

曲线网格生成调节因子选取研究

华祖林

卞 华

(河海大学水文水资源及环境学院 南京 210098)

(河海大学水利水电工程学院 南京 210098)

摘 要 指出了常用 Thompson 方法中调节因子对生成网格曲线所存在的问题 ;从另一角度发出 ,借助于自然界符合椭圆型函数关系的某些物理现象 ,导出了一种新的调节因子表达式 ,并着重探讨了该因子的适用条件 .长江三峡工程河段、第二松花江曾通河段实际水域的应用检验表明 ,该调节因子对强弯河段及多连通水域网格布置具有良好的效果 .

关键词 曲线网格 ;调节因子 ;适用性 ;分析

中图号 TV131

近十年来,正交曲线网格由于能够贴合水域自然边界且有较高计算精度的独特优势而在水利工程水流问题数值计算中越来越多地被采用.目前曲线网格生成的方法主要有两类:一类是代数坐标转换,适用于边界有一定规律可循的问题;另一类则是微分坐标转换,尤以 J. F. Thompson 提出的适体曲线网格生成方法^[1]最为著名.作者在应用 Thompson 方法于一些实际问题的水流流场及浓度场计算过程中,发现使用该调节因子存在有时可能无法形成网格、可调整参数过多、双映射现象等问题或缺陷.鉴于此,本文借助于自然界符合椭圆型函数关系的某些物理现象,视计算区域的网格曲线为流线簇与势线簇,导出了新的调节因子,使调节因子由原来的指数函数形式变为微分表达式,即 $-\frac{\partial(\ln K)}{\partial \xi} \gamma^{-1}, \frac{\partial(\ln K)}{\partial \eta} \alpha^{-1}$,较好地克服了上述缺陷.长江三峡工程河段、第二松花江曾通河段等工程的实际应用表明,该方法是一种较成功的方法.

1 Thompson 方法简介及调节因子存在的问题

Thompson 的曲线网格生成方法,是通过数值求解 Poisson 方程组来自动生成物理平面上的曲线网格.对于二维问题,网格关系可表示为

$$\xi_{xx} + \xi_{yy} = P(\xi, \eta) \tag{1}$$

$$\eta_{xx} + \eta_{yy} = Q(\xi, \eta) \tag{2}$$

式中 $P(\xi, \eta), Q(\xi, \eta)$ 为调节因子,分别用于调整等 ξ 线和等 η 线的形状及疏密程度. Thompson 推荐的形式为

$$P(\xi, \eta) = - \sum_{i=1}^n a_i \text{sign}(\xi - \xi_i) \exp(-c_i |\xi - \xi_i|) - \sum_{j=1}^m b_j \text{sign}(\xi - \xi_i) \exp(-d_j \sqrt{(\xi - \xi_i)^2 + (\eta - \eta_i)^2}) \tag{3}$$

$$Q(\xi, \eta) = - \sum_{i=1}^n a_i \text{sign}(\eta - \eta_i) \exp(-c_i |\eta - \eta_i|) - \sum_{j=1}^m b_j \text{sign}(\eta - \eta_i) \exp(-d_j \sqrt{(\xi - \xi_i)^2 + (\eta - \eta_i)^2}) \tag{4}$$

式中: a_i, b_j ——密集强度; c_i, d_j ——衰减因子; $\text{sign}(x)$ ——符号函数; n ——网格线数目; m ——网格点数.

式(3)(4)右侧具体含义是 第一项分别表示 ξ 网格线向等 ξ_i 线靠拢、 η 网格线向等 η_i 线靠拢, $\sum_{i=1}^n$ 表示共有 n 条 ξ_i 为常数或 η_i 为常数网格线附近的网格向它们靠拢,第二项表示各网格点向 (ξ_i, η_i) 点靠拢.

