

两跨连续索在中间节点滑移的一种理论解

唐建民

沈祖炎

(淮海大学土木工程学院 南京 210098) (同济大学土木工程学院 上海 200092)

摘 要 基于非线性弹性理论,假定索是理想柔性的且满足虎克定律,根据单索的平衡方程及变形协调条件,推导了两跨连续索在中间节点滑移的一种理论解法,建立了其非线性计算的基本理论和公式,并根据 Neton-Raphson 叠代方法建立了非线性求解方法和步骤,进行了实例计算.结果表明:本文方法可靠合理,概念清楚,计算简单,精度与非线性数值解非常接近,足以满足工程要求.

关键词 连续索 滑移单元 非线性 理论解

中图分类号 TU393.3

悬索结构在工程上有着广泛的应用,如大型体育馆的屋盖结构、斜拉桥、拉线塔、游览索道等.悬索结构常常需要预应力来提供结构刚度.这种预应力的形成是在结构的施工过程中产生的.这时往往需要放松某些节点,让多跨连续索在节点处可以自由滑动,从而达到对整个系统施加预应力的目的.目前,解决这一问题尚无一般方法,大都采用有限元等数值解法进行近似计算^[1~3].本文基于非线性弹性理论,从单索的平衡方程及变形协调条件出发,推导了两跨连续索在中间节点滑移的一种理论解法,建立了其非线性计算的基本理论、方法和公式,并进行了实例计算.

1 基本假定

- a. 索是理想柔性的且满足虎克定律;
- b. 忽略节点摩擦力对滑移的影响;
- c. 滑移平衡时的两索总长度与无滑移时的总长度相等.

2 单索计算理论

单索在均布荷载作用下(图 1)的垂度方程为

$$y = \frac{H}{q} [\cosh \alpha - \cosh(\frac{2\beta x}{X} - \alpha)] \quad (1)$$

式中: H , l ——索元的水平张力和原长; q ——索元单位长度荷载;

$$\alpha = \operatorname{arsinh}(\frac{\beta(C/X)}{\sinh \beta}) + \beta; \beta = \frac{qX}{2H}.$$

由式(1)可以求得

$$T_i = H \cosh \alpha \quad (2)$$

$$T_j = H \cosh(\alpha - 2\beta) \quad (3)$$

$$l = \frac{2H}{q} \sinh \beta \cosh(\alpha - \beta) \quad (4)$$

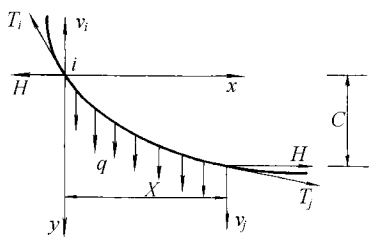


图 1 均布荷载作用下的索单元
Fig.1 Cable element under the uniformly distributed load

索的平衡方程只给出某一特定状态下 q , y , H 三者之间的关系,而不能考虑‘状态’的变化过程,也就是说,从平衡方程(1)无法求解 y 和 H 两个未知量,因此,必须建立索由初

始态过渡到终态时的变形协调条件. 设索始、终态沿索长分布的均布荷载分别为 q_0 和 q , 水平张力分别为 H_0 和 H , 长度分别为 l_0 和 l . 由几何关系可求得索长的增量为

$$\Delta S = \frac{2H}{q} \sinh \beta \cosh(\alpha - \beta) - \frac{2H_0}{q_0} \sinh \beta_0 \cosh(\alpha_0 - \beta_0) \quad (5)$$

式中: $\alpha_0 = \operatorname{arsinh}(\frac{\beta_0(C/X)}{\sinh \beta_0}) + \beta_0$; $\beta_0 = \frac{q_0 X}{2H_0}$.

