第 27 卷第 2 期　　河 海 大 学 学 报　　Vol.27 No.2
1999 年 3 月　　JOURNAL OF HOHAI UNIVERSITY　　Mar.1999

关于 Schwarz-Pick 定理的一个注记*

周继东

（河海大学数学物理系　南京　210098）

摘　要　利用圆内解析函数的几个性质，改进了 Schwarz-Pick 定理，得到了 Hermite 二次型的一个非负下界估计.

关键词　Pick 定理；Schwarz 引理；Hermite 二次型

中图号　O174

1　准 备 知 识

Schwarz 引理[1]　若 $f(z)$ 在单位圆 $\Delta=\{z\mid |z|<1\}$ 中解析，且满足条件 $f(0)=0$，$|f(z)|\leqslant 1$，那么，在圆 Δ 内必有

$$|f(z)|\leqslant |z| \tag{1}$$

且

$$|f'(0)|\leqslant 1 \tag{2}$$

如果(2)式等号成立，或在圆 $|z|<1$ 内一点 $z_0\neq 0$ 处(1)式等号成立，则 $f(z)=e^{i\alpha}z$，其中 α 是一实常数.

定义　称 $\left|\dfrac{z_1-z_2}{1-\bar{z}_1z_2}\right|$ 为单位圆 Δ 内两点 z_1, z_2 之间的非欧距离，称 $\int_r \dfrac{2\,|\,dz\,|}{1-|\,z\,|^2}$ 为单位圆 Δ 内可求长弧 γ 的非欧弧长.

Pick 首先将 Schwarz 引理作了如下的推广：

定理 1[2]　设 $f:\Delta\to\Delta$ 是解析的，则对 Δ 内任两点 z_1, z_2，

$$\left|\frac{f(z_1)-f(z_2)}{1-\bar{f}(z_1)f(z_2)}\right|\leqslant\frac{|z_1-z_2|}{|1-\bar{z}_1z_2|} \tag{3}$$

$$\frac{|f'(z)|}{1-|f(z)|^2}\leqslant\frac{1}{1-|z|^2} \tag{4}$$

成立.

非平凡等式仅当 $f=e^{i\alpha}\dfrac{z-z_0}{1-\bar{z}_0z}$ $(z_0\in\Delta, \alpha\in\mathbf{R})$ 时成立. 亦即：单位圆到自身内的解析映射使两点间的非欧距离、弧的非欧长度减少.

注：在(3)式中取 $z_1=z, z_2=0$，在(4)式中取 $z=0$，即可得(1)(2)两式.

接着，Pick 又将该结果改进为如下更一般的形式.

定理 2[2]　设 $f:\Delta\to\Delta$ 是解析的，令 $w_k=f(z_k)$，$k=1,2,\cdots,n$，则 Hermite 二次型

$$Q_n(t_1,t_2,\cdots,t_n)=\sum_{h,k=1}^{n}\frac{1-w_h\bar{w}_k}{1-z_h\bar{z}_k}t_h\bar{t}_k$$

是正定或半正定的.

注：$n=2$ 时即可得定理 1.

收稿日期：1997-11-10

作者简介：周继东，男，讲师，基础数学专业，主要从事基础数学的教学与研究.

* 河海大学青年科学基金资助项目.

2 主要结果

引理　设函数 $f(z)=U(z)+\mathrm{i}V(z)$ 在圆 $|z|<R$ 内解析，在闭圆 $|z|\leqslant R$ 上连续，则

(a)
$$\int_0^{2\pi}\frac{z\overline{f(R\mathrm{e}^{\mathrm{i}\varphi})}}{R\mathrm{e}^{\mathrm{i}\varphi}-z}\mathrm{d}\varphi=0$$

(b)
$$f(z)=U(0)+\frac{\mathrm{i}}{2\pi}\int_0^{2\pi}\frac{R\mathrm{e}^{\mathrm{i}\varphi}+z}{R\mathrm{e}^{\mathrm{i}\varphi}-z}V(R\mathrm{e}^{\mathrm{i}\varphi})\mathrm{d}\varphi$$

证明　(a) 对 $|z|<R$，令 $\tilde{z}=\dfrac{R^2}{\bar{z}}$，则 $|\tilde{z}|>R$，由 Cauchy 公式，

$$0=\oint_{|\zeta|=R}\frac{f(\zeta)}{\zeta-\tilde{z}}\mathrm{d}\zeta\overset{\zeta=R\mathrm{e}^{\mathrm{i}\varphi}}{=\!=\!=}\int_0^{2\pi}\frac{\bar{z}f(R\mathrm{e}^{\mathrm{i}\varphi})}{R\mathrm{e}^{\mathrm{i}\varphi}\bar{z}-R^2}R\mathrm{e}^{\mathrm{i}\varphi}\mathrm{i}\mathrm{d}\varphi=\mathrm{i}\int_0^{2\pi}\frac{\bar{z}f(R\mathrm{e}^{\mathrm{i}\varphi})}{\bar{z}-R\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\varphi}}\mathrm{d}\varphi$$

取共轭，即得 $\displaystyle\int_0^{2\pi}\frac{z\overline{f(R\mathrm{e}^{\mathrm{i}\varphi})}}{R\mathrm{e}^{\mathrm{i}\varphi}-z}\mathrm{d}\varphi=0$.