实现坐标变换的方程是(1)(2)的逆变换方程

$$\alpha x_{\xi\xi} - 2\beta x_{\xi\eta} + \gamma x_{\eta\eta} + J^2(Px_{\xi} + Qx_{\eta}) = 0 \tag{5}$$

$$\alpha y_{\xi\xi} - 2\beta y_{\xi\eta} + \gamma y_{\eta\eta} + J^2(Py_{\xi} + Qy_{\eta}) = 0 \tag{6}$$

$$\alpha = x_{\eta}^2 + y_{\eta}^2 \quad \beta = x_{\xi}x_{\eta} + y_{\xi}y_{\eta} \quad \gamma = x_{\xi}^2 + y_{\xi}^2 \quad J = x_{\xi}y_{\eta} - x_{\eta}y_{\xi}$$

实际上,Thompson 调节因子的选取纯粹是从数学上利用 Poisson 方程的性质而产生的表达式.在具体曲线网格计算生成过程中,笔者发现,采用上述调节因子可能会出现如下几个问题:

a. Thompson 建议 a_i 取 10~1 000,由小到大分别表示不同的网格密集强弱变化, a_i 越大,网格越密集.实际上,按此建议却很难形成较好的网格.笔者发现, a_i 取值与实际曲线网格尺度有直接关系,对不同问题,使用时必须作出调整. Thompson 的建议值仅适用于网格实际尺度仅几厘米的情况,对于河道、近海等较大区域流场计算的网格尺度为数米、数十米的情况,数值计算已经不准确了.

b. 调节因子 $P(\xi, \eta), Q(\xi, \eta)$ 中可调整的参数太多,当网格生成不理想时,很难确定该调节哪一个参数才能改善网格,并且网格疏密程度的调节是以一定数量等值 ξ_i, η_i 线为中心,对于大面积水域,计算中局部水域块加密使用不够灵活.

c. 曲线网格生成迭代过程有可能不收敛,而且处于一种波动状态中,并且相似结论也在有关文献中得到证实^[2,3].

d. 参数选取不当,易引起双映射现象.以一维方程为例,设 $\xi_{xx} = -6$,可得 $\xi = 4x - 3x^2$, $\xi \sim x$ 关系曲线见图 1.显而易见,在 $x = \frac{1}{3} \sim 1$ 之间,同一个 ξ 值出现两个 x 值.

e. 生成曲线网格不能保证正交,从而使在此基础上的水流计算基本方程组形式极为复杂,计算难度增加,计算精度降低.

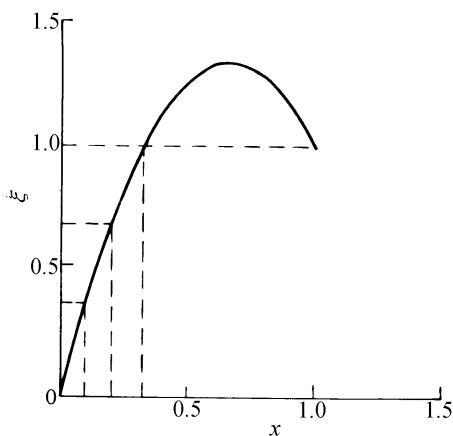


图 1 $\xi \sim x$ 关系曲线
Fig.1 $\xi \sim x$ relative curve

2 微分形式调节因子的导出

2.1 基本思路

自然界存在许多符合椭圆型函数关系的物理现象,如有势流体中的流函数与势函数、温度场中的等温线和热力线等.本文以这些现象为依托生成曲线网格^[4],并导出相应的调节因子.设计算水域内存在一种有势流动,那么水域两侧岸边线是两条流线,即流线簇的边界线已知,域内所有流线可藉这两个确定的流线形成;势线是一组垂直于所有流线的曲线,根据这一原则,可以推求得域内势线簇,此时由流线簇与势线簇构成的线簇便是该水域的曲线网格.

2.2 调节因子的导出

选用二维恒定均匀摩擦流(可证明旋度 $\nabla \times V = 0$)作为生成网格的依托:

$$\frac{1}{\rho} \frac{\partial \eta}{\partial x} + g \frac{\sqrt{u^2 + v^2}}{C^2 H} u = 0 \tag{7}$$

$$\frac{1}{\rho} \frac{\partial \eta}{\partial y} + g \frac{\sqrt{u^2 + v^2}}{C^2 H} v = 0 \tag{8}$$

$$\frac{\partial(Hu)}{\partial x} + \frac{\partial(Hv)}{\partial y} = 0 \tag{9}$$

式中: u, v —— x, y 方向的流速分量; H ——水深; C ——谢才系数; η ——压力势函数.

