

用改进增量法求解土石坝—地基系统动力响应^{*}

窦兴旺 夏颂佑

许百立

(河海大学水利水电工程学院 南京 210098)

(水利部水利水电规划设计总院 北京 100011)

摘 要 基于增量 Wilson- θ 法推导出增量形式的结构动力方程的数值迭代形式,并针对非线性结构的静动力数值分析提出了求解非线性方程的改进增量方法.改进后的增量法,理论简单,程序实现方便,而且能更好地控制每步迭代引入的误差,能模拟整个加荷过程,并成功地应用于土石坝与地基的静动态相互作用研究.

关键词 土石坝;地基;动力响应;改进增量法;Wilson- θ 法

中图号 TV641

由于土石坝材料的非线性特性,在进行土石坝的数值分析时,应按非线性有限元法求解.求解非线性方程组一般采用等效线性化的方法,即把非线性问题化为一系列线性问题,然后设法使这一系列线性解收敛且逼近非线性解.非线性解法大致有 3 类:增量法、迭代法和混合法.增量法应用范围广,且可提供荷载—位移变化的全过程资料,但其计算工作量一般很大.迭代法的计算工作量较小,简单易行,但不能给出荷载—位移变化的全过程资料,对于无须描述加载路径的非线性问题,应用迭代法较合适.混合法为两者的综合,兼有增量法和迭代法的优点.

1 增量形式的结构动力方程表示

由结构动力问题的变分原理——哈密尔顿(Hamilton)原理可导出其动力方程如下^[1]:

$$M\ddot{\delta} + C\dot{\delta} + K\delta = P$$

(1)

则其增量形式为

$$M\Delta\ddot{\delta} + C\Delta\dot{\delta} + K\Delta\delta = \Delta P$$

(2)

其中 $\Delta\delta = \delta_{i+1} - \delta_i$; $\Delta\dot{\delta} = \dot{\delta}_{i+1} - \dot{\delta}_i$; $\Delta\delta = \delta_{i+1} - \delta_i$.

令 $P_{i+1} = -M\ddot{U}_g$, 则

$$\Delta P = -M\ddot{U}_g - (M\ddot{\delta}_i + C\dot{\delta}_i + K\delta_i)$$

(3)

其中 $\ddot{U}_g$ 是输入地震加速度.

应用 Wilson- θ 法求解式(1)或式(2),可得^[2]

$$\ddot{\delta}(\tau) = \ddot{\delta}(t) + (\ddot{\delta}(t + \Delta t) - \ddot{\delta}(t))\frac{\tau - t}{\Delta t}$$

(4)

对上式积分,则有

$$\dot{\delta}(\tau) = \dot{\delta}(t) + \dot{\delta}(t)(\tau - t) + (\ddot{\delta}(t + \Delta t) - \ddot{\delta}(t))\frac{(\tau - t)^2}{2\Delta t}$$

(5)

以 $t + \Delta t$ 代 τ , 则有

$$\dot{\delta}(t + \Delta t) = \dot{\delta}(t) + \ddot{\delta}(t)\frac{\Delta t}{2} + \ddot{\delta}(t + \Delta t)\frac{\Delta t}{2}$$

(6)

$$\delta(\tau) = \delta(t) + \dot{\delta}(t)(\tau - t) + \ddot{\delta}(t)\left(\frac{\tau - t}{2}\right)^2 + (\ddot{\delta}(t + \Delta t) - \ddot{\delta}(t))\frac{(\tau - t)^3}{6\Delta t}$$

(7)

$$\delta(t + \Delta t) = \delta(t) + \dot{\delta}(t)\Delta t + \ddot{\delta}(t)\frac{(\Delta t)^2}{3} + \ddot{\delta}(t + \Delta t)\frac{(\Delta t)^2}{6}$$

(8)

收稿日期:1998-02-16

第一作者简介:窦兴旺,男,博士研究生,水工结构工程专业,主要从事坝与地基作用研究.

^{*} 高等学校博士点基金资助课题(9529401).

