

中立型泛函微分方程的 Lipschitz 一致渐近稳定性和周期解

梁 伟 荆江雁

(河海大学常州分校 常州 213022)

摘 要 首先讨论了中立型泛函微分方程 $\frac{d}{dt}Dx_t = f(t, x_t)$ 的 Lipschitz 一致渐近稳定性,给出了(变分)Lipschitz 一致渐近稳定成立的充分条件,其次利用变分 Lipschitz 一致渐近稳定性讨论了该方程周期解的存在性,并给出了存在定理.

关键词 中立型泛函微分方程; Lipschitz 一致渐近稳定; 变分 Lipschitz 一致渐近稳定; 周期解

中图分类号 O175

本文讨论中立型泛函微分方程 $\frac{d}{dt}Dx_t = f(t, x_t) \quad x_\sigma = \phi$ (1)

其中 D, f 均为 $\Omega \rightarrow R^n$ 的连续泛函; Ω 为 $E \times C$ 中的开子集; D 在 Ω 上于 0 处是原子的. 这里总假设 $r \geq 0$ 是给定的实数, $R = (-\infty, +\infty)$, R^n 是具有模 $|\cdot|$ 的 n 维线性向量空间. 令 $C = C[-r, 0], R^n$ 对任意 $\phi \in C$, 定义中的模为 $\|\phi\| = \sup_{-r \leq \theta \leq 0} |\phi(\theta)|$, 若 $\sigma \in R, A \geq 0, x \in C[\sigma - r, \sigma + r], R^n$, 那么对任何 $t \in [\sigma, \sigma + A]$, 令 $x_t \in C, x_t(\theta) = x(t + \theta), -r \leq \theta \leq 0, f(t, 0) \equiv 0$ 且 $f(t, \phi)$ 关于 ϕ 在 Ω 的紧子集上满足 Lipschitz 条件, 方程 (1) 的解满足解的存在唯一性和解对初值的连续依赖性条件.

设 $x_\sigma(\sigma, \phi)$ 是方程 (1) 过 $(\sigma, \phi) \in \Omega$ 的唯一解. 此解关于方程 (1) 的变分方程为

$$\frac{d}{dt}Dz_t = f_x(t, x_\sigma(\sigma, \phi), z_t) \quad z_\sigma(\sigma, \phi) = \phi \quad t \geq \sigma \quad (2)$$

特别地, 对方程 (1) 的平凡解的变分方程可写成 $\frac{d}{dt}Dz_t = L(t, z_t)$ (3)

这里 $L: \Omega \rightarrow R^n$ 是线性连续函数.

类似文 [1] 中的两个定义, 可定义中立型泛函微分方程中的(变分)Lipschitz 一致渐近稳定性的概念.

定义 1 称方程 (1) 的零解是 Lipschitz 一致渐近稳定的, 若存在非负连续函数 $M(t, \sigma), t \geq \sigma$, 满足条件 $\lim_{t \rightarrow \infty} M(t, \sigma) = 0$, 对 $\sigma \in R$ 一致成立) 以及常数 $\delta > 0$, 对任何 $\sigma \in R$, 使得当 $\|\phi\| < \delta$ 时, 有 $\|x_\sigma(\sigma, \phi)\| \leq M(t, \sigma)\|\phi\| (t \geq \sigma)$.

定义 2 称方程 (1) 的零解是变分 Lipschitz 一致渐近稳定的, 如果存在非负连续函数 $M(t, \sigma), t \geq \sigma$, 满足条件 $\lim_{t \rightarrow \infty} M(t, \sigma) = 0$, 对 $\sigma \in R$ 一致成立) 以及常数 $\delta > 0$, 对任何 $\sigma \in R$, 使得当 $\|\phi\| < \delta$ 时, 有 $\|\Phi(t, \sigma, \phi)\| \leq M(t, \sigma)\|\phi\| (t \geq \sigma)$.

其中 $\Phi(t, \sigma, \phi) = \frac{\partial}{\partial \phi} x_\sigma(\sigma, \phi); x_\sigma(\sigma, \phi)$ 是方程 (1) 的解.

1 (变分)Lipschitz 一致渐近稳定性的判别

把方程 (1) 的右端函数 $f(t, x_t)$ 写成 $f(t, x_t) = L(t, x_t) + g(t, x_t) \quad g \in L'$ (4)

其中 $L(t, x_t)$ 是方程 (3) 的右端且关于 x_t 是线性的.