(b) 由 Cauchy 公式，对 $|z|<R$，

$$\begin{aligned}f(z)&=\frac{1}{2\pi\mathrm{i}}\oint_{|\zeta|=R}\frac{f(\zeta)}{\zeta-z}\mathrm{d}\zeta\overset{\zeta=R\mathrm{e}^{\mathrm{i}\varphi}}{=\!=\!=}\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\frac{f(R\mathrm{e}^{\mathrm{i}\varphi})}{R\mathrm{e}^{\mathrm{i}\varphi}-z}R\mathrm{e}^{\mathrm{i}\varphi}\mathrm{d}\varphi=\\&\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}U(R\mathrm{e}^{\mathrm{i}\varphi})\mathrm{d}\varphi+\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\frac{z}{R\mathrm{e}^{\mathrm{i}\varphi}-z}U(R\mathrm{e}^{\mathrm{i}\varphi})\mathrm{d}\varphi+\\&\frac{\mathrm{i}}{2\pi}\int_0^{2\pi}\frac{R\mathrm{e}^{\mathrm{i}\varphi}+z}{R\mathrm{e}^{\mathrm{i}\varphi}-z}V(R\mathrm{e}^{\mathrm{i}\varphi})\mathrm{d}\varphi-\frac{\mathrm{i}}{2\pi}\int_0^{2\pi}\frac{z}{R\mathrm{e}^{\mathrm{i}\varphi}-z}V(R\mathrm{e}^{\mathrm{i}\varphi})\mathrm{d}\varphi=\\&U(0)+\frac{\mathrm{i}}{2\pi}\int_0^{2\pi}\frac{R\mathrm{e}^{\mathrm{i}\varphi}+z}{R\mathrm{e}^{\mathrm{i}\varphi}-z}V(R\mathrm{e}^{\mathrm{i}\varphi})\mathrm{d}\varphi+\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\frac{z\overline{f(R\mathrm{e}^{\mathrm{i}\varphi})}}{R\mathrm{e}^{\mathrm{i}\varphi}-z}\mathrm{d}\varphi=\\&U(0)+\frac{\mathrm{i}}{2\pi}\int_0^{2\pi}\frac{R\mathrm{e}^{\mathrm{i}\varphi}+z}{R\mathrm{e}^{\mathrm{i}\varphi}-z}V(R\mathrm{e}^{\mathrm{i}\varphi})\mathrm{d}\varphi\end{aligned}$$

定理3　设 $f:\Delta\to\Delta$ 是解析的，令 $w_k=f(z_k)$，$k=1,2,\cdots,n$，则

$$\sum_{h,k=1}^{n}\frac{1-w_h\bar{w}_k}{1-z_h\bar{z}_k}t_h\bar{t}_k\geqslant\left|\sum_{h,k=1}^{n}\frac{w_h-w_k}{z_h-z_k}t_ht_k\right|\tag{5}$$

证明　先设 $f(z)$ 在闭圆 $|z|\leqslant1$ 上解析，作函数 $F(z)=\mathrm{i}\dfrac{1-f(z)}{1+f(z)}$，对于 $z\in\Delta$，由于 $|f(z)|<1$，所以易见 $F(z)$ 具有正虚部. 设 $F=U+\mathrm{i}V$，由引理得

$$F(z)=U(0)+\frac{\mathrm{i}}{2\pi}\int_0^{2\pi}\frac{R\mathrm{e}^{\mathrm{i}\varphi}+z}{R\mathrm{e}^{\mathrm{i}\varphi}-z}V(R\mathrm{e}^{\mathrm{i}\varphi})\mathrm{d}\varphi$$

注意到此时 $R=1$，

$$\begin{aligned}F(z_h)-F(z_k)&=\frac{\mathrm{i}}{2\pi}\int_0^{2\pi}\frac{2\mathrm{e}^{\mathrm{i}\varphi}(z_h-z_k)}{(\mathrm{e}^{\mathrm{i}\varphi}-z_h)(\mathrm{e}^{\mathrm{i}\varphi}-z_k)}V(\mathrm{e}^{\mathrm{i}\varphi})\mathrm{d}\varphi=\\&\frac{\mathrm{i}}{\pi}\int_0^{2\pi}\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}\varphi}(z_h-z_k)}{(\mathrm{e}^{\mathrm{i}\varphi}-z_h)(\mathrm{e}^{\mathrm{i}\varphi}-z_k)}V(\mathrm{e}^{\mathrm{i}\varphi})\mathrm{d}\varphi\end{aligned}$$

又

$$F(z_h)-F(z_k)=\mathrm{i}\frac{1-w_h}{1+w_h}-\mathrm{i}\frac{1-w_k}{1+w_k}=\frac{2\mathrm{i}(w_k-w_h)}{(1+w_h)(1+w_k)}$$