由 Wilson- θ 法的假定,在式(7)中令 $\tau = t + \theta\Delta t$, 则有

$$\delta(t + \theta\Delta t) = \delta(t) + \dot{\delta}(t)\theta\Delta t + \ddot{\delta}(t)\left(\frac{\theta\Delta t}{2}\right)^2 + (\ddot{\delta}(t + \Delta t) - \ddot{\delta}(t))\frac{(\theta\Delta t)^3}{6\Delta t} \quad (9)$$

此处令 $\Delta\delta = \delta(t + \theta\Delta t) - \delta(t)$, 则

$$\Delta\delta = \dot{\delta}(t)\theta\Delta t + \ddot{\delta}(t)\left(\frac{\theta\Delta t}{2}\right)^2 + (\ddot{\delta}(t + \Delta t) - \ddot{\delta}(t))\frac{(\theta\Delta t)^3}{6\Delta t} \quad (10)$$

经过整理,有

$$\ddot{\delta}(t + \Delta t) = \frac{6}{\theta^3(\Delta t)^2}\Delta\delta - \frac{6}{\theta^2\Delta t}\dot{\delta}(t) + (1 - \frac{3}{\theta})\ddot{\delta}(t) \quad (11)$$

结合式(6)(8),可导出

$$\dot{\delta}(t + \Delta t) = \frac{3}{\theta^3\Delta t}\Delta\delta + (1 - \frac{3}{\theta^2})\dot{\delta}(t) + \frac{\Delta t}{2}(2 - \frac{3}{\theta})\ddot{\delta}(t) \quad (12)$$

$$\delta(t + \Delta t) = \frac{1}{\theta^3}\Delta\delta + \delta(t) + (1 - \frac{1}{\theta^2})\Delta t\dot{\delta}(t) + \frac{(\Delta t)^2}{2}(1 - \frac{1}{\theta})\ddot{\delta}(t) \quad (13)$$

将式(11)代入 Wilson- θ 法的线性加速度假定 $\Delta\ddot{\delta} = \ddot{\delta}(t + \theta\Delta t) - \ddot{\delta}(t) = [\ddot{\delta}(t + \Delta t) - \ddot{\delta}(t)] \cdot \theta$ 中, 则有

$$\Delta\ddot{\delta} = \frac{6}{(\theta\Delta t)^2}\Delta\delta - \frac{6}{\theta\Delta t}\dot{\delta}(t) - 3\ddot{\delta}(t) \quad (14)$$

$$\Delta\dot{\delta} = \frac{3}{\theta\Delta t}\Delta\delta - 3\dot{\delta}(t) - \frac{\theta\Delta t}{2}\ddot{\delta}(t) \quad (15)$$

将式(14)(15)代入式(2), 则有

$$\begin{aligned} (M(\frac{6}{(\theta\Delta t)^2} + C\frac{3}{\theta\Delta t} + K)\Delta\delta = \Delta P + (\frac{6}{\theta\Delta t}M + 3C)\dot{\delta}(t) + \\ (3M + \frac{\theta\Delta t}{2}C)\ddot{\delta}(t) \end{aligned} \quad (16)$$

以上推导的是求解结构(包括结构与地基相互作用系统)动力响应的有限元方程,作者等人已将其成功地应用于土石坝与地基的三维静动态相互作用研究^[3]. 当考虑动水压力时,应用附加质量法^[2,4],则只需在 M 阵中叠加进附加质量矩阵 M_p 即可,即

$$\begin{aligned} ((M + M_p)(\frac{6}{(\theta\Delta t)^2} + C\frac{3}{\theta\Delta t} + K)\Delta\delta = \\ \Delta P + (\frac{6}{\theta\Delta t}(M + M_p) + 3C)\dot{\delta}(t) + (3(M + M_p) + \frac{\theta\Delta t}{2}C)\ddot{\delta}(t) \end{aligned} \quad (17)$$

2 用改进增量法求解非线性结构动力方程组*

由于土石坝-地基系统材料的静、动力本构关系的非线性,故式(16)或式(17)为一组非线性方程.

在式(17)中,令 $K(u) = (M + M_p)(\frac{6}{(\theta\Delta t)^2} + C\frac{3}{\theta\Delta t} + K)$, $Q = \Delta P + (\frac{6}{\theta\Delta t}(M + M_p) + 3C)\dot{\delta}(t) + (3(M + M_p) + \frac{\theta\Delta t}{2}C)\ddot{\delta}(t)$, $u = \Delta\delta$, 则式(17)可简化为如下求解形式:

$$\Psi(u) = K(u)u - Q = R(u) - Q = 0 \quad (18)$$

$$\text{令 } Q = \lambda\bar{Q}, \text{ 则式(18)改写为} \quad \Psi(u, \lambda) = R(u) - \lambda\bar{Q} \quad (19)$$

其中 λ 是用来描述荷载变化的参数.