定理 1 如果方程 (1) 满足条件 (a) $g(t, x_t) \leq b(t) \|x_t\|$, $b(t)$ 为连续函数 $\|b\| T(t, s, x_t) \leq \exp(\int_s^t u(\tau) d\tau)$ $t \leq s \leq \sigma$, $T(t, s, x_t)$ 为方程 (3) 的解算子, 且 $z_t(\sigma, \phi) = T(t, \sigma)\phi$, $u(t)$ 为非正连续函数, (c) $\int_{\sigma}^{+\infty} (u(t) + h(t)) dt = -\infty$, 则方程 (1) 的零解是 Lipschitz 一致渐近稳定的.

证明 利用文 [2] 中的 Alekseev's 常数变易公式和 Bellman 不等式易得.

考虑“广义”差分方程
$$Dx_t = h(t) \quad t \geq \sigma, x_\sigma = \phi \tag{5}$$

其中 $\phi \in C, h \in C[\sigma, \infty), R^n$.

定义 3 称 (5) 式中算子为一致稳定的, 如果存在常数 $\alpha > 0, \beta > 0$, 使对方程 (5) 的解 $x(t) \equiv x(t, \sigma, \phi)$ 则有
$$\|x_t\| \leq \exp[-\alpha(t - \sigma)]\beta \|\phi\| + \beta \sup_{\sigma \leq s \leq t} |h(s)| \tag{6}$$

定理 2 如果存在一个连续的 Liapunov 泛函 $V(t, x)$ 和函数 $g(t, u) \in C[\sigma, \infty) \times R^n, R^+$ 且 $g(t, 0) \equiv 0$ 使得 (a) D 一致渐近稳定 (b) $|Dx_t| \leq V(t, x) \leq \|x_t\|$ (c) $V(t, x_t) \leq g(t, V(t, x_t))$ (d) 常微分方程

$$\dot{u}(t) = g(t, u) \quad t \geq \sigma, u_0 = u(\sigma) > 0 \tag{7}$$

的零解 Lipschitz 一致渐近稳定, 则方程 (1) 的零解变分 Lipschitz 一致渐近稳定.

证明 由 (d) 知, 存在非负连续函数 $M_1(t, \sigma)$ $t \geq \sigma$, 满足 $\lim_{t \rightarrow \infty} M_1(t, \sigma) = 0$ 对 $\sigma \in \mathbf{R}$ 一致成立, 以及常数 $\delta > 0$, 对任何 $\sigma \in \mathbf{R}$, 使得当 $|u_0| < \delta$, 有 $u(t, \sigma, u_0) \leq M_1(t, \sigma)|u_0|$ ($t \geq \sigma$).

选取 $u_0 = V(\sigma, \phi)$, 这里 $|u_0| < \delta, \|\phi\| < \delta$. 由文 [3] 中的比较定理 1.4.1, 有

$$V(t, x_t) \leq \chi(t, \sigma, \phi) \quad t \geq \sigma \tag{8}$$

其中 $\chi(t, \sigma, u_0)$ 是方程 (7) 的最大解. 再由 (8) 及条件 (b), 对一切 $t \geq \sigma$, 有

$$\begin{aligned} |Dx_t| &< V(t, x_t) \leq \chi(t, \sigma, u_0) \leq M_1(t, \sigma)\|u_0\| = M_1(t, \sigma)|V(\sigma, \phi)| \leq M_1(t, \sigma)\|\phi\| \\ \text{令 } x_t(\sigma, \phi) &= x_t(\sigma, \phi_2) - x_t(\sigma, \phi_1) \quad (\phi = \phi_2 - \phi_1, \phi_1, \phi_2 \in C, \|\phi_1\| < \delta, \|\phi_2\| < \delta), \text{ 则} \\ |D(x_t(\sigma, \phi_2) - x_t(\sigma, \phi_1))| &\leq M_1(t, \sigma)\|\phi_2 - \phi_1\|. \end{aligned}$$

由条件 (4) 知

$$\begin{aligned} \|x_t(\sigma, \phi_2) - x_t(\sigma, \phi_1)\| &\leq \exp[-\alpha(t - \sigma)]\beta \|\phi_2 - \phi_1\| + \beta M_1(t, \sigma)\|\phi_2 - \phi_1\| = \\ &[\exp[-\alpha(t - \sigma)]\beta + \beta M_1(t, \sigma)]\|\phi_2 - \phi_1\| \triangleq M(t, \sigma)\|\phi_2 - \phi_1\|. \end{aligned}$$

其中 $\lim_{t \rightarrow \infty} M(t, \sigma) = \lim_{t \rightarrow \infty} [\exp[-\alpha(t - \sigma)]\beta + \beta M_1(t, \sigma)] = 0$.