根据物理条件, 索的长度增量为

$$\Delta S = \int_{l_0}^l \frac{\Delta T}{EA} ds_0 \approx \int_x (\frac{\Delta H}{EA} \frac{ds_0}{dx} \frac{ds_0}{dx} dx) = \frac{H - H_0}{EA} \frac{H_0}{q_0} [\beta_0 + 0.5 \sinh 2\beta_0 \cosh(2\beta_0 - 2\alpha_0)] \quad (6)$$

根据式(5), (6), 索的变形协调方程为

$$\begin{aligned} & \frac{2H}{q} \sinh \beta \cosh(\alpha - \beta) - \frac{2H_0}{q_0} \sinh \beta_0 \cosh(\alpha_0 - \beta_0) - \\ & \frac{H - H_0}{EA} \frac{H_0}{q_0} [\beta_0 + 0.5 \sinh 2\beta_0 \cosh(2\beta_0 - 2\alpha_0)] = 0 \end{aligned} \quad (7)$$

由式(7)可知, 当索的初始态已知时, 解超越方程(7)可求得终态时的水平张力 H , 进而由平衡方程(1)求出其它未知量.

3 两跨连续索在中间节点滑移的计算公式

如图2所示的两跨连续索, 设中间 B 节点为定滑轮支座, 索元 AB 和 BC 沿索长分布的初始态均布荷载均分别为 q_1^0, q_2^0 , 终态均布荷载分别为 q_1, q_2 , 初始水平张力均分别为 H_1^0, H_2^0 . 求解方法如下:

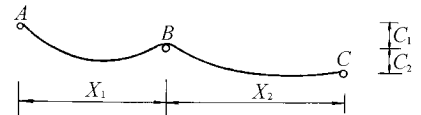


图2 在中间节点滑移的两跨连续索模型

首先, 固定节点 B , 按单索理论(解超越方程(7)), 分别计算 AB, BC 两索在终态荷载 q_1 和 q_2 作用下的水平张力 H_{01} 和 H_{02} , 索长 l_{01} 和 l_{02} 可分别由式(4)求得, 即

$$l_{01} = \frac{2H_{01}}{q_1} \sinh \beta_{01} \cosh(\alpha_{01} - \beta_{01}) \quad l_{02} = \frac{2H_{02}}{q_2} \sinh \beta_{02} \cosh(\alpha_{02} - \beta_{02})$$

式中: $\alpha_{01} = \operatorname{arsinh}(\frac{\beta_{01}(C_1/X_1)}{\sinh \beta_{01}}) + \beta_{01}$; $\beta_{01} = \frac{q_1 X_1}{2H_{01}}$; $\alpha_{02} = \operatorname{arsinh}(\frac{\beta_{02}(C_2/X_2)}{\sinh \beta_{02}}) + \beta_{02}$; $\beta_{02} = \frac{q_2 X_2}{2H_{02}}$.

然后, 放松节点 B , 索元 AB, BC 在 B 节点滑移, 设滑移至平衡位置时的水平张力分别为 H_1 和 H_2 , 索长分别为 l_1 和 l_2 , 根据基本假设(3), 则有

$$l_1 + l_2 = l_{01} + l_{02} \quad (8)$$

根据式(4), 则

$$l_1 = \frac{2H_1}{q_1} \sinh \beta_1 \cosh(\alpha_1 - \beta_1) \quad (9)$$

$$l_2 = \frac{2H_2}{q_2} \sinh \beta_2 \cosh(\alpha_2 - \beta_2) \quad (10)$$

式中: $\alpha_1 = \operatorname{arsinh}(\frac{\beta_1(C_1/X_1)}{\sinh \beta_1}) + \beta_1$; $\beta_1 = \frac{q_1 X_1}{2H_1}$; $\alpha_2 = \operatorname{arsinh}(\frac{\beta_2(C_2/X_2)}{\sinh \beta_2}) + \beta_2$; $\beta_2 = \frac{q_2 X_2}{2H_2}$.

将式(9), (10)代入式(8), 则

$$\frac{2H_1}{q_1} \sinh \beta_1 \cosh(\alpha_1 - \beta_1) + \frac{2H_2}{q_2} \sinh \beta_2 \cosh(\alpha_2 - \beta_2) - l_{01} - l_{02} = 0 \quad (11)$$

根据滑移平衡条件(张力连续条件), 则

$$T_1^B = T_2^B \quad (12)$$

由式(2), (3)可分别求得

$$T_1^B = H_1 \cosh(\alpha_1 - 2\beta_1) \quad T_2^B = H_2 \cosh \alpha_2$$

代入式(12), 则

$$H_1 \cosh(\alpha_1 - 2\beta_1) - H_2 \cosh \alpha_2 = 0 \quad (13)$$

联立求解超越方程(11),(13),便可求得水平张力 H_1 和 H_2 再由平衡方程(1)可求得其它未知量.

