

一类弹性力学平面矩形域问题的分离变量法^{*}

周建方

卓家寿

(河海大学常州分校 常州 213022)

(河海大学土木工程学院 南京 210098)

摘 要 与传统的半逆解法不一样,采用弹性力学的 Hamilton 理论和分离变量法,推导和求解了侧边为齐次边界条件的平面矩形域问题的解法,并进而把求解思想推广到非齐次边界条件情况,没有采用边界条件齐次化方法,而成功地求出了矩形域非齐次边界条件的解,从而扩展了分离变量法和弹性力学的求解方法.

关键词 弹性力学;平面问题;Hamilton 体系;分离变量法

中图号 O343

在弹性力学中,传统的解法是采用提高微分方程阶次的半逆解法^[1,2],这有时使人难以适从.而在 Hamilton 体系下,则可采用分离变量法,从而使一些问题可以直接求解(与半逆解法相比).在文献[3]中,给出了齐次边界条件分离变量法的主要思想和方法,本文据此首先求解了齐次边界条件的一些具体问题.在此基础上,进一步推广文献[3]中的思想,求解了非齐次边界问题,从而使一类弹性力学问题可以采用直接解法.限于篇幅,本文主要以平面应力矩形域问题为例进行讨论.

1 Hamilton 体系下的弹性力学基本方程及其分离变量法

在 Hamilton 体系下,平面应力问题弹性力学的基本方程为^[3]

$$\frac{\partial \mathbf{w}}{\partial y} = \mathbf{H} \mathbf{w} \tag{1}$$
$$\mathbf{w} = \left(u, v, \sigma_y, \tau_{xy} \right)^T \quad \mathbf{H} = \begin{bmatrix} 0 & -\nu \frac{\partial}{\partial x} & \frac{1-\nu^2}{E} & 0 \\ -\frac{\partial}{\partial x} & 0 & 0 & \frac{\chi(1+\nu)}{E} \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{\partial}{\partial x} \\ 0 & -E \frac{\partial^2}{\partial x^2} & -\nu \frac{\partial}{\partial x} & 0 \end{bmatrix} \tag{2}$$

式中: $\mathbf{w}$ ——混合状态变量; $\mathbf{H}$ ——Hamilton 算子矩阵.

方程(1)可以直接从弹性力学的平衡方程、几何方程、物理方程推得,也可以由能量原理推得.在能量原理下可以看出其正则性.这里没有考虑体力项.

考虑 x 边(侧边)为齐次边界条件(图1)

$$\tau_{xy} = 0 \quad \sigma_x = E \frac{\partial u}{\partial x} + \nu \sigma_y = 0 \quad (\text{当 } x = \pm h \text{ 时}) \tag{3}$$

采用分离变量法,令

$$\mathbf{w}(x, y) = \mathbf{\Psi}(x) \cdot Y(y) \tag{4}$$

其中 $\mathbf{\Psi}(x)$ 是向量, $Y(y)$ 是标量.代入式(1)可得

收稿日期:1998-03-10

第一作者简介:周建方,男,副教授,固体力学专业,主要从事计算力学、工程结构可靠度方面的研究.

^{*} 本文得到水利部中青年学科带头人资金的赞助.

$$H\Psi(x) = \mu\Psi(x) \quad \frac{\partial Y(y)}{\partial y} = \mu Y(y) \quad (5)$$

第一式为特征方程, μ 为特征值, $\Psi(x)$ 为特征函数向量, 求解时必须考虑边界条件(3). 第二式解很容易求得, 当求出 $\Psi(x)$, $Y(y)$ 后, 代入式(4), 再根据两端边界条件($y=0, l$)定出常数, 则问题就得解. 当然, 这种做法的合理性取决于这些特征解在全状态函数向量空间的完备性^[4].

