

具间断象征拟微分算子的 L^2 有界性

周继东

(河海大学数理系 南京 210098)

摘 要 本文构造了 $R^2 \times R^2$ 中的一个锥子集 Γ , 以沿向量场的 Hilbert 变换为工具, 证明了以 Γ 的特征函数为象征的拟微分算子在 $L^2(R^2)$ 中是无界的.

关键词 拟微分算子; 锥子集; 沿向量场的 Hilbert 变换; L^2 有界性

中图号 O175.3

在偏微分方程的微局部分析中, 考虑下列问题: 对 $R^n \times R^n$ 中的一个锥子集 Γ , 以 Γ 的特征函数 χ_Γ 为象征的拟微分算子在 $L^2(R^n)$ 中是否有界? 在 $n=1$ 时结论是对的, $n \geq 2$ 时所知结论甚少. 本文将构造 $R^2 \times R^2$ 上的锥子集, 并证明以其上特征函数为象征的拟微分算子在 $L^2(R^2)$ 中是无界的.

1 准备知识

定义 1 设 Γ 是 $R^n \times R^n$ 的一个子集, 若它满足: 当 $(x, \xi) \in \Gamma$ 时, 对所有的 $t > 0$, $(x, t\xi) \in \Gamma$, 则称 Γ 是 $R^n \times R^n$ 的一个锥子集.

记 Γ 的特征函数为:

$$\chi_\Gamma(x, \xi) = \begin{cases} 1, & (x, \xi) \in \Gamma \\ 0, & (x, \xi) \notin \Gamma \end{cases}$$

显然, 这是 $R^n \times R^n$ 上的一个间断函数.

以 $\chi_\Gamma(x, \xi)$ 为象征的拟微分算子设为 P , 则

$$P(f)\chi_x = (2\pi)^{-n} \int_{R^n} e^{ix\xi} \chi_\Gamma(x, \xi) \hat{f}(\xi) d\xi$$

其中 $f(x) \in C_0^\infty(R^n)$, $\hat{f}(\xi)$ 为 $f(x)$ 的 Fourier 变换, $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$, $\xi = (\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n)$, $x\xi = x \cdot \xi = \sum_{i=1}^n x_i \xi_i$.

现考察 $R^2 \times R^2$ 中的锥子集

$$\Gamma = \{(x, \xi) = (x_1, x_2, \xi_1, \xi_2) \mid (x_1, x_2) \in D, \xi_2 > \alpha(x)\xi_1\}$$

其中 D 为 R^2 中的一个开子集, $\alpha(x)$ 为一实值函数. 又设 $\gamma(x) = (\gamma_1(x), \gamma_2(x))$ 为 D 上的非零向量场, 且 $\gamma_1(x) > 0$, $\gamma_2(x) > 0$, $f(x) \in C_0^\infty(R^2)$, 对任意 x , 以及 $0 < \varepsilon < R$ (ε 充分小, R 充分大) 总存在一仅与 x 及 $\sup P(f)$ 有关的 $R_0 < R$, 使得

$$\int_{\varepsilon < |t| < R} \frac{f(x + t\gamma(x))}{t} dt = \int_{\varepsilon < |t| < R_0} \frac{f(x + t\gamma(x))}{t} dt$$

由于对任意的 $0 < \varepsilon_1 < \varepsilon_2 < \varepsilon$ 有

$$\left| \int_{\varepsilon_1 < |t| < R} \frac{f(x + t\gamma(x))}{t} dt - \int_{\varepsilon_2 < |t| < R} \frac{f(x + t\gamma(x))}{t} dt \right| = \left| \int_{\varepsilon_1}^{\varepsilon_2} \frac{f(x + t\gamma(x))}{t} dt + \int_{-\varepsilon_2}^{-\varepsilon_1} \frac{f(x + t\gamma(x))}{t} dt \right| \leq$$

$$\int_{\varepsilon_1}^{\varepsilon_2} \left| \frac{f(x+t\chi(x)) - f(x-t\chi(x))}{t} \right| dt \leq 2 \sup_x |\nabla f(x)| \cdot |\chi(x)| (\varepsilon_2 - \varepsilon_1)$$

所以, Cauchy 主值积分

$$(Pf)_x = \lim_{\substack{\varepsilon \rightarrow 0^+ \\ R \rightarrow +\infty}} \int_{\varepsilon < |t| < R} \frac{f(x+t\chi(x))}{t} dt$$

对任意 x 有意义.

