \mathcal{F}_t; t \in R_+\}$ 为下鞅的充要条件是任给 $s, t \in R_+$, 当 $s < t$ 时有

$$S_{F_s}^1(\mathcal{F}_s) \subset \text{cl}\{E(g/\mathcal{F}_s); g \in S_{F_t}^1(\mathcal{F}_t)\}$$

定理3 X^* 可分, $\forall t \in R_+$, F_t 为闭凸集值可积有界随机集, 则 $\{F_t, \mathcal{F}_t; t \in R_+\}$ 为下鞅当且仅当任给 $s, t \in R_+, s < t, \forall A \in \mathcal{F}_s$, 有

$$\text{cl} \int_A F_s dp \subset \text{cl} \int_A F_t dp$$

证明 因 X^* 可分, F_t 为闭凸集值可积有界随机集, 由文献 [5] 中的定理 5.4(4°) 可知 $\mathcal{A}(F_t/\mathcal{F}_s)$ 由下式唯一确定:

$$\forall A \in \mathcal{F}_s \quad \text{cl} \int_A \mathcal{A}(F_t/\mathcal{F}_s) dp = \text{cl} \int_A F_t dp$$

又由文献 [5] 中的引理 4.4 可知 $S_G^1 \supset S_{F_s}^1$ 当且仅当 $\text{cl} \int_A F_s dp \subset \text{cl} \int_A F_t dp$, 于是结论得证, 其中 $G = \mathcal{A}(F_t/\mathcal{F}_s)$.

3 收敛定理

定义2 随机集族 $\{F_t, t \in R_+\}$ 如果满足任给 $t \in R_+, \forall x^* \in X^*$, 有 $\lim_{s \uparrow t} \sigma(x^*, F_s) = \sigma(x^*, F_t)$, 则称 $\{F_t, t \in R_+\}$ 为弱右连续的.

定理4 X 有 RNP, X^* 可分, $\{F_t, \mathcal{F}_t; t \in R_+\}$ 为闭凸集值弱右连续下鞅, $\sup E \|F_t\| < \infty, \forall t \in R_+$, 且 $F_t \subset G \in \mathcal{L}_{\text{wkc}}^1(X)$, 则存在 $F \in P_{fc}(X), F \subset G$ s.t. $F_t \xrightarrow{w} F$ (a.e.) $t \uparrow \infty$.

证明 由 $\{F_t, \mathcal{F}_t; t \in R_+\}$ 为弱右连续下鞅可知, $\forall x^* \in X^*, \{\sigma(x^*, F_t), \mathcal{F}_t; t \in R_+\}$ 为右连续实值下鞅, 且

$$\sup E |\sigma(x^*, F_t)| \leq \|x^*\| \sup E \|F_t\| < \infty$$

于是由文献 [1] 中的定理 6.5 有下式存在:

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \sigma(x^*, F_t) = Z(x^*, \omega) \quad (\text{a.e.})$$

不失一般性, 假设 $\alpha(\omega)$ 是对称的, 即 $-\alpha(\omega) = \alpha(\omega)$, 否则令 $\tilde{\alpha}(\omega) = \text{cl}\{\text{conv}\{\alpha(\omega)\} \cup (-\alpha(\omega))\}$, 由文献 [3] 中第二章的定理 11 可知 $\tilde{G} \in P_{\text{wkc}}(X)$, 故 $\forall x^* \in X^*, \omega \in \Omega \setminus N, P(N) = 0$, 有

$$|\sigma(x^*, F_t(\omega))| \leq \sigma(x^*, \alpha(\omega)), \forall t \in R_+$$

从而 $\forall A \in \mathcal{F}$, 有

$$\varphi(x^*, A) = \int_A \sigma(x^*, F_t) dp \rightarrow \varphi(x^*, A) = \int_A Z(x^*, \omega) dp$$

所以有

$$|\varphi(x^*, A)| \leq \sigma(x^*, \int_A G dp)$$

由文献 [6] 中性质 3.1 的推论可知, $\int_A G dp \in P_{\text{wkc}}(X)$, 以及文献 [7] 中定理 2.1 的证明过程有 $\varphi(x^*, A)$ 是 $X^* \rightarrow R$ 上关于 Mackey 拓扑连续的映射, 所以存在 $M(A) \in P_{\text{wkc}}(X)$ s.t. $\varphi(x^*, A) = \sigma(x^*, M(A))$.

$\forall x^* \in X^*, \forall t \in R_+, A \rightarrow \varphi(x^*, A)$ 为符号测度, 由 Nikodym 定理有: $A \rightarrow \varphi(x^*, A)$ 也是符号测度, 于是 $A \rightarrow \sigma(x^*, M(A))$ 为符号测度, 所以 $M(\cdot)$ 为集值测度.