设 u 是对应于参数 λ 的解,而 $u + \Delta u$ 是对应于参数 $\lambda + \Delta\lambda$ 的解,则有

$$\Psi(u, \lambda) = \Psi(u + \Delta u, \lambda + \Delta\lambda) = 0 \quad (20)$$

将 Ψ 按泰勒级数展开,有

$$\Psi(u + \Delta u, \lambda + \Delta\lambda) = \Psi(u, \lambda) + \frac{\partial \Psi}{\partial u}\Delta u + \frac{\partial \Psi}{\partial \lambda}\Delta\lambda + \dots \quad (21)$$

引入记号

$$K_T(u, \lambda) = \frac{\partial \Psi}{\partial u} \quad (22)$$

* 为表达简便,本节各表达式所含变量组 u 均简记为 u .

又考虑到 $\frac{\partial \Psi}{\partial \lambda} = -\bar{Q}$ 在式 (21) 中略去高阶微量, 可得 $K_T(u, \lambda) \Delta u - \Delta \lambda \bar{Q} = 0$ 改写为

$$\Delta u = (K_T(u, \lambda))^{-1} \Delta \lambda \bar{Q} \tag{23}$$

设 $0 = \lambda_0 < \lambda_1 < \lambda_2 < \dots < \lambda_M = 1$ $\Delta \lambda_m = \lambda_{m+1} - \lambda_m$, $\sum_{m=1}^M \Delta \lambda_m = 1$ 则

$$Q_m = \lambda_m \bar{Q} \quad \Delta Q_m = Q_{m+1} - Q_m = \Delta \lambda_m \bar{Q} \tag{24}$$

这样, 得增量迭代公式为

$$\Delta u_m = (K_T(u_m, \lambda_m))^{-1} \Delta \lambda_m \bar{Q} \quad u_{m+1} = u_m + \Delta u_m \tag{25}$$

对单变量情况, 上述方法的求解过程如图 1 所示。
正如图 1 所表明的, 在计算的每一步, 都会引进误差, 从而造成对真解的偏移, 而且随着求解步数的增多, 这种误差将不断累积, 因此, 下面拟对前述算法作一些改进。

此前, 我们曾假定 u_m 是问题的解, 即

$$\Psi(u_m, \lambda_m) = 0$$

实际上, 在使用增量法求解的过程中, u_m 一般不是精确解, 即

$$\Psi(u_m, \lambda_m) \neq 0$$

将式 (23) 进一步改写为

$$\Delta u = (K_T(u, \lambda))^{-1} (\Delta \lambda \bar{Q} - \Psi(u, \lambda))$$

这样, 改进后的算法为

$$\Delta u_m = (K_T(u_m, \lambda_m))^{-1} (\Delta \lambda_m \bar{Q} - \Psi(u_m, \lambda_m)) \quad u_{m+1} = u_m + \Delta u_m \tag{26}$$

整理后得

$$\Delta u_m = (K_T(u_m, \lambda_m))^{-1} (\lambda_{m+1} \bar{Q} - R(u_m)) \quad u_{m+1} = u_m + \Delta u_m \tag{27}$$