引进流函数 $\xi(x, y)$,对方程(7)~(9)进行整理,可得方程组

$$\frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \xi}{\partial y^2} = - \frac{\partial \xi}{\partial x} \frac{\partial}{\partial x} (\ln K) - \frac{\partial \xi}{\partial y} \frac{\partial}{\partial y} (\ln K) \tag{10}$$

$$\frac{\partial^2 \eta}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \eta}{\partial y^2} = -\frac{\partial \xi}{\partial x} \frac{\partial}{\partial x} \left(\ln \frac{1}{K} \right) - \frac{\partial \xi}{\partial y} \frac{\partial}{\partial y} \left(\ln \frac{1}{K} \right) \quad (11)$$

$$K = \sqrt{(x_\xi^2 + y_\xi^2)/(x_\eta^2 + y_\eta^2)} \quad (12)$$

进一步对式(10)(11)中右端项进行数学处理,可得调节因子 P, Q 一组新的表达式

$$P = -\frac{\partial(\ln K)}{\partial \xi} \gamma^{-1} \quad (13)$$

$$Q = \frac{\partial(\ln K)}{\partial \eta} \alpha^{-1} \quad (14)$$

对方程(10)(11)进行雅可比变换,并考虑到网格的正交性($\beta = x_\xi x_\eta + y_\xi y_\eta = 0$),可得到正交曲线网格的控制方程

$$\alpha x_{\xi\xi} + \gamma x_{\eta\eta} + J^2(x_\xi P + x_\eta Q) = 0 \quad (15)$$

$$\alpha y_{\xi\xi} + \gamma y_{\eta\eta} + J^2(y_\xi P + y_\eta Q) = 0 \quad (16)$$

式中符号意义同前. 可以发现,式(15)(16)与式(5)(6)类似,保持了 Poisson 方程的形式,但调节因子完全是从不同的角度、不同方法得到的,其隐含的物理背景也完全不一致.

2.3 本文选取的调节因子适用性分析

前已指出,在曲线网格的生成过程中,调节因子量值受到一定控制条件的制约. 因此,选择恰当,可以实现预期疏密调节的目的,选择不当,则会造成计算混乱. 现对本文提出的调节因子的制约条件作扼要分析.

首先考察一维情形:

$$\xi_{xx} = P(\xi)$$

其逆方程为

$$x_{\xi\xi} = -x_\xi^3 P$$

由于一般显式求解较隐式求解控制条件要求要高,本文仅分析按显式求解的情况,此时,

$$x_{\xi\xi} = x_{i+1} - 2x_i + x_{i-1} \quad (\Delta\xi = 1)$$

取

$$x_\xi^3 P = A$$

则

$$x_i = \frac{1}{2}(A + x_{i+1} + x_{i-1})$$

设 x_c 为 x_{i-1} 与 x_{i+1} 间中点, $x_c = (x_{i+1} + x_{i-1})/2$, 所以

$$x_i - x_c = \frac{1}{2}A$$

因为 x_i 不能越出 $x_{i-1} \sim x_{i+1}$ 之间,即 $x_{i-1} < x_i < x_{i+1}$, 否则顺序会发生混乱,故

$$|x_i - x_c| < \frac{1}{2}(x_{i+1} - x_{i-1})$$

而

$$\frac{1}{2}(x_{i+1} - x_{i-1}) = x_\xi|_{\xi=i}$$

因此

$$|A/2| < x_\xi$$

即

$$|P| < 2/x_\xi^2 \quad (17)$$

上式即为按显式计算曲线坐标时调节因子 P 量值应满足的控制条件.

