

用 Mindlin 解推求复合地基中附加应力的计算公式

张小平 俞仲泉

(河海大学土木工程学院 南京 210098)

摘 要 依据对粉煤灰桩及其类似柔性桩身应力传递特性的研究 , 分析了桩身摩阻力的分布规律 ; 用 Mindlin 解考虑简化的桩侧摩阻力的分布形式 , 推导出求复合地基中附加应力的计算公式 , 为复合地基沉降量的计算提供了一个比较合理的计算方法 .

关键词 桩侧摩阻力 ; Mindlin 解 ; 附加应力

中图号 TU43

目前 , 进行桩基沉降计算时 , 复合地基中附加应力的计算常采用压力扩散法、等效实体法及当层法等 . 这些方法都是近似半经验法 . 近年来 , 国内外不少学者采用不同途径试图对桩基沉降计算方法进行改进 . 在已知单桩桩端反力及桩侧摩阻力的分配比例及其分布规律时 , 即可按弹性理论计算在单桩荷载作用下土体中任一点的竖向应力 . Geddes(1966) 依据 Mindlin 解研究了示于图 1 中三种桩侧摩阻力的传递规律 , 并给出了附加应力的表达式 . 图 1 横坐标表示力的作用线到所考虑点的水平距离 . 图 1(a) 为集中力作用时的情况 ;

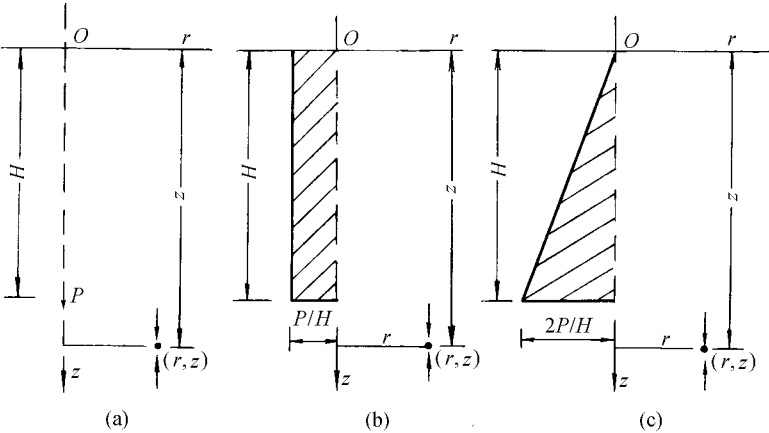


图 1 计算土中应力的桩-土体系

Fig.1 Pile-soil system of calculating stress in soil

图 1(b) 为桩侧摩阻力均匀分布 , 荷载强度为 P/H ; 图 1(c) 为桩侧摩阻力线性分布 , 荷载强度在桩顶处为 0 , 桩端处为 $2P/H$. Geddes 解为桩基沉降计算提供了新的途径 , 有一定的实用意义 .

但是由于桩的类型不同 , 其桩身应力的分布及桩侧摩阻力的分布也不同 , 且比较复杂 , 而非 Geddes 所研究的几种简单形式 . 本文依据粉煤灰桩桩身应力的传递特性 , 分析其桩侧摩阻力的分布规律 , 探讨了用 Mindlin 解考虑简化的桩侧摩阻力的分布 , 推导出粉煤灰桩及与之类似的柔性桩复合地基中附加应力的计算公式 .

1 桩侧摩阻力的简化依据

根据对粉煤灰桩桩身应力传递的试验研究^[1] , 得出如图 2 所示的桩身应力随深度的传递曲线 . 据此可近似推算出桩侧摩阻力随深度的分布 (图 3) . 分析图 3 可知 , 摩阻力在桩的顶部发挥很小 , 几乎为 0 , 至桩的约 $1/2$ 深度处摩阻力发挥最大 , 随之逐渐减小 , 桩端处接近于 0 . 由于多种柔性桩复合地基桩侧摩阻力的分布形式大体相同 , 最大值不一定在 $H/2$ 处 , 因此可设桩侧摩阻力最大值距桩顶为 H_1 . 令 $\alpha = H_1/H$, 则 $H_1 = \alpha H$. 故可将柔性桩复合地基桩侧摩阻力简化为图 4 所示的分布形式 .