令 $\xi(\lambda) = \phi_1 + \lambda(\phi_2 - \phi_1) \in C, \lambda \in [0, 1]$, 由 $\frac{d}{d\lambda} x_t(\sigma, \xi(\lambda)) = \frac{\partial}{\partial \xi} x_t(\sigma, \xi(\lambda)) \cdot \frac{d\xi}{d\lambda} = \Phi(t, \sigma, \xi(\lambda))(\phi_2 - \phi_1)$

$$\begin{aligned} \text{则有} \quad \Phi(t, \sigma, \phi_1)(\phi_2 - \phi_1) &= \frac{d}{d\lambda} x_t(\sigma, \xi(\lambda)) \Big|_{\lambda=0} = \lim_{\lambda \rightarrow 0} \frac{x_t(\sigma, \xi(\lambda)) - x_t(\sigma, \phi_1)}{\lambda} \\ \|\Phi(t, \sigma, \phi_1)(\phi_2 - \phi_1)\| &= \left\| \lim_{\lambda \rightarrow 0} \frac{x_t(\sigma, \xi(\lambda)) - x_t(\sigma, \phi_1)}{\lambda} \right\| \leq \lim_{\lambda \rightarrow 0} \frac{\|x_t(\sigma, \xi(\lambda)) - x_t(\sigma, \phi_1)\|}{|\lambda|} \leq \\ \lim_{\lambda \rightarrow 0} \frac{M(t, \sigma)\|\phi_1 + \lambda(\phi_2 - \phi_1) - \phi_1\|}{|\lambda|} &\leq M(t, \sigma)\|\phi_2 - \phi_1\| \quad t \geq \sigma \end{aligned}$$

所以有
$$\|\Phi(t, \sigma, \phi_1)\| \leq M(t, \sigma) \quad t \geq \sigma$$

故方程 (1) 的零解是变分 Lipschitz 一致渐近稳定的.

定理 3 假设存在一个 Liapunov 泛函 $V(t, x)$ 和函数 $g(t, u)$ 满足条件 (a) D 一致稳定 (b) 对 $\forall k > 0$, 有 $[\lambda_1(t)|Dx_t|]^k \leq V(t, x_t) \leq [\lambda_2(t)\|x_t\|]^k$, $\lambda_1(t)$ 和 $\lambda_2(t)$ 是正的连续函数且 $\lambda_2(t_0) \leq \lambda_1(t)$ (c) $V(t, x_t) \leq g(t, V(t, x_t))$ (d) 方程 (7) 的零解 Lipschitz 一致渐近稳定, 则方程 (1) 的零解是变分 Lipschitz 一致渐近稳定的.

2 周期解的存在定理

令 $X = BC = \{\phi: [-r, 0] \rightarrow R^n, \phi \text{ 是连续有界的}\}$, 易证 $X = BC$ 是完备度量空间.

引理 1^[4] 设 $P: X \rightarrow X$ 是完备度量空间 $X = (X, P)$ 上的连续映象, 在 X 上对某个正整数 m, P^m 是压缩的, 那么 P 有唯一的不动点.

引理 2 设 Δ 是 Ω 的一个开子集, $\bar{\Delta} \subset \Omega$ 是凸集. 如果 $\phi_1, \phi_2 \in \bar{\Delta}$ 且 $\lambda \in [0, 1]$ 那么有

$$x(\sigma, \phi_2) - x(\sigma, \phi_1) = \int_0^1 \Phi(t, \sigma, \xi(\lambda)) (\phi_2 - \phi_1) d\lambda$$

其中: $\xi(\lambda) = \phi_1 + \lambda(\phi_2 - \phi_1) \in \bar{\Delta}$; x_t 是方程 (1) 的解.

本文在 $\mathcal{C}(\sigma) = \{\phi: [\sigma - \gamma, \sigma] \rightarrow \mathbb{R}^n, \phi \text{ 是连续有界的}\}$ 中讨论方程 (1) 的周期解的存在定理.

定理 4 如果方程 (1) 满足条件 (a) $f(t, \phi) = f(t + T, \phi)$ ($T > 0$) (b) 方程 (1) 的零解是变分 Lipschitz 一致渐近稳定的, 那么方程 (1) 存在周期解.

证明 对任意 $\phi \in \mathcal{C}(\sigma)$, 设 $x_t(\sigma, \phi)$ 是方程 (1) 过 (σ, ϕ) 的唯一解, 我们定义 Poincare 算子 $P: \mathcal{C}(\sigma) \rightarrow \mathcal{C}(\sigma)$, 令 $P\phi = x_{\sigma+\gamma}(\sigma, \phi)$, 显然 P 是连续算子. 这里 $x_{t+\gamma}(\sigma, \phi)$ ($t \geq \sigma$) 是方程 (1) 的解, 初值函数为 $P\phi$.