4 Newton-Raphson 法求解

可以采用 Newton-Raphson 法解超越方程(7),(11),(13).

4.1 超越方程(11)的求解

设

$$F(H) = \frac{2H}{q} \sinh \beta \cosh(\alpha - \beta) - \frac{2H_0}{q_0} \sinh \beta_0 \cosh(\alpha_0 - \beta_0) - \frac{H - H_0}{EA} \frac{H_0}{q_0} [\beta_0 + 0.5 \sinh 2\beta_0 \cosh(2\beta_0 - 2\alpha_0)] = 0 \quad (14)$$

那么

$$F'(H) = \frac{dF(H)}{dH} = \frac{2}{q} \sinh \beta \cosh(\alpha - \beta) + \frac{2H}{q} \cosh \beta \cosh(\alpha - \beta) \frac{d\beta}{dH} + \frac{2H}{q} \sinh \beta \sinh(\alpha - \beta) \left(\frac{d\alpha}{dH} - \frac{d\beta}{dH} \right) - \frac{H_0}{EAq_0} [\beta_0 + 0.5 \sinh 2\beta_0 \cosh(2\beta_0 - 2\alpha_0)] \quad (15)$$

$$\text{式中: } \frac{d\alpha}{dH} = -\frac{qX}{2H^2} \left(\frac{1}{\sqrt{1+A^2}} \frac{C(\sinh \beta - \beta \cosh \beta)}{X \sinh^2 \beta} + 1 \right); \frac{d\beta}{dH} = -\frac{qX}{2H^2}; A = \frac{BC}{X \sinh \beta}.$$

根据式(14),(15)便可利用 Newton-Raphson 法求得 H . 步骤如下:(a)设定 H 的初值 H^0 ;(b)计算 $\Delta H^1 = -F(H^0)/F'(H^0)$;(c)计算 $H^1 = H^0 + \Delta H^1$;(d)重复步骤(b),(c),直至 $|\Delta H^n| \leq \epsilon$ (ϵ 为事先给定的充分小正数)为止.

4.2 超越方程(11)和(13)的联合求解

根据式(11),可设

$$f(H_1) = f_1 + f_2 - f_3 \quad (16)$$

$$f_1 = \frac{2H_1}{q_1} \sinh \beta_1 \cosh(\alpha_1 - \beta_1) \quad (17)$$

$$f_2 = \frac{2H_2}{q_2} \sinh \beta_2 \cosh(\alpha_2 - \beta_2) \quad (18)$$

$$f_3 = l_{01} + l_{02} \quad (19)$$

式(16)对 H_1 求导,则

$$f'(H_1) = f'_1 + f'_2 \quad (20)$$

根据式(17),则

$$f'_1 = \frac{df_1}{dH_1} = \frac{2}{q_1} \sinh \beta_1 \cosh(\alpha_1 - \beta_1) - \frac{X_1}{H_1} \cosh \beta_1 \cosh(\alpha_1 - \beta_1) - \frac{X_1 \sinh \beta_1 \sinh(\alpha_1 - \beta_1)}{H_1} \frac{C_1(\sinh \beta_1 - \beta_1 \cosh \beta_1)}{\sqrt{1+A_1^2} X_1 \sinh^2 \beta_1} \quad (21)$$

$$A_1 = \frac{\beta_1 C_1}{X_1 \sinh \beta_1} \quad (22)$$

根据式(18),则

$$f'_2 = \frac{df_2}{dH_2} = \left[\frac{2}{q_2} \sinh \beta_2 \cosh(\alpha_2 - \beta_2) - \frac{X_2}{H_2} \cosh \beta_2 \cosh(\alpha_2 - \beta_2) - \frac{X_2 \sinh \beta_2 \sinh(\alpha_2 - \beta_2)}{H_2} \frac{C_2(\sinh \beta_2 - \beta_2 \cosh \beta_2)}{\sqrt{1+A_2^2} X_2 \sinh^2 \beta_2} \right] \frac{dH_2}{dH_1} \quad (23)$$