定义 2 称 $H(f)_x = (Pf)_x$ 为 $f(x)$ 沿向量场 $\chi(x)$ 的 Hilbert 变换.

引理 若 $\gamma_1(x) + \alpha(x)\gamma_2(x) = 0$, 则上述拟微分算子 P 和 Hilbert 变换 H 之间成立如下关系

$$P(f)_x = -\frac{i}{2\pi} H(f)_x + \frac{1}{2} f(x)$$

证明

$$\int_{\varepsilon < |t| < R} \frac{f(x+t\chi(x))}{t} dt = \frac{1}{(2\pi)^2} \int_{\varepsilon < |t| < R} \int_{R^2} e^{i(x+t\chi(x))\xi} \hat{f}(\xi) d\xi \frac{dt}{t} =$$

$$\frac{1}{(2\pi)^2} \int_{R^2} e^{ix\xi} \hat{f}(\xi) \left(\int_{\varepsilon < |t| < R} e^{it\chi(x)\xi} \frac{dt}{t} \right) d\xi$$

由于

$$\int_{\varepsilon < |t| < R} e^{it\chi(x)\xi} \frac{dt}{t} = 2i \int_{\varepsilon}^R \frac{\sin(t\chi(x)\xi)}{t} dt \xrightarrow[\varepsilon \rightarrow 0^+]{R \rightarrow +\infty} \pi i \operatorname{sign}(\chi(x)\xi) \quad (\text{因 } \int_0^\infty \frac{\sin t}{t} dt = \frac{\pi}{2})$$

故当 ε 充分小, R 充分大时有

$$\left| \int_{\varepsilon < |t| < R} e^{it\chi(x)\xi} \frac{dt}{t} \right| \leq 2\pi$$

由 Lebesgue 控制收敛定理^[1]

$$H(f)_x = \lim_{\substack{\varepsilon \rightarrow 0^+ \\ R \rightarrow +\infty}} \int_{\varepsilon < |t| < R} \frac{f(x+t\chi(x))}{t} dt = \frac{1}{(2\pi)^2} \int_{R^2} e^{ix\xi} \pi i \operatorname{sign}(\chi(x)\xi) \hat{f}(\xi) d\xi$$

所以

$$-\frac{i}{2\pi} H(f)_x + \frac{1}{2} f(x) = \frac{1}{(2\pi)^2} \int_{R^2} e^{ix\xi} \frac{\operatorname{sign}(\chi(x)\xi) + 1}{2} \hat{f}(\xi) d\xi$$

由于当 $(x, \xi) \in \Gamma$ 时,

$$\chi(x)\xi = \gamma_1(x)\xi_1 + \gamma_2(x)\xi_2 > \xi_1(\gamma_1(x) + \alpha(x)\gamma_2(x)) = 0$$

当 $(x, \xi) \notin \Gamma$ 时,

$$\chi(x)\xi = \gamma_1(x)\xi_1 + \gamma_2(x)\xi_2 < \xi_1(\gamma_1(x) + \alpha(x)\gamma_2(x)) = 0$$

所以

$$\frac{\operatorname{sign}(\chi(x)\xi) + 1}{2} = \chi_I(x, \xi)$$

证毕

2 主要结果

下面我们将通过适当地选取 $D \subset R^2$ 和 $\chi(x)$ 并构造一 $f(x) \in C_0^\infty(R^2)$ 使得 $H(f)_x \notin L^2(D)$, 从而 $P(f)_x \notin L^2(D)$.