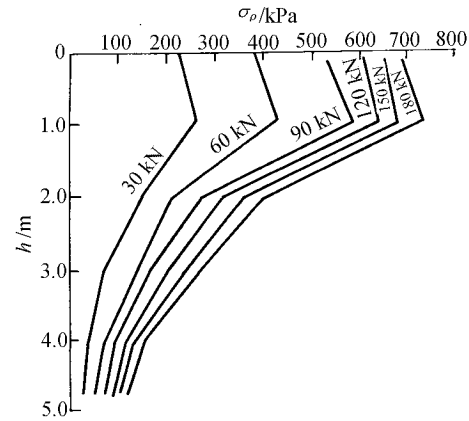


图2 桩身应力随深度传递曲线

Fig.2 Transferring curve of pile stress with depth

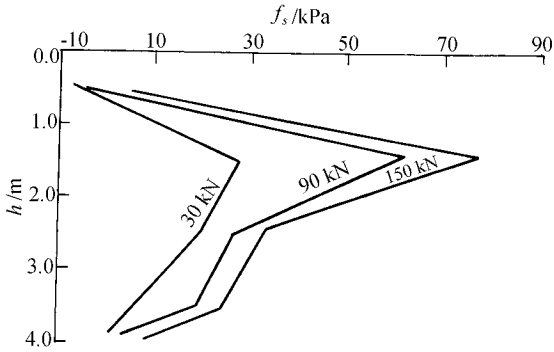


图3 桩身摩阻力随深度变化曲线

Fig.3 Variation curve of the pile frictional resistance with depth

2 公式推导

复合地基内任一点的附加应力,是由桩和桩间土承担的两部分荷载产生的.桩间土承担的荷载 $P_s = P_p / n$ (其中 n 为桩土应力比, P_p 为桩承担的荷载). P_s 在地基内产生的竖向附加应力 $\sigma_{z,s}$,可用布辛乃斯克 (Boussinesq) 解求得,即与天然土的附加应力的计算方法相同.由桩体荷载 P_p 在地基内产生的附加应力为 $\sigma_{z,p}$.地基内任一点的附加应力 σ_z 为这两部分应力的叠加,即

$$\sigma_z = \sigma_{z,p} + \sigma_{z,s} \tag{1}$$

现用 Mindlin 解推求单桩荷载作用下地基内任一点竖向附加应力 $\sigma_{z,p}$ 的计算公式. $\sigma_{z,p}$ 可由下式表示:

$$\sigma_{z,p} = \sigma_{z,d} + \sigma_{z,c} \tag{2}$$

式中: $\sigma_{z,d}$ ——由桩端阻力产生的竖向应力; $\sigma_{z,c}$ ——由桩侧摩阻力产生的竖向应力.