$$A_2 = \frac{\beta_2 C_2}{X_2 \sinh \beta_2} \quad (24)$$

式(13)两边对 H_1 求导,整理后得

$$\frac{dH_2}{dH_1} = \frac{\cosh(\alpha_1 - 2\beta_1) + B_1 H_1 \sinh(\alpha_1 - 2\beta_1)}{\cosh\alpha_2 + B_2 H_2 \sinh\alpha_2}$$

(25)

$$B_1 = \frac{q_1 X_1}{2H_1^2} \left(1 - \frac{1}{\sqrt{1 + A_1^2}} \frac{C_1 (\sinh\beta_1 - \beta_1 \cosh\beta_1)}{X_1 \sinh^2\beta_1} \right)$$

(26)

$$B_2 = -\frac{q_2 X_2}{2H_2^2} \left(\frac{1}{\sqrt{1 + A_2^2}} \frac{C_2 (\sinh\beta_2 - \beta_2 \cosh\beta_2)}{X_2 \sinh^2\beta_2} + 1 \right)$$

(27)

由式(20), (21), (23)即可求出 $f'(H_1) = f'_1 + f'_2$.

在利用式(16)和(20)求解 H_1 时,尚需事先求得 H_2 . 为此,设式(13)的左边为

$$g(H_2) = H_2 \cosh\alpha_2 - H_1 \cosh(\alpha_1 - 2\beta_1) = 0$$

(28)

式(28)对 H_2 求导,则

$$g'(H_2) = \frac{dg(H_2)}{dH_2} = \cosh\alpha_2 + H_2 B_2 \sinh\alpha_2$$

(29)

根据式(16), (20)和式(28), (29),便可利用 Newton-Raphson 法求得 H_1, H_2 . 求解步骤如下:(a)设定 H_1, H_2 的初值 H_1^1, H_2^1 ;(b)计算 $\Delta H_2^1 = -g(H_2^1)/g'(H_2^1)$;(c)计算 $H_2^2 = H_2^1 + \Delta H_2^1$;(d)重复步骤(b), (c),直至 $|\Delta H_2^n| < \epsilon$ (ϵ 为事先给定的充分小正数);(e)计算 $\Delta H_1^1 = -f(H_1^1)/f'(H_1^1)$;(f)计算 $H_1^2 = H_1^1 + \Delta H_1^1$;(g)重复步骤(b)~(f),直至 $|\Delta H_1^n| < \epsilon$ (ϵ 为事先给定的充分小正数);(h) H_1 和 H_2 求出之后,便可利用式(1)~(6)计算 AB, BC 两索的端部张力、中点垂度以及索长. 其中中点垂度为

$$f_1 = \frac{H_1}{q_1} (\cosh\alpha_1 - \cosh(\beta_1 - \alpha_1)) \quad f_2 = \frac{H_2}{q_2} (\cosh\alpha_2 - \cosh(\beta_2 - \alpha_2))$$

5 算例分析

5.1 支座等高

如图 3(a)所示一支座等高两跨连续索,节点 2 为一定滑轮支座. 已知两索沿索长分布的初始态荷载均为 $q_0 = 200 \text{ N/m}$ 终态荷载,12 跨为 $q^{12} = 500 \text{ N/m}$, 23 跨为 $q^{23} = 1 \text{ kN/m}$ 初始水平张力均为 $H_0 = 10 \text{ kN}$ 弹性模量 $E = 170 \text{ GPa}$ 截面面积 $A = 0.674 \text{ cm}^2$.

采用本文模型分析了该结构在节点 2 存在滑移时的内力、位移变化情况. 结果见表 1.