对于二维情形,调节因子的限制条件易由式(17)推广得到,即

$$|P| = \left| \frac{\partial(\ln K)}{\partial \xi} \gamma^{-1} \right| < \frac{2}{x_\xi^2 + y_\xi^2}$$

按差分展开,

$$|\ln K_{i+1} - \ln K_i| < \frac{2\gamma_i}{(x_\xi^2 + y_\xi^2)|_i} = 2 \quad (\text{取 } \Delta\xi_i = 1)$$

$$|\ln(K_{i+1}/K_i)| < 2$$

取

$$w_i = \max[K_{i+1}/K_i, K_i/K_{i+1}]$$

则

$$w_i < e^2 \quad (18)$$

同理,对 Q 有

$$|Q| = \left| \frac{\partial(\ln K)}{\partial \eta} \alpha^{-1} \right| < \frac{2}{x_\eta^2 + y_\eta^2}$$

取 $\Delta \eta_i = 1$,得

$$w_i < e^2$$

(19)

式中 $K = \sqrt{\alpha/\gamma}$ 的物理意义是 实际区域曲线网格的长宽比. 那么, w_i 反映了曲线网格长宽比变化率. 因此, 本文调节因子限制条件为生成的相邻曲线网格长宽比变化率应小于 e^2 . 通常情况下, 相邻两个曲线网格中必有 1 根 ξ 或 η 方向网格长度变化不大. 式(18)(19)也可理解为, 相邻曲线网格在 ξ 或 η 方向上实际长度变幅应小于 e^2 倍. 因此, 该控制条件在实际问题的网格布置中是极易达到的.

3 应用实例

图 2 所示为长江三峡工程河段, 其计算域岸线蜿蜒曲折, 呈一近 90° 弯道, 网格在弯顶处重点研究区域 (茅坪溪附近) 较密^[5], 以适应该区域中物理量变化的情形. 图 3 所示为第二松花江曾通河段, 其计算域为一多连通域, 正交曲线网格较好地适应了岸线及两个江心洲的复杂变化, 为使图形清楚, 图 3 中首尾部分网格在横向上仅输出了一半网格线. 另有许多工程实例, 限于篇幅不能一一列出. 总之, 本文提出的调节因子对工程实际问题中正交曲线网格生成具有良好的适应性, 结果令人满意.