现在, 问题归结于求解特征方程. 文献[3]证明, 其特征值可分为 $\mu=0$ 和 $\mu \neq 0$ 两部分, 对应 $\mu \neq 0$ 的解在横截面上是自相平衡的力系, 是由圣维南原理覆盖掉的解, 对此我们不感兴趣. 这样, 特征值还有一种情况是 $\mu=0$, 对此特征方程为

$$H\Psi(x) = 0 \quad (6)$$

根据原特征方程可以证明^[3] $\mu=0$ 是其六重特征根. 由于 H 是不对称矩阵, 因此有约当型解, 通过求解, 有结果:

$$\begin{aligned} \Psi_1 &= (1 \ 0 \ 0 \ 0)^T & w_1 &= \Psi_1 \\ \Psi_2 &= (0 \ 1 \ 0 \ 0)^T & w_2 &= \Psi_2 \end{aligned} \quad (7)$$

一阶约当型解:

$$\begin{aligned} H\Psi_3 &= \Psi_1 & \Psi_3 &= (0 \ -\nu x + c_1 \ E \ 0)^T & w_3 &= \Psi_3 + y\Psi_1 \\ H\Psi_4 &= \Psi_2 & \Psi_4 &= (-x \ 0 \ 0 \ 0)^T & w_4 &= \Psi_4 + y\Psi_2 \end{aligned} \quad (8)$$

二阶及三阶约当型解:

$$\begin{aligned} H\Psi_5 &= \Psi_4 & \Psi_5 &= \left(0, \frac{\nu}{2}x^2 - \left(\frac{2}{5} + \frac{\nu}{2}\right)h^2, -Ex, 0\right)^T & w_5 &= \Psi_5 + y\Psi_4 + \frac{y^2}{2}\Psi_2 \\ H\Psi_6 &= \Psi_5 & \Psi_6 &= \left(-\left(\frac{3}{5} + \frac{\nu}{2}\right)h^2x + \frac{2+\nu}{6}x^3 - \frac{G}{3}h^2, 0, \frac{E}{2}(x^2 - h^2)\right)^T & w_6 &= \Psi_6 + y\Psi_5 + \frac{y^2}{2}\Psi_4 + \frac{y^3}{6}\Psi_2 \end{aligned} \quad (9)$$

其中 Ψ_i 间有共轭辛正交关系, w_i 是方程(1)的特解. 这里与文献[3]稍有不同的是多了常数 c_1 , 这是为了后面讨论非齐次边界问题的需要. 通解为

$$w = \sum_{i=1}^6 a_i w_i = \begin{bmatrix} a_1 + a_3 y - a_4 x - a_5 xy + a_6 \left[-\left(\frac{3}{5} + \frac{\nu}{2}\right)h^2 x + \frac{2+\nu}{6}x^3 - \frac{G}{3}h^2 - \frac{1}{2}xy^2 \right] \\ a_2 + a_3 \left(c_1 - \nu x \right) + a_4 y + a_5 \left[\frac{\nu}{2}x^2 - \left(\frac{2}{5} + \frac{\nu}{2}\right)h^2 + \frac{y^2}{2} \right] + a_6 \left[\frac{\nu}{2}x^2 y - \left(\frac{2}{5} + \frac{\nu}{2}\right)h^2 y + \frac{y^3}{6} \right] \\ a_3 E - a_5 Ex - a_6 Exy \\ a_6 \frac{E}{2}(x^2 - h^2) \end{bmatrix} \quad (10)$$

而

$$\sigma_x = E \frac{\partial u}{\partial x} + \nu \sigma_y = 0$$

2 齐次边界问题的求解

有了方程(10), 只需要根据两端边界条件定出常数 $a_1 \sim a_6$ 和 c_1 , 就可以求出问题的解. 下面考虑两例.