5.2 支座不等高

如图 3(b)所示一支座不等高的两跨连续索,节点 2 为一定滑轮支座. 已知两索沿索长分布的初始态荷载 $q_0 = 200 \text{ N/m}$ 终态荷载,12 跨为 $q^{12} = 1 \text{ kN/m}$, 23 跨为 $q^{23} = 2 \text{ kN/m}$ 初始弦向张力均为 10 kN 弹性模量 $E = 170 \text{ GPa}$ 截面面积 $A = 0.674 \text{ cm}^2$.

采用本文模型分析了该结构在节点 2 存在滑移时的内力、位移变化情况. 结果见表 2.

6 结 语

由算例可知,本文方法合理可靠,精度较高. 本文方法与非线性数值方法相比,本文方法概念清楚,计算

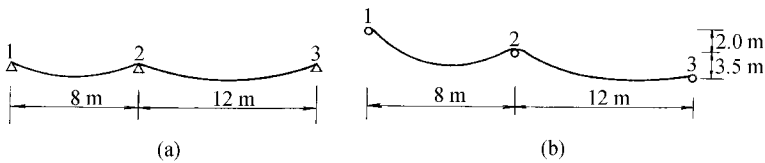


图 3 算例模型

Fig.3 Example model

表 1 支座等高情况计算结果

Table 1 Calculated results for the equal height of supporting				
	索 12 张力 /kN	索 12 中点 垂向坐标/m	索 23 张力 /kN	索 23 中点 垂向坐标/m
文献[1]数值解	33.8966	0.11820	33.8970	0.53634
本文理论解	33.7699	0.11869	33.7699	0.54321

表 2 支座不等高情况计算结果

Table 2 Calculated results for the nonequal height of supporting				
	索 12 水平 张力/kN	索 12 中点 垂度/m	索 23 水平 张力/kN	索 23 中点 垂度/m
文献[1]数值解	57.2868	0.14591	52.9746	0.73634
本文理论解	57.9864	0.14153	52.1399	0.72190

简单. 本文推导的公式不受小垂度的限制.

参 考 文 献

1 唐建民. 索穹顶体系的结构理论研究:[学位论文]. 上海: 同济大学, 1996
2 王晓明. 悬索的变原长计算模式. 计算结构力学及其应用, 1992, 9(2): 335 ~ 339
3 王晓明, 刘北辰. 单线索道矿斗运行过程模拟计算. 昆明工学院学报, 1986(2): 113 ~ 120

An Analytical Method for Two-span Continuous Cable Structures Sliding on the Middle Support

Tang Jianmin

(College of Civil Engineering, Hohai Univ., Nanjing 210098)

Shen Zuyan

(College of Civil Engineering, Tongji Univ., Shanghai 200092)

Abstract According to the nonlinear elastical theory, it is assumed that the cable possesses ideal flexibility and meets HuKe's principle. With the help of the equilibrium and deformation condition of single cable an analytical method for two-span continuous cable structures with sliding cable elements in the middle node is presented. By means of the Newton-Raphson method, a nonlinear computation method is obtained, and an example is given. Numerical results show that the present model is of high precision, and can be adopted in engineering practice.

Key words continuous cable ; sliding element ; nonlinearity ; analytical method

· 简讯 ·

《河海大学学报(社会科学版)》公开出版发行

经国家新闻出版署批准,《河海大学学报(社会科学版)》于 1999 年起公开出版发行.

《河海大学学报(社会科学版)》为社科类学术期刊,主要刊登哲学、政治学、文学、史学、语言学、法学、社会学、心理学、经济学、管理学、高等教育学等社会科学方面的研究成果、学术论文、综述等学术性文章.

《河海大学学报(社会科学版)》国内统一刊号为 CN32-1521/C,国际标准刊号为 1008-3316. 16 开,季末出版,每期 80 页. 自办发行,每期定价 3.00 元,全年 16 元(含邮寄费).

欢迎投稿、欢迎订阅.

本刊地址 南京市西康路 1 号《河海大学学报(社会科学版)》编辑部

邮编 210098

电话:(025)3713777-51381

电子信箱 kkb@hhu.edu.cn

征订处 本刊编辑部

《河海大学学报(社会科学版)》编辑部