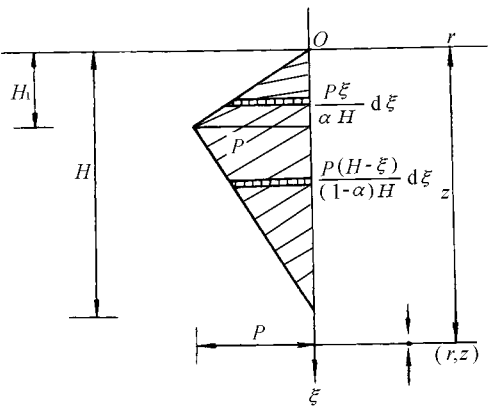


图4 桩侧摩阻力分布的简化形式

Fig.4 Simplified distribution form of the pile frictional resistance

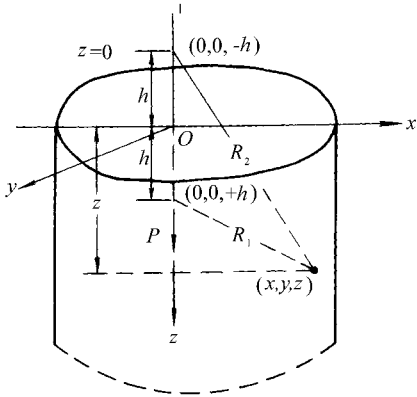


图5 土体内集中力的作用

Fig.5 Action of concentrated load in soil

根据 Mindlin 的研究^[2,3],当弹性半空间体内深度 h 处作用着集中力 P 时(图5),地基内自地面深度 z 处任一点的竖向应力 σ_z 可用下式表示:

$$\sigma_z = \frac{P}{8\pi(1-\mu)} \left[-\frac{(1-2\mu)(z-h)}{R_1^3} + \frac{(1-2\mu)(z-h)}{R_2^3} - \frac{3(z-h)^3}{R_1^5} - \frac{3(3-4\mu)(z+h)^3 - 3h(z+h)(5z-h)}{R_2^5} - \frac{30hz(z+h)^3}{R_2^7} \right] \tag{3}$$

式中: $R_1 = [r^2 + (z-h)^2]^{1/2}$; $R_2 = [r^2 + (z+h)^2]^{1/2}$; μ ——土的泊松比; r ——力的作用线到所考虑点的水平距离; z ——所考虑点的纵坐标; h ——集中力作用的深度.

若桩端阻力看作是集中力,记为 P_c ,它在地基内任一点引起的附加应力可用式(3)进行计算,但式

中的 P 应以 P_c 代替:

$$\sigma_{z, d} = \frac{P_c}{8\pi(1-\mu)} \left[-\frac{(1-2\mu)(z-H)}{R_1^3} + \frac{(1-2\mu)(z-H)}{R_2^3} - \frac{3(z-H)^3}{R_1^5} - \frac{3(3-4\mu)(z+H)^2 - 3H(z+H)(5z-H)}{R_2^5} - \frac{30Hz(z+H)^3}{R_2^7} \right] \quad (4a)$$

若桩端阻力是均匀荷载作用在桩端截面上, 荷载强度为 P'_c , 桩的半径为 a , 则通过 Mindlin 解可推导出地基内任一点的附加应力为^[2]:

$$\sigma_{z, d} = \frac{P'_c}{4(1-\mu)} \left\{ -\chi(1-\mu) + \frac{(1-2\mu)(z-H)}{\sqrt{a^2+(z-H)^2}} + \frac{(1-2\mu)(z-H)}{z+H} - \frac{(1-2\mu)(z-H)}{\sqrt{a^2+(z+H)^2}} + \frac{(z-H)^3}{[a^2+(z-H)^2]^{3/2}} - \frac{(3-4\mu)z}{z+H} + \frac{(3-4\mu)(z+H)^2}{[a^2+(z+H)^2]^{3/2}} + \frac{H(5z-H)}{(z+H)^2} - \frac{H(z+H)(5z-H)}{[a^2+(z+H)^2]^{3/2}} - \frac{6Hz}{(z+H)^2} + \frac{6Hz(z+H)^3}{[a^2+(z+H)^2]^{3/2}} \right\} \quad (4b)$$