2.1 矩形梁的纯弯曲(图1)

两端条件为

$$\tau_{xy}|_{y=0} = \tau_{xy}|_{y=l} = 0 \quad \int_{-h}^h \sigma_y dx = 0 \quad \int_{-h}^h \sigma_y x dx = M$$

分别代入式(10)第4、3式, 可得

$$a_3 = a_6 = 0 \quad a_5 = -3M/(2Eh^3)$$

从而得应力

$$\sigma_y = 3Mx/(2h^3) \quad \tau_{xy} = 0$$

如果是简支梁, 则有位移约束条件

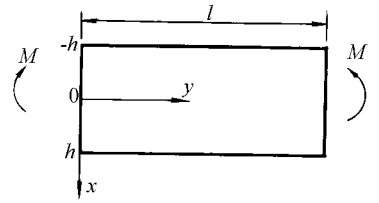


图1 矩形域齐次边界条件情况

Fig.1 Homogeneous boundary conditions in rectangle domain

$$u \Big|_{\substack{x=0 \\ y=0}} = u \Big|_{\substack{x=0 \\ y=l}} = v \Big|_{\substack{x=0 \\ y=l}} = 0$$

代入式 (10) 第 1、2 式, 可得

$$a_1 = 0 \qquad a_2 = -\frac{3M}{2Eh^3}\left(\frac{2}{5} + \frac{\nu}{2}\right)h^2 \qquad a_4 = \frac{3Ml}{4Eh^3}$$

从而有

$$u = \frac{3M}{4Eh^3}(ly - \nu x^2 - y^2) \qquad v = \frac{3M}{2Eh^3}\left(y - \frac{l}{2}\right)x$$

结果与文献 [2] 的完全一致.

2.2 端点受载荷悬臂梁的弯曲 (图 2)

左端应力边界条件为

$$\int_{-h}^h \tau_{xy} dx = -p \qquad \int_{-h}^h \sigma_{xy} dx = 0 \qquad \int_{-h}^h \sigma_y x dx = 0$$

代入式 (10) 第 4、3 式, 可得

$$a_3 = a_5 = 0 \qquad a_6 = 3P/(2Eh^2)$$

从而得应力

$$\sigma_y = -\frac{3P}{2h^3}xy \qquad \tau_{xy} = \frac{3P}{4h^3}(x^2 - h^2)$$

结果与文献 [1] 的完全一样. 至于位移分量, 只要根据右端位移约束条件, 代入式 (10) 第 1、2 式, 同样可以求得, 这里为节省篇幅, 不再列出.

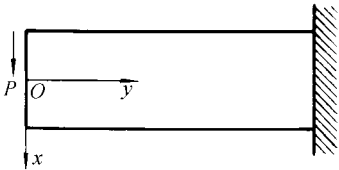


图 2 悬臂梁受集中荷载示意图
Fig.2 Concentrated load on cantilever beam

3 非齐次边界问题

不失一般性, 若考虑侧边上 $\sigma_x \neq 0$ 的情况. 对于 $\tau_{xy} \neq 0$ 情况类似且要简单. 对于 σ_x, τ_{xy} 都不等于零的情况, 则可应用叠加原理. 首先考虑边界上 σ_x 为常量的情况.

3.1 侧边上 $\sigma_x = q$ 的情况

此时边界条件为

$$\left. \begin{aligned} \tau_{xy} &= 0 & \sigma_x &= E \frac{\partial u}{\partial x} + \nu \sigma_y = q_1 & \text{当 } x &= -h \\ \tau_{xy} &= 0 & \sigma_x &= E \frac{\partial u}{\partial x} + \nu \sigma_y = q_2 & \text{当 } x &= h \end{aligned} \right\} \quad (11)$$

对于非齐次边界条件, 按照一般的分离变量法^[5], 是首先进行边界条件齐次化. 而目前在非齐次边界条件中包含 u 和 σ_y 两个函数, 要进行齐次化是困难的. 在文献 [3] 中, 提出了求特解的想法, 即由方程

$$H\Psi_7 = \Psi_6 \quad (12)$$

求出满足边界条件 (1) 的解. 然而, 这也只是一些特殊情况才有解析解, 尤其当非齐次边界条件的右端为 y 的函数时, 此法会失效. 这里, 改变一下文献 [3] 的做法, 即先求方程 (12) 的解, 而暂不考虑非齐次边界条件, 其结果为

$$\Psi_7 = \begin{bmatrix} 0 \\ -\frac{1+2\nu}{24}x^4 + \frac{h^2}{4}x^2\left(1 + \frac{6}{5}\nu\right) + \frac{h^2}{3}c_1\nu x - c_2(1-\nu^2)x \\ \frac{E}{3}x^3 - \frac{3}{5}Eh^2x - \frac{h^2}{3}c_1E - c_2E\nu \\ 0 \end{bmatrix} \quad (13)$$