由 X 有 RNP 及文献 [2] 中的定理 2 存在 $F: \Omega \rightarrow P_{\text{wkc}}(X)$ s.t. $\forall A \in \mathcal{F}, M(A) = \int_A F(\omega) dp$. 从而 $\forall A \in \mathcal{F}$ 有

$$\int_A |\sigma(x^*, F(\omega))| dp \leq \int_A \sigma(x^*, \alpha(\omega)) dp$$

所以 $\forall \omega \in \Omega \setminus N(x^*), P(N(x^*)) = 0$, 有

$$|\sigma(x^*, F(\omega))| \leq \sigma(x^*, \alpha(\omega))$$

令 $\{x_k^*; k \geq 1\}$ 为 X^* 的稠密子集, 于是 $\forall x^* \in X^*$, 存在 $\{x_m^*; m \geq 1\} \subset \{x_k^*; k \geq 1\}$ s.t. $x_m^* \rightarrow x^*$. 令 $N = \bigcup_{k=1}^{\infty} N(x_k^*)$, 所以 $P(N) = 0, \forall \omega \in \Omega \setminus N$, 由 $\alpha(\omega)$ 的对称性, 有

$$|\sigma(x_m^*, F(\omega)) - \sigma(x^*, F(\omega))| \leq \sigma(x_m^* - x^*, \alpha(\omega))$$

又由于 $\sigma(\cdot, \alpha(\omega))$ 的连续性, 故 $\forall \omega \in \Omega \setminus N, P(N) = 0$, 有

$$\sigma(x_m^*, \alpha(\omega)) \rightarrow \sigma(x^*, \alpha(\omega))$$

从而得出 $F \subset G$ a.e..

同理可得 $\forall \omega \in \Omega \setminus N', P(N') = 0$, 有

$$\begin{aligned} & \sigma(x_m^*, F(\omega)) \rightarrow \sigma(x^*, F(\omega)) \quad t \rightarrow \infty \\ & |\sigma(x^*, F(\omega)) - \sigma(x_m^*, F(\omega))| < |\sigma(x^*, F(\omega)) - \sigma(x_m^*, F(\omega))| + \\ & |\sigma(x_m^*, F(\omega)) - \sigma(x_m^*, F(\omega))| + |\sigma(x_m^*, F(\omega)) - \sigma(x^*, F(\omega))| \end{aligned}$$

于是 $\forall \omega \in \Omega \setminus N'', P(N'') = 0, \forall x^* \in X^*$, 有

$$\sigma(x^*, F(\omega)) \rightarrow \sigma(x^*, F(\omega))$$

故有
$$F_t \xrightarrow{\omega} F \quad \text{a.e.}$$

记 B^* 为 X^* 的单位闭球, D_1^* 为 B^* 的可数稠子集(关于 Mackey 拓扑), D^* 为 D_1^* 的有理线性组合集, 显然有 D^* 为 X^* 关于 Mackey 拓扑的可数稠子集.

定理 5 $\{F_t, \mathcal{F}_t, t \in R_+\}$ 为弱紧凸集值随机集族, 若满足 (a) 存在 $G \in P_{\text{wkc}}(X)$, s.t. $F_t \subset G, \forall t \in R_+$; (b) $\forall x^* \in D^*, \lim_{t \rightarrow \infty} \sigma(x^*, F_t)$ 存在. 于是存在 $F \in P_{\text{wkc}}(X)$ s.t. $\forall x^* \in X^*$ 有:

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \sigma(x^*, F_t) = \sigma(x^*, F).$$

证明 由文献 [4] 中引理 5.1 可证.

参 考 文 献

- 1 黄志远. 随机分析学基础. 武汉: 武汉大学出版社, 1988. 53 ~ 58
- 2 Coste A. La Propriete de Radon-Nikodym en integration multivoque. C R Acad Sci Paris Ser A280, 1975. 1515 ~ 1518
- 3 Diestel J, Unl J. Vector measures. Phode Island: Math Surveys V15 A M S Providence, 1977. 10 ~ 50
- 4 Hess C. On multivalued martingales whose values may be unbounded: martingale selectors and mosco convergence. J Multiv Anal, 1991(39): 175 ~ 201
- 5 Hiai F, Umegaki H. Integrals, conditional expectations and martingales of multivalued functions. J Multiv Anal, 1977(7): 149 ~ 182
- 6 Papageorgiou N S. On the theory of Banach space valued multifunctions: I—integration and conditional expectation. J Multiv Anal, 1985(17): 185 ~ 206
- 7 Papageorgiou N S. A convergence theorem for set valued supermartingales with values in a separable Banach space. Stoc Anal and Appl, 1987, 5(4): 510 ~ 520

Convergence Theorem of Continuous Parameter Set-Valued Submartingale

Zhu Yongzhong

(Dept. of Math. and Phys., Hohai Univ., Nanjing 210098)

Abstract The definition of continuous parameter set-valued submartingale is given. Then, three equivalent theorems of continuous parameter set-valued submartingale is proved (1) $\mathcal{A}_{\text{wkc}}(X)$ valued submartingale is equal to $\int_{\Omega} F_{\tau_1} dp \subset \int_{\Omega} F_{\tau_2} dp$ for any $\tau_1, \tau_2 \in T$ and $\tau_1 < \tau_2$ (2) $\mathcal{L}_{\text{lc}}^A(X)$ valued submartingale is equal to $S_{F_s}^1(\mathcal{F}_s) \subset \text{cl}\{E(g/\mathcal{F}_s); g \in S_{F_t}^1(\mathcal{F}_t)\}$ for any $s, t \in R_+$ and $s < t$ (3) When X^* is separable, closed convex set valued submartingale is equal to $\text{cl} \int_A F_s dp \subset \text{cl} \int_A F_t dp$ for any $s, t \in R_+$ and $s < t$. In the end, the weak convergence theorem of weak compact convex set valued random sets and weak convergence theorem of closed convex set valued right continuous submartingale are given.

Key words weak compact convex set; closed convex set; continuous parameter; set valued submartingale; convergence theorem