所以，

$$\frac{w_h-w_k}{z_h-z_k}=-\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\frac{(1+w_h)(1+w_k)}{(\mathrm{e}^{\mathrm{i}\varphi}-z_h)(\mathrm{e}^{\mathrm{i}\varphi}-z_k)}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\varphi}V(\mathrm{e}^{\mathrm{i}\varphi})\mathrm{d}\varphi$$

$$\begin{aligned}\left|\sum_{h,k=1}^{n}\frac{w_h-w_k}{z_h-z_k}t_ht_k\right|&=\left|\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\left(\sum_{h=1}^{n}\frac{1+w_h}{\mathrm{e}^{\mathrm{i}\varphi}-z_h}t_h\right)^2\mathrm{e}^{\mathrm{i}\varphi}V(\mathrm{e}^{\mathrm{i}\varphi})\mathrm{d}\varphi\right|\leqslant\\&\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\left|\sum_{h=1}^{n}\frac{1+w_h}{\mathrm{e}^{\mathrm{i}\varphi}-z_h}t_h\right|^2V(\mathrm{e}^{\mathrm{i}\varphi})\mathrm{d}\varphi\end{aligned}\tag{6}$$

又因为

$$\mathrm{i}F(z_h)+\overline{\mathrm{i}F(z_k)}=-\frac{1-w_h}{1+w_h}-\frac{1-\bar{w}_k}{1+\bar{w}_k}=-\frac{2(1-w_h\bar{w}_k)}{(1+w_h)(1+\bar{w}_k)}$$

所以,

$$\frac{1-w_h\bar{w}_k}{(1+w_h)(1+\bar{w}_k)}=-\frac{1}{2}[\mathrm{i}F(z_h)+\overline{\mathrm{i}F(z_k)}]=$$

$$-\frac{1}{2}[\mathrm{i}U(0)-\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\frac{e^{\mathrm{i}\varphi}+z_h}{e^{\mathrm{i}\varphi}-z_h}V(e^{\mathrm{i}\varphi})\mathrm{d}\varphi-\mathrm{i}U(0)-\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\frac{e^{-\mathrm{i}\varphi}+\bar{z}_k}{e^{-\mathrm{i}\varphi}-\bar{z}_k}V(e^{\mathrm{i}\varphi})\mathrm{d}\varphi]=$$

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\frac{1-z_h\bar{z}_k}{(e^{\mathrm{i}\varphi}-z_h)(e^{-\mathrm{i}\varphi}-\bar{z}_k)}V(e^{\mathrm{i}\varphi})\mathrm{d}\varphi$$

$$\frac{1-w_h\bar{w}_k}{1-z_h\bar{z}_k}=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\frac{(1+w_h)(1+\bar{w}_k)}{(e^{\mathrm{i}\varphi}-z_h)(e^{-\mathrm{i}\varphi}-\bar{z}_k)}V(e^{\mathrm{i}\varphi})\mathrm{d}\varphi$$

$$\sum_{h,k=1}^{n}\frac{1-w_h\bar{w}_k}{1-z_h\bar{z}_k}t_h\bar{t}_k=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\sum_{h,k=1}^{n}\frac{(1+w_h)(1+\bar{w}_k)}{(e^{\mathrm{i}\varphi}-z_h)(e^{-\mathrm{i}\varphi}-\bar{z}_k)}t_h\bar{t}_kV(e^{\mathrm{i}\varphi})\mathrm{d}\varphi=$$

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\left|\sum_{h=1}^{n}\frac{1+w_h}{e^{\mathrm{i}\varphi}-z_h}t_h\right|^2V(e^{\mathrm{i}\varphi})\mathrm{d}\varphi \tag{7}$$

比较(6)(7)两式,可得

$$\sum_{h,k=1}^{n}\frac{1-w_h\bar{w}_k}{1-z_h\bar{z}_k}t_h\bar{t}_k\geqslant\left|\sum_{h,k=1}^{n}\frac{w_h-\bar{w}_k}{z_h-\bar{z}_k}t_ht_k\right|$$

对一般的 $f(z)$,将上述结果应用于 $f(rz)$,$0<r<1$,然后令 $r\to1$ 即可.证毕.

注 当(5)式右端取为0时,即得定理2.

参考文献

1 庄圻泰,张南岳.复变函数.北京:北京大学出版社,1984.107~115

2 Lars V Ahlfors. Conformal Invariants:topics in geometric function theory. New York:McGraw-Hill Book Company,1973.1~5

A Note on Schwarz-Pick Theorem

Zhou Jidong

(*Dept. of Mathematics and Physics*, *Hohai Univ.*, *Nanjing* 210098)

Abstract By use of some properties of the analytical function in the cirle, the well-known Schwarz-Pick Theorem is improved, and a nonnegative lower bound of the Hermite quadratic form is obtained.

Key words Pick theorem;Schwarz lemma;Hermite quadratic form