式中 c_2 为积分常数. 这样满足方程 (1) 的又一特解为

$$w_7 = \Psi_7 + y\Psi_6 + \frac{y^2}{2}\Psi_5 + \frac{y^3}{6}\Psi_4 + \frac{y^4}{24}\Psi_2 \quad (14)$$

最后通解为: $w_7 = \sum_{i=1}^7 a_i w_i$, 再考虑两端边界条件和式 (11) 中的非齐次边界条件, 即可定出常数 a_i 和

c_i . 为了说明方法的有效性,下面计算两个例子的应力分量,位移分量可类似求得.首先,写出应力分量通解表达式(其中 σ_x 由 $E \frac{\partial u}{\partial x} + \nu \sigma_y$ 求得):

$$\begin{bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_7 E \left[\frac{x}{2} \left(h^2 - \frac{x^2}{3} \right) - c_2 \right] \\ a_3 E - a_5 E x - a_6 E x y + a_7 \left(\frac{E}{3} x^3 - \frac{3}{5} E h^2 x - \frac{h^2}{3} c_1 E - c_2 E \nu - \frac{E}{2} x y^2 \right) \\ a_6 \frac{E}{2} (x^2 - h^2) + a_7 \frac{E}{2} (x^2 - h^2) y \end{bmatrix} \quad (15)$$

例1 悬臂梁受均布荷载(图3).此时式(11)中 $q_1 = -q$, $q_2 = 0$.左端条件为

$$\int_{-h}^h \tau_{xy} dx = \int_{-h}^h \sigma_y dx = \int_{-h}^h \sigma_y x dx = 0$$

代入式(15),求得

$$a_3 - \frac{h^2}{3} a_7 c_1 = \frac{q}{2} \frac{\nu}{E} \quad a_5 = -\frac{3q}{5Eh}$$

$$a_6 = 0 \quad a_7 = \frac{3q}{2Eh^3} \quad c_2 = \frac{h^3}{3}$$

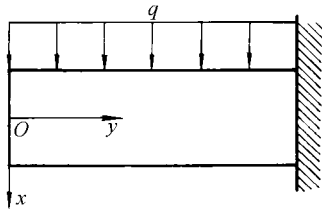


图3 悬臂梁均布荷载示意图

Fig.3 Uniformly distributed load on cantilever beam

从而应力为

$$\begin{bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{3q}{2h^3} \left[\frac{x}{2} \left(h^2 - \frac{x^2}{3} \right) - \frac{h^3}{3} \right] \\ \frac{3qx}{2h^3} \left(\frac{x^2}{3} - \frac{h^2}{5} - \frac{y^2}{2} \right) x \\ \frac{3q}{4h^3} (x^2 - h^2) y \end{bmatrix}$$

此结果与用应力函数求解的相同^[6].

例2 简支梁受均布荷载(图4).此时式(11)中,仍有 $q_1 = -q$, $q_2 = 0$.两端条件为

$$\begin{aligned} \int_{-h}^h \tau_{xy} |_{y=-l} dx &= ql & \int_{-h}^h \sigma_y |_{y=-l} dx &= \int_{-h}^h \sigma_y |_{y=l} dx = 0 \\ \int_{-h}^h \tau_{xy} |_{y=l} dx &= -ql & \int_{-h}^h \sigma_y |_{y=-l} x dx &= \int_{-h}^h \sigma_y |_{y=l} x dx = 0 \end{aligned}$$