式中 H 为桩的长度。

由桩侧摩阻力引起地基内任一点的附加应力的计算, 据图 4 分两步进行, 先对桩体 H_1 以上摩阻力线性分布进行推求, 记为 σ_{z, c_1} , 再对桩体 H_1 以下摩阻力线性分布进行推求, 记为 σ_{z, c_2} , 则由桩侧摩阻力引起的地基内任一点的竖向附加应力为

$$\sigma_{z, c} = \sigma_{z, c_1} + \sigma_{z, c_2} \quad (5)$$

H_1 桩体以上摩阻力线性分布时, 最大荷载强度为 P , 则 $dP = \frac{P\xi}{\alpha H} d\xi$, 在地基内任一点所产生的附加应力由式(3)得

$$d\sigma_{z, c_1} = \frac{P\xi}{8\alpha\pi(1-\mu)H} \left[-\frac{(1-2\mu)(z-\xi)}{R_1^3} + \frac{(1-2\mu)(z-\xi)}{R_2^3} - \frac{3(z-\xi)^3}{R_1^5} - \frac{3(3-4\mu)(z+\xi)^2 - 3\xi(z+\xi)(5z-\xi)}{R_2^5} - \frac{30\xi z(z+\xi)^3}{R_2^7} \right] d\xi$$

则由 H_1 桩体以上摩阻力引起的地面下 z 处的应力为

$$\sigma_{z, c_1} = \frac{P}{8\alpha\pi(1-\mu)H} \int_0^{\alpha H} \left[-\frac{(1-2\mu)(z-\xi)\xi}{R_1^3} + \frac{(1-2\mu)(z-\xi)\xi}{R_2^3} - \frac{3(z-\xi)^3\xi}{R_1^5} - \frac{3(3-4\mu)(z+\xi)^2\xi - 3\xi^2(z+\xi)(5z-\xi)}{R_2^5} - \frac{30\xi^2 z(z+\xi)^3}{R_2^7} \right] d\xi \quad (6)$$

积分后得

$$\sigma_{z, c_1} = \frac{P}{8\alpha\pi(1-\mu)H} \left\{ -\frac{(2-\mu)\alpha H}{M_1} + \frac{\chi(1-2\mu)z^3 - \chi(2-\mu)zr^2}{r^2 M_2} + \frac{[\chi(2-\mu)r^2 + (1-2\mu)z^2][z+\alpha H] + \chi(2-3\mu)zr^2}{r^2 M_3} + \frac{zr^2 + (z-\alpha H)^3}{M_1^3} + \frac{(14-4\mu)zr^4 + (10-4\mu)z^5 - 6z^3r^2}{r^2 M_2^3} + \frac{[r^2 - (10+4\mu)z^2][z+\alpha H]^3 - (15-4\mu)zr^4 + 4z^3r^2}{r^2 M^3} + \frac{\chi(z^3r^4 - zr^6 - 2z^7)}{r^2 M_2^5} + \frac{\chi(zr^6 - z^3r^4 + z^2(z+\alpha H)^2)}{r^2 M_3^5} - \chi(2-\mu)\ln \frac{M_1 + z - \alpha H}{M_3 + z + \alpha H} \right\} \quad (7)$$

式中: $M_1 = \sqrt{r^2 + (z - \alpha H)^2}$; $M_2 = \sqrt{r^2 + z^2}$; $M_3 = \sqrt{r^2 + (z + \alpha H)^2}$.

H_1 桩体以下摩阻力线性分布时, 最大荷载强度为 P , 由图 4 得 $dP = \frac{P(H-\xi)}{(1-\alpha)H} d\xi$. 代入式(3)得

$$d\sigma_{z, \sigma_2} = \frac{P(H - \xi)}{8\pi(1 - \alpha)(1 - \mu)H} \left[-\frac{(1 - 2\mu)(z - \xi)}{R_1^3} + \frac{(1 - 2\mu)(z - \xi)}{R_2^3} - \frac{(z - \xi)^3}{R_1^5} - \frac{(3 - 4\mu)(z + \xi)^2 - 3\xi(z + \xi)(5z - \xi)}{R_2^5} - \frac{30\xi(z + \xi)^3}{R_2^7} \right] d\xi$$