又因为 $x_{\sigma+\gamma}(\sigma, \phi) = P\phi = x_\sigma(\sigma, P\phi)$, 由唯一性定理知 $x_{t+\gamma}(\sigma, \phi) = x_t(\sigma, P\phi)$ ($\sigma - \gamma \leq t \leq \sigma$), 由算子的定义知 $P^2\phi = P(P\phi) = x_{\sigma+\gamma}(\sigma, P\phi)$. 这里 $x_{t+\gamma}(\sigma, P\phi)$ 是方程 (1) 的解, 初值函数为 $P^2\phi$. 又因为 $x_{\sigma+\gamma}(\sigma, P\phi) = P^2\phi = x_\sigma(\sigma, P^2\phi)$, 由唯一性定理知 $x_{t+\gamma}(\sigma, P\phi) = x_t(\sigma, P^2\phi)$, 且有 $x_{t+2\gamma}(\sigma, \phi) = x_{t+\gamma}(\sigma, P\phi) = x_t(\sigma, P^2\phi)$. 依上述方法, 一般有

$$x_{t+m\gamma}(\sigma, \phi) = x_t(\sigma, P^m\phi) \quad x_{\sigma+m\gamma}(\sigma, \phi) = P^m\phi \quad (\sigma - \gamma \leq t \leq \sigma)$$

由条件 (b) 可知, 存在一个非负连续函数 $M(t, \sigma)$, 使得 $\|\Phi(t, \sigma, \xi(\lambda))\| \leq M(t, \sigma)$ ($t \geq \sigma$). 这里 $\lim_{t \rightarrow \infty} M(t, \sigma) = 0$, 对 $\sigma \in \mathbb{R}$ 一致成立. 显然有 $\lim_{n \rightarrow \infty} M(\sigma + nT, \sigma) = 0$, 那么对常数 θ ($0 < \theta < 1$), 存在自然数 m , 使得 $M(\sigma + mT, \sigma) \leq \theta < 1$.

利用引理 2 有 $\|x_{\sigma+m\gamma}(\sigma, \phi) - x_{\sigma+m\gamma}(\sigma, \psi)\| \leq \int_0^1 \|\Phi(t, \sigma, \xi(\lambda))\| d\lambda \|\phi - \psi\| \leq \theta \|\phi - \psi\|$. 这就表明 $\|P^m\phi - P^m\psi\| = \|x_{\sigma+m\gamma}(\sigma, \psi) - x_{\sigma+m\gamma}(\sigma, \phi)\| \leq \theta \|\phi - \psi\|$ 即算子 P^m 是压缩算子. 由引理 1 知 P 存在一个不动点, 所以方程存在周期解.

定理 5 假设存在一个 Liapunov 泛函 $V(t, x_t)$ 和函数 $g(t, u) \in C([\sigma, \infty) \times \mathbb{R}^n, \mathbb{R}^+)$, 且 $g(t, 0) \equiv 0$, 满足条件 (a) $f(t + T, \phi) = f(t, \phi)$ ($T > 0$) (b) D 一致稳定 (c) $|Dx_t| \leq V(t, x_t) \leq \|x_t\|$ (d) $\dot{V}(t, x_t) \leq g(t, V(t, x_t))$ (e) 如果方程 $\dot{u}(t) = g(t, u)$ ($t \geq \sigma, u_0 = u(\sigma) > 0$) 零解是 Lipschitz 一致渐近稳定的, 则方程 (1) 存在周期解.

证明 由条件 (b) (c) (d) (e) 知方程的零解是变分 Lipschitz 一致渐近稳定的, 故由定理 4 即得.

参 考 文 献

- 1 梁伟. 泛函微分方程的 Lipschitz 一致渐近稳定性. 四川大学学报 (自然科学版), 1993, 30(3): 408 ~ 412
- 2 Ize A F, Ventura A. An extension of the Alekseev variation of constant formula for neutral nonlinear perturbed differential equation with an application to the relative asymptotic equivalence. J Math Anal Appl, 1987, 122(1): 85 ~ 90
- 3 Lakshikantham V, Leela S. Differential and inequalities. New York: Academic Press, 1969. 181 ~ 203
- 4 克里兹格 E 著. 泛函分析引论及应用. 张石生译. 重庆: 重庆大学出版社, 1986. 285 ~ 310

Uniformly Asymptotical Lipschitz Stability and Periodic Solution for Neutral Functional Differential Equation

Liang Wei Jing Jiangyan

(Hohai Univ. Changzhou Branch, Changzhou 213022)

Abstract Uniformly asymptotical Lipschitz stability of solution for neutral functional differential equation (NFDE) and the existence of periodic solutions of NFDE are discussed in the paper.

Key words neutral functional differential equation (NFDE); uniformly asymptotical Lipschitz stability (in variation); periodic solution