分别代入式(15),求得(有的条件自动满足)

$$a_3 - \frac{h^2}{3} a_7 c_1 = \frac{q\nu}{2E} \quad a_5 = -\frac{3q}{5Eh} - \frac{3ql^2}{4Eh^3}$$

$$a_6 = 0 \quad a_7 = \frac{3q}{2Eh^3} \quad c_2 = \frac{h^3}{3}$$

从而应力为

$$\begin{bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{3q}{2h^3} \left[\frac{x}{2} \left(h^2 - \frac{x^2}{3} \right) - \frac{h^3}{3} \right] \\ \frac{3qx}{2h^3} \left(\frac{x^2}{3} - \frac{h^2}{5} + \frac{l^2}{2} - \frac{y^2}{2} \right) \\ \frac{3q}{4h^3} (x^2 - h^2) y \end{bmatrix}$$

此结果与文献[1]中的相同.

3.2 侧边上 $\sigma_x = qy$ 的情况

侧边上 $\sigma_x = qy$ 时,侧边界条件为

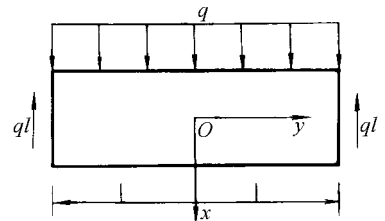


图4 简支梁受均布荷载示意图

Fig.4 Uniformly distributed load on simple supported beam

$$\left. \begin{aligned} \tau_{xy} &= 0 & \sigma_x &= E \frac{\partial u}{\partial x} + \nu \sigma_y = q_1 y & \text{当 } x &= -h \\ \tau_{xy} &= 0 & \sigma_x &= E \frac{\partial u}{\partial x} + \nu \sigma_y = q_2 y & \text{当 } x &= h \end{aligned} \right\} \quad (16)$$

为了求解这种边界条件下问题的解 ,类似于上面 ,先求出方程 $H\Psi_8 = \Psi_7$ 的解 ,即

$$\Psi_8 = \begin{bmatrix} -\frac{x^5}{120}(3 + 2\nu) + \frac{h^2 x^3}{60}(7 + 6\nu) - \frac{13h^4 x}{30}(1 + \nu) \\ \frac{E}{60}(-5x^4 + 18h^2 x^2 - 13h^4) \end{bmatrix} \quad (17)$$

这里已经满足 $\tau_{xy} = 0$ 的侧边界条件. 这样 ,满足方程 (1) 的又一特解为

$$w_8 = \Psi_8 + y\Psi_7 + \frac{y^2}{2}\Psi_6 + \frac{y^3}{6}\Psi_5 + \frac{y^4}{24}\Psi_4 + \frac{y^5}{120}\Psi_2 \quad (18)$$

通解为 $w = \sum_{i=1}^8 a_i w_i$ 相应的应力分量为

$$\begin{bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_7 E \left[\frac{x}{2} \left(h^2 - \frac{x^2}{3} \right) - c_2 \right] + a_8 E y \left[\frac{x}{2} \left(h^2 - \frac{x^2}{3} \right) - c_2 \right] \\ a_3 E - a_5 E x - a_6 E x y + a_4 \left(\frac{E}{3} x^3 - \frac{3}{5} E h^2 x - \frac{E}{2} x y^2 \right) + a_8 y \left(\frac{E}{3} x^3 - \frac{3}{5} E h^2 x \right) - \frac{E}{6} x y^3 \\ a_6 \frac{E}{2} (x^2 - h^2) + a_7 \frac{E}{2} (x^2 - y^2) y + a_4 \frac{E}{60} (-5x^4 + 18h^2 x^2 - 13h^4) + \frac{E y^2}{4} (x^2 - h^2) \end{bmatrix} \quad (19)$$

再考虑两端边界条件和式 (16) 中非齐次边界条件 ,即可定出常数. 下面计算一例.