这样, 每一步迭代都对偏差进行了一次修正。为简单起见, 只给出单变量情况的计算过程, 见图 2。

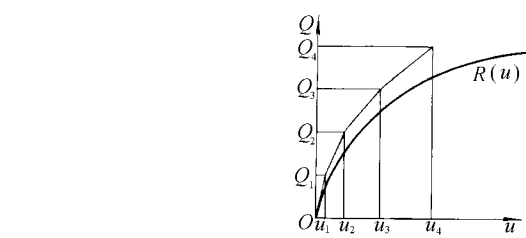


图 1 单变量增量法求解过程

Fig. 1 Schematic diagram of incremental method for single variable

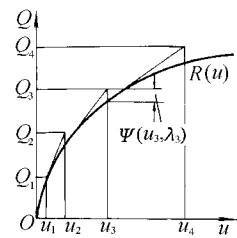


图 2 单变量改进增量法求解过程

Fig. 2 Schematic diagram of modified incremental method for single variable

3 算 例

按输入地震历时分为若干时段, 对每个时段应用增量法。具体实施过程简述如下:
假定初值 $\delta_0, \dot{\delta}_0, \ddot{\delta}_0$, 根据所划分的每个时段的大小, 由加速度时程曲线上取样本点确定每个时段内的若干 λ 值 ($\lambda_i = 1, 2, \dots, M$), 由式 (27) 进行迭代确定出 $u = u_M$ 的值, 即求得 $\Delta \delta$ 的数值解, 将求得的 $\Delta \delta$ 分别代入式 (11) (12) (13) 即可求得 $t + \Delta t$ 时刻的加速度、速度和位移数值。对于每一时段, 都按上述过程进行。
需要指出的是: 对于静力问题, 如模拟整个坝体的施工填筑过程, 则式 (24) (25) 是满足的; 对于动力问题, 其中的 λ_i ($i = 1, 2, \dots, M$) 可以是任意的, 通常不满足式 (24) (25) 的限制, 仍令 $\Delta \lambda_m = \lambda_{m+1} - \lambda_m$, 但 $\sum_{m=1}^M \Delta \lambda_m \neq 1$ 。当小时段分得足够小, 即样本点取得足够多时, 近似满足 $\sum_{m=1}^M \Delta \lambda_m = 0$ 。因此, 一般意义上的增量方法已在外延上得到了拓展。对地震加速度时程而言, 各时刻加速度值的大小是随机的、不确定的, 即不存在前后两个不同时刻的加速度数值大小的确定性关系, 即使后一时刻加速度数值比前一时刻小, 我们仍称之为增量法, 但此时的 λ_i 值却是负的。

笔者等应用改进增量方法对某土石坝的“小结构”模型进行了三维动力有限元分析, 如图 3 A 所示的

0+184和0+278 剖面上的 10 个控制点(已分别标志在图上).部分成果与文献 4 提出的拟牛顿法算出的成果列于表 1 及示于图 5~8.

表 1 改进增量法与拟牛顿法的部分成果比较

结点号	改进增量法		拟牛顿法		改进增量法		拟牛顿法	
	δ_{x1}/mm		δ_{x2}/mm		δ_{y1}/mm		δ_{y2}/mm	
	第 1 秒	第 2 秒	第 1 秒	第 2 秒	第 1 秒	第 2 秒	第 1 秒	第 2 秒
525	0.004	-0.030	0.003	-0.028	0.001	0.007	0.001	0.005
545	0.002	-0.019	0.003	-0.019	-0.004	0.001	-0.002	0.000
584	0.002	-0.005	0.001	-0.007	-0.004	-0.001	-0.003	0.000
593	0.002	-0.014	0.003	-0.014	0.001	-0.011	0.002	-0.010
599	0.004	-0.013	0.003	-0.015	0.004	0.001	0.003	0.001
895	0.014	-0.046	0.011	-0.037	0.001	0.013	0.000	0.009
914	0.012	-0.036	0.009	-0.028	-0.005	0.005	-0.003	0.002
952	0.008	-0.011	0.009	-0.011	-0.009	-0.004	-0.006	-0.001
961	0.010	-0.031	0.010	-0.025	0.003	-0.010	0.003	-0.006
967	0.011	-0.020	0.010	-0.018	0.003	0.000	0.002	0.000

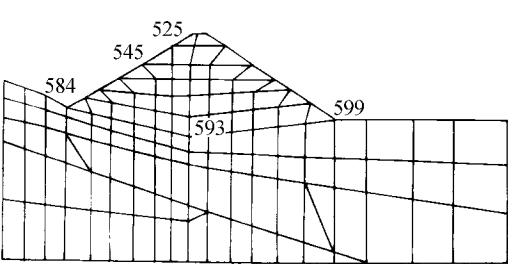


图 3 0+184 剖面网格剖分及控制点示意图
Fig. 3 Schematic diagram of mesh and controlling points of section 0+184

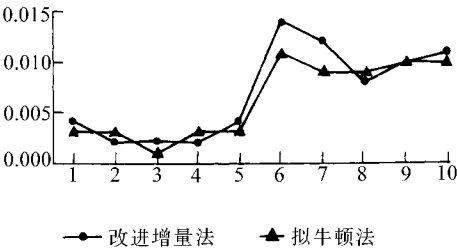


图 5 第 1 秒顺河向位移比较
Fig. 5 Comparison of longitudinal displacements on the first second