则由 H_1 桩体以下摩阻力引起的地下 z 处应力为

$$\sigma_{z, \sigma_2} = \frac{P}{8\pi(1 - \alpha)(1 - \mu)H} \int_{\alpha H}^H \left[-\frac{(1 - 2\mu)(z - \xi)}{R_1^3} + \frac{(1 - 2\mu)(z - \xi)}{R_2^3} - \frac{(z - \xi)^3}{R_1^5} - \frac{(3 - 4\mu)(z + \xi)^2 - 3\xi(z + \xi)(5z - \xi)}{R_2^5} - \frac{30\xi(z + \xi)^3}{R_2^7} \right] [H - \xi] d\xi \quad (8)$$

积分后得

$$\begin{aligned} \sigma_{z, \sigma_2} = & \frac{P}{8\pi(1 - \alpha)(1 - \mu)H} \left\{ \frac{(2 - \mu)(1 - \alpha)H}{M_1} + \right. \\ & \frac{[(3 - 2\mu)z + (1 + \mu)(1 - \alpha)H]r^2 - (1 - 2\mu)z(z + H)(z + \alpha H)}{r^2 M_3} + \\ & \frac{(1 - 2\mu)(z + H)^2 - (2 - \mu)zr^2}{r^2 M_5} - \frac{(z - H)^3 + (z - H)r^2}{M_4^3} + \\ & \frac{[r^2 - (4 - \mu)z^2 - (5 - 2\mu)zH](z + \alpha H)^3 - [(15 + 4\mu)z + H]r^4 + 4(z^3 + z^2 H)r^2}{r^2 M_3^3} + \\ & \frac{[(4 - \mu)z^2 + (5 - 2\mu)zH - r^2](z + H)^3 + [(15 - 4\mu)z - H]r^4 - 4(z + H)z^2 r^2}{r^2 M_5^3} - \\ & \frac{[z^2(z + H)r^4 - zr^6 - z(2z + H)(z + \alpha H)^2]}{r^2 M_3^5} + \frac{[z^2(z + H)r^4 - zr^6 - z(2z + H)(z + H)^2]}{r^2 M_5^5} - \\ & \left. (2 - \mu) \left[\ln \frac{M_1 + z - \alpha H}{M_4 + z - H} + \ln \frac{M_3 + z + \alpha H}{M_5 + z + H} \right] \right\} \quad (9) \end{aligned}$$

式中: $M_4 = \sqrt{r^2 + (z - H)^2}$; $M_5 = \sqrt{r^2 + (z + H)^2}$; M_1, M_3 的意义同式(7)。

将式(7)(9)代入式(5)即得由桩侧摩阻力引起的地基内任一点的附加应力计算式。求得 $\sigma_{z, p}$ 、 $\sigma_{z, \sigma}$ 两者之和, 即得单桩荷载作用下地基内任一点的附加应力。考虑应力重叠效应, 利用线性叠加原理, 可求出群桩荷载作用下地基内的附加应力。

3 结 语

计算复合地基中的附加应力, 必须了解桩身摩阻力的分布规律。由于受试验仪器及测试手段的限制, 对桩侧摩阻力的研究仍处于探索阶段。文献[4]研究的水泥搅拌桩的桩侧摩阻力分布规律与作者所研究的粉煤灰桩桩侧摩阻力分布规律几乎相同。因此, 本文用 Mindlin 解推求的附加应力公式适合于类似柔性桩复合地基的沉降计算, 为柔性桩复合地基沉降的计算提供了又一途径。

参 考 文 献

- 1 张小平. 二灰挤密桩的试验研究[学位论文]. 南京: 河海大学, 1995
- 2 徐志英, 俞仲泉. 深置圆形基础的沉陷计算. 土木工程学报, 1958, (4): 259 ~ 270
- 3 徐志英. 以明特林(Mindlin)公式为根据的地基中垂直应力的计算公式. 土木工程学报, 1957, (4): 485 ~ 496
- 4 龚晓南, 段继伟. 柔性桩的荷载传递特性. 见: 叶书麟主编. 第七届土力学及基础工程学术会议论文集. 北京: 中国建筑工业出版社, 1994. 605 ~ 610