例 3 承受静水压力的铅直悬臂梁 (图 5). 此时式 (16) 中 $q_1 = 0, q_2 = -q$,顶端条件类似于例 1 ,为

$$\int_{-h}^h \tau_{xy} dx = \int_{-h}^h \sigma_y dx = \int_{-h}^h \sigma_x x dx = 0$$

代入式 (19) 可得

$$a_3 = a_5 = a_7 = 0 \quad a_6 = \frac{3q}{5Eh} \quad a_8 = -\frac{3q}{2Eh^3} \quad c_2 = -\frac{h^3}{3}$$

最后应力为

$$\begin{bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{3qy}{2h^3} \left(\frac{h^2 x}{2} - \frac{x^3}{6} + \frac{h^3}{3} \right) \\ \frac{qxy^3}{4h^3} - \frac{qx^3 y}{2h^3} + \frac{3qxy}{10h} \\ -\frac{3qy^2}{8h^3} (x^2 - h^2) - \frac{3q}{2h^3} \left(-\frac{x^4}{12} + \frac{h^2 x^2}{10} - \frac{h^4}{60} \right) \end{bmatrix}$$

此结果与文献 [1] 完全一样.

4 结 束 语

与通常的分离变量法处理非齐次边界条件的方法不同 ,本文采用先求通解 ,然后再满足边界条件的方法. 虽然文中仅给出到 y 一次函数变化的边界条件情况 ,但从推导可以看出求解的一般过程 ,从而对于边界条件是 y 的 n 次函数变化的情况 ,利用本文方法可以求出通解. 在极坐标中 ,也可有类似的结果. 对于层状结构的组合梁 ,应用本文的方法和结果 ,也可求得解析解. 因此 ,这里几乎能找到半逆解法的所有解. 随着研究的深入 ,或许还能发现以前未发现的解.

与弹性力学的半逆解法相比 ,分离变量法可以直接求出通解 ,然后只要根据边界条件求出问题的解 ,其求解过程有规律可循 ,而且位移和应力可以一起求出. 从解的表达式还可以看出解的构成情况 ,从而有助于问题的分析. 如果再考虑特征值不等于零的解 ,则可以求得完全满足边界条件的解. 所以分离变量具有较好的优越性 ,而这些只有在 Hamilton 体系下才能做到.

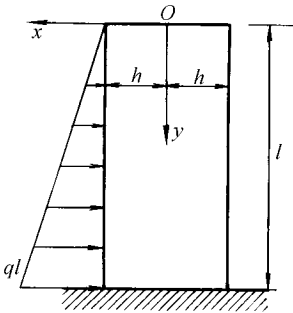


图 5 悬臂梁受静水压力示意图
Fig.5 Static water pressure in cantilever beam

参 考 文 献

1 铁摩辛柯,古地尔著.弹性理论.徐芝纶译.北京:高等教育出版社,1990.37~74
2 徐芝纶.弹性力学:上册.北京:人民教育出版社,1979.12~67
3 钟万勰.弹性力学求解新体系.大连:大连理工大学出版社,1995.62~79
4 张鸿庆,阿拉坦仓,钟万勰.Hamilton体系与辛正交系的完备性.应用数学和力学,1997,18(3):217~221
5 南京工学院数学教研组.数学物理方程与特殊函数.北京:人民教育出版社,1979.36~43
6 杜庆华,余寿文,姚振汉.弹性理论.北京:科学出版社,1986.153~158

Separation of Variables of a Group of Plane Elasticity Problems in Rectangular Domain

Zhou Jianfang

(Hohai Univ. Changzhou Branch , Changzhou 213022)

Zhuo Jiashou

(College of Civil Engineering ,Hohai Univ. ,Nanjing 210098)

Abstract The solutions of plane elasticity problems with homogeneous boundary conditions are constructed by using Hamilton theory and the method of separation of variables. This method is also used in sloving problems with nonhomogenous boundary conditions ,thus the method for elasticity problems is expanded.

Key words theory of elasticity ,plane problem ,Hamilton system ,variable separation