定理 设 $D = \{(x_1, x_2) | x_1 > 0, x_2 > 0\}$, $\chi(x) = (1, \gamma_2(x))$ 其中

$$\gamma_2(x) = \begin{cases} \frac{x_2 + 1}{x_1 + 1} & x_2 \geq x_1 \\ \frac{x_2 + 2}{x_1 + 2} & x_1 > x_2 \end{cases}$$

则可找到 $f(x) \in C_0^\infty(R^2)$ 使得 $H(f)_x \notin L^2(D)$.

证明 作 $\varphi(u) \in C_0^\infty(R)$, 它满足

a. $0 \leq \varphi(u) \leq 1$

b. $\varphi(u) = \begin{cases} 1, & -2 \leq u \leq -1 \\ 0, & u \geq 0 \text{ 或 } u \leq -3 \end{cases}$

令 $f(x) = f(x_1, x_2) = \varphi(x_1)\varphi(x_2)$, 则当 $x \in D$ 时

$$H(f)_x = (P) \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(x_1 + t)\varphi(x_2 + \gamma_2(x)t) \frac{dt}{t} = \\ \int_{-\infty}^0 \varphi(x_1 + t)\varphi(x_2 + \gamma_2(x)t) \frac{dt}{t} = - \int_0^{+\infty} \varphi(x_1 - u)\varphi(x_2 - \gamma_2(x)u) \frac{du}{u}$$

命

$$A = \{u > 0 \mid \varphi(x_1 - u) = \varphi(x_2 - \gamma_2(x)u) = 1\} =$$

$$(x_1 + 1, x_1 + 2) \cap \left(\frac{x_2 + 1}{\gamma_2(x)}, \frac{x_2 + 2}{\gamma_2(x)} \right)$$

容易验证, 不论 $x_2 \geq x_1$ 还是 $x_1 > x_2$ 都有:

$$A = \left(x_1 + 1, \frac{x_2 + 2}{\gamma_2(x)} \right)$$

这样

$$|H(f)_x| = \int_0^{+\infty} \varphi(x_1 - u)\varphi(x_2 - \gamma_2(x)u) \frac{du}{u} \geq \\ \int_A \frac{du}{u} = \ln \frac{x_2 + 2}{\gamma_2(x)(x_1 + 1)} = \begin{cases} \ln \frac{x_2 + 2}{x_2 + 1} & x_2 \geq x_1 \\ \ln \frac{x_1 + 2}{x_1 + 1} & x_1 > x_2 \end{cases}$$

由于当 $x_2 \geq x_1$ 时,

$$|H(f)_x| \geq \ln \left(\frac{x_2 + 2}{x_2 + 1} \right) \geq \frac{1}{x_2 + 1}$$

所以, $H(f)_x \notin L^2(D)$, 证毕.

注: 当 $f(x)$ 为常量场时, 由文献 [2] 对任意 $P: 1 < P < \infty$, $\|H(f)_x\|_{L^P} < \infty$.

参 考 文 献

- 1 江泽坚 吴智泉. 实变函数论. 第2版. 北京: 高等教育出版社, 1994. 156 ~ 158
- 2 Guzman. M de. Real variable methods in Fourier analysis. Amsterdam: North Holland Publishing Company, 1981. 359 ~ 362

On L^2 Boundedness of Pseudo-differential Operator with Discontinuous Symbol

Zhou Jidong

(Dept. of Mathematics and Physics, Hohai Univ., Nanjing 210098)

Abstract In this paper, a conic subset Γ of $R^2 \times R^2$ is constructed, and by use of the Hilbert transform along a vector field, it is proved that the pseudo-differential operator, whose symbol is the characteristic function of Γ , is unbounded on $L^2(R^2)$.

Key words pseudo-differential operator; conic subset; Hilbert transform along a vector field; L^2 boundedness