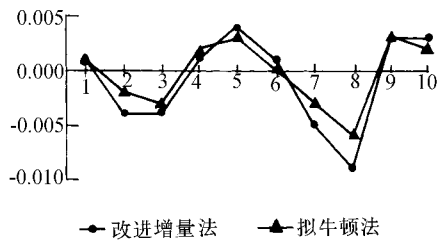


图 7 第 1 秒竖向位移比较
Fig. 7 Comparison of vertical displacements on the first second

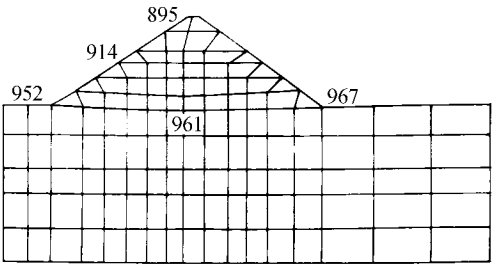


图 4 0+278 剖面网格剖分及控制点示意图
Fig. 4 Schematic diagram of mesh and controlling points of section 0+278

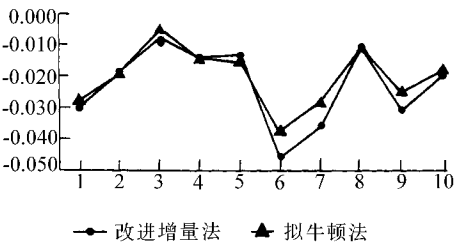


图 6 第 2 秒顺河向位移比较
Fig. 6 Comparison of longitudinal displacements on the second second

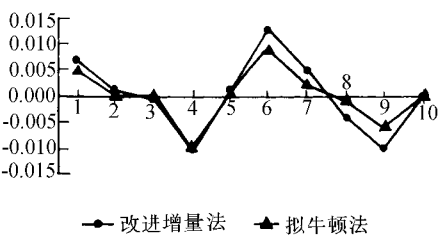


图 8 第 2 秒竖向位移比较
Fig. 8 Comparison of vertical displacements on the second second

为使两种算法具有一定的可比性,且为控制篇幅,本文只列出 10 个控制点在地震过程中相对应的第 1 秒和第 2 秒的顺河向(x)和竖向(y)的位移成果.

4 结 论

改进后的增量法与常规的非线性方程的求解方法(如牛顿法、修正牛顿法等)相比,物理概念更加明了,理论简单,程序实现方便,计算时间也短,而且比常规的增量法能更好地控制每步迭代引入的误差,只要取相对较多的荷载分级数,就能获得和拟牛顿法相一致的精度.而增量法对求解增量形式表示的动力运动方程较为方便,但增量法最大的优点却是能获得整个荷载变化过程的一些中间的数值结果,能模拟整个加荷过程,对工程施工过程的模拟显得特别有用.

本文的研究得到了水利部水利水电规划设计总院的科研资助,谨致谢意.

参 考 文 献

1 姜弘道,陈和群.有限单元法的程序设计.北京:水利电力出版社,1989.1~153
2 顾淦臣.土石坝地震工程.南京:河海大学出版社,1989.1~290
3 窦兴旺,夏颂佑,许百立.高土石坝与深覆盖层地基相互作用研究.河海大学学报,1997(水利水电工程专辑):12~16
4 冀春楼.深厚覆盖层上高堆石坝静动力分析方法的研究[学位论文].南京:河海大学,1995
5 殷有泉.固体力学非线性有限元引论.北京:北京大学出版社,清华大学出版社,1987.1~244
6 赵光恒.结构动力学.北京:中国水利水电出版社,1996.1~166

Determining Dynamic Response of Embankment Dam-Foundation System by Modified Increment Method

Dou Xingwang Xia Songyou

(College of Water Conservancy and Hydropower Engineering ,Hohai Univ. ,Nanjing 210098)

Xu Baili

(General Institute of Planning and Design of Water Resources and Hydropower Engineering ,Ministry of Water Resources ,Beijing 100011)

Abstract In the paper ,structural dynamic equations are derived in the form of incremental numerical iteration based upon the incremental Wilson- θ method .A new modified incremental method is proposed to solve non-linear equations .The modified method is simpler in theory ,more convenient in implementation .The errors produced in every step can be controlled in an effective way , and the present method can simulate the construction procedure .The theories have been successfully applied to static and dynamic analysis of embankment dam-foundation systems .

Key words embankment dam ;foundation ;dynamic response ;modified incremental method ;Wilson- θ method