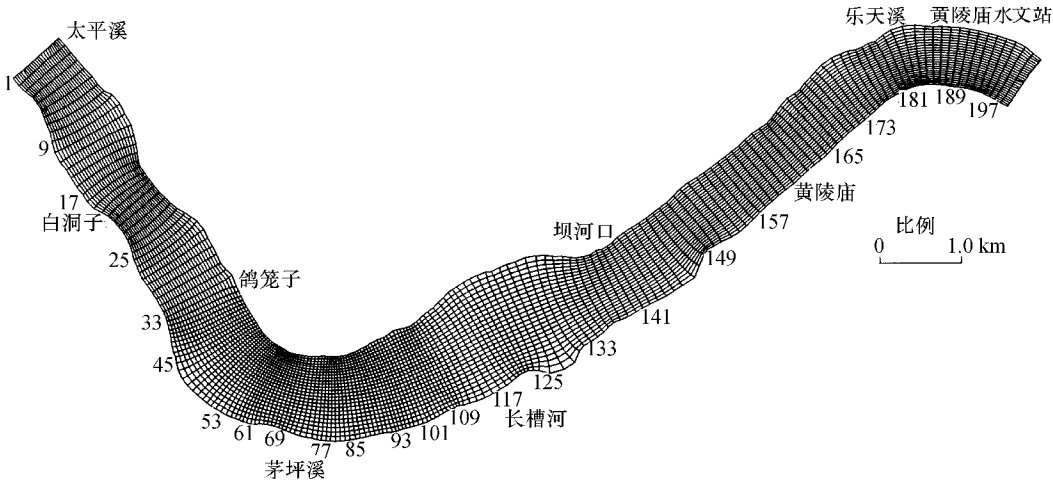


图 2 长江三峡工程河段曲线网格布置

Fig.2 The curvilinear grid layout of the Three Georges project reach

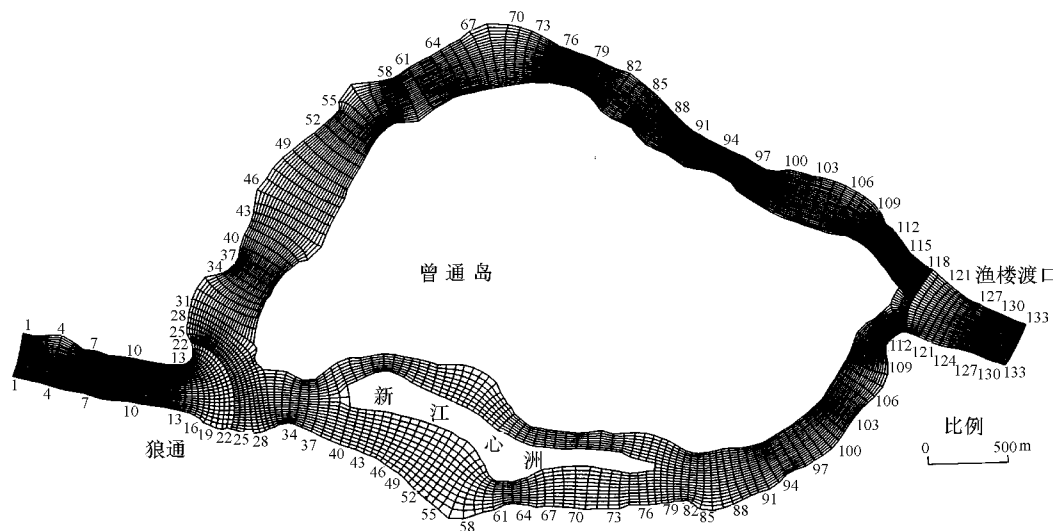


图 3 第二松花江曾通河段曲线网格布置

Fig.3 The curvilinear grid layout of Zengtong reach of the second SongHuajiang river

4 结 论

- a. 研究分析表明,采用 Thompson 建议的调节因子,不利于实际水利工程流场应用中合理而有效地布置网格,且正交曲线网格生成较困难.
- b. 本文视计算区域内曲线网格为某一有势流动的流线簇与势线簇,导出了新型微分形式的调节因子, P, Q 取值分别为 $-\frac{\partial(\ln K)}{\partial \xi}\gamma^{-1}, \frac{\partial(\ln K)}{\partial \eta}\alpha^{-1}$.
- c. 本文提出的调节因子使用的适用性条件为 相邻网格实际长度变化幅度小于 e^2 倍. 这在一般水流流场计算中极易满足.
- d. 本文提出的调节因子能使生成的正交曲线网格较好地适应各种复杂岸线和多连通域情形,是实际水利工程水流问题数值模拟的一种有效手段.

参 考 文 献

1 Thompson J. F Body-fitted coordinate systems for numerical solution of partial differential equations. J Comput Phys, 1982(47) :1 ~ 108

2 马铁犹. 计算流体力学. 北京 北京航空航天大学出版社, 1986. 71 ~ 108

3 武晓松, 吴国钊. 曲线网格自动生成中的源项计算方法. 见 赵大刚等主编. 第六届全国计算流体力学会议论文集. 北京 科学出版社, 1992. 111 ~ 113

4 Hua Zulin. Numerical simulation of flow field in tidal estuary using body - fitted coordinate system. China Ocean Engineering, 1994, 8(4) 447 ~ 455

5 华祖林, 徐健, 华建男. 施工期三峡工程河段流场数值模拟. 水利水运科学研究, 1998, 25(1) 72 ~ 81

Selection of Adjusting Factors in the Generation of Curvilinear Grid

Hua Zulin

(College of Water Resources and Environment, Hohai Univ., Nanjing 210098)

Bian Hua

(College of Water Conservancy and Hydropower Engineering, Hohai Univ., Nanjing 210098)

Abstracts Some problems concerning the adjusting factors in the commonly-used Thompson method in the generation of curvilinear grid are described. From another point of view, with the aid of some natural phenomena which correspond to elliptic function relationship, a new expression of adjusting factors is derived. Moreover, analysis of suitable conditions for the kind of adjusting factors is conducted. Practical application to the Three Georges project reach of the Yangtze River and the Zeng tong reach of the second SongHuajiang river shows that the present grid is effective.

Key words curvilinear grid ; adjusting factor ; suitable condition ; analysis