Derivation of the Formula for Additional Stress in Compound Foundation by Mindlin Solution

Zhang Xiaoping Yu Zhongquan

(College of Civil Engineering , Hohai Univ. , Nanjing 210098)

Abstract On the basis of the research on stress transfer of flyash piles , the distribution law of frictional resistance is analysed , and with the help of the Mindlin solution and the assumption of the simplified distribution form of frictional resistance , a formula is derived for calculating the additional stress in compound foundation. Which is a more reasonable method for calculation of settlement of compound foundation.

Key words pile frictional resistance ; Mindlin solution ; additional stress



深切怀念我国著名的水文学家刘光文教授

詹道江

(河海大学水资源水文系 南京 210098)

我国著名的水文学家、水文教育家刘光文先生不幸于 1998 年 3 月 6 日在南京去世。享年 88 岁。

先生是浙江杭州人。1933 年毕业于清华大学，1936 年获美国依阿华大学水利工程硕士，翌年又赴德国柏林工业大学从事研究工作。1938 年回国后，历任广西大学、重庆大学、交通大学等校教授。1952 年在河海大学（前华东水利学院）创办中国的水文系，历任系主任、名誉系主任，兼任国务院三峡工程论证组成员、国务院首届学科评议组成员、全国水利水电类教材委员会副主任和首批博士生导师等。

旧中国水文基础薄弱，加上水文系在国内尚属初创，举步艰难，先生念及工程建设如无深入的水文研究，就难以保证其安全和经济，甚至发生重大灾害，毅然排除万难，日夜操劳才使水文专业屹立于高等学府系科之林。40 年来，他培养的中国水文高级人才，遍布水利水文战线，大都成为各级领导和技术骨干，真是桃李满天下。随着国际学术交流的开展，河海大学水文系逐渐蜚声世界，各国著名水文学者不断前来南京讲学交流，水文系的一些学者也走上了国际水文论坛。联合国教科文组织国际水文计划曾多次委托河海大学水文系举办国际水文讲习班，先生不顾年事已高，认真组织，仔细审订教材，对世界水文教育事业作出了贡献。

建国时期，先生提出了水文分析与计算的基本原则，至今仍不失其指导意义。1958 年亲自主持长江三峡工程的设计洪水研究，开拓性地提出了暴雨组合法推求三峡可能最大洪水，为三峡工程前期论证提供了科学依据。先生不断探索水文学科的新进展、新领域，结合实践，主编中国水文领域影响深远的《水文分析与计算》、《英汉水文学词汇》（合编）、《应用数学》、《水文统计及近似计算》等专著，审订了《水文统计常用表》，晚年发表了不少高水平的论著，为水文学科的发展作出了重要贡献。他是当之无愧的我国水文学科的奠基人，也是一位享誉国内外的教育家和科学家。

先生诲人不倦，凡求教于先生者，总是谆谆教导，条理分明，促人深思。对送审的论文不仅一一审核其理论，校核其计算，甚至标点符号亦不放过。这充分体现先生长于教学、精于计算、严谨和负责的治学精神。

先生为人刚正不阿，乐于助人，晚年犹豪情如昔，遇事仗义直言，秉笔直书。

临终之日，先生乃念念不忘祖国的水文事业，最后嘱咐将遗体捐献南京医科大学，为医学教学作出贡献。先生毕身对事业的执着追求和无私奉献精神，充分体现了中国老一辈知识分子的高大形象和光辉榜样。这种精神将激励我们以更大的热情为我国水文事业作出贡献。

笔者多年从学于先生，谨就所知，写成此文，并献联以示深切怀念：

先生之风，山高水长；

哲人其萎，学理辉扬。