

河床演变计算中二维网格生成

沙撈·巴里 陈界仁 陈国祥

(河海大学水文水资源及环境学院 南京 210098)

摘 要 采用椭圆型方程生成网格,网格的初始解由代数方法给出,讨论了系数选取对网格疏密调整的影响.变换的椭圆型方程用 Gauss-Seidel 迭代,并辅之以超松弛加速收敛,分析了收敛准则对计算时间、网格光滑性及精度的影响.最后对复杂边界的水库生成了符合要求的曲线网格.

关键词 网格生成 椭圆型方程 代数方法

中图号 TV147

天然河道、水库的形态通常是不规则的,要在这种形态复杂的区域进行数值模拟较困难,通常采用曲线网格.椭圆型方程曲线网格生成方法由于精度高,光滑性好而广泛采用.高阶椭圆型方程用得较少,多采用二阶方程,它能避免高阶方程中用中心差分引起的收敛性和稳定性问题.

椭圆型方程网格生成基本方法是在物理区域上求解二维拉普拉斯方程或泊松方程,生成网格的好坏用变换矩阵来评价.这种网格生成方法也适用于水库的复杂边界,并可同时考虑支流情况.

1 网格生成的椭圆型方程

方程的选择主要与求解的问题及网格性质有关,如要网格正交,则用拉普拉斯方程,而泊松方程可控制网格的疏密,但其调整函数不易确定.将拉普拉斯方程与代数方法相结合,同样可调整网格疏密,但在边界附近失去了正交性.

对于 x, y 有微分方程:

$$\alpha x_{\xi\xi} - 2\beta x_{\xi\eta} + \gamma x_{\eta\eta} + J^2(Px_{\xi} + Qx_{\eta}) = 0 \quad (1)$$

$$\alpha y_{\xi\xi} - 2\beta y_{\xi\eta} + \gamma y_{\eta\eta} + J^2(Py_{\xi} + Qy_{\eta}) = 0 \quad (2)$$

式中 $\alpha = x_{\eta}^2 + y_{\eta}^2, \beta = x_{\xi}x_{\eta} + y_{\xi}y_{\eta}, \gamma = x_{\xi}^2 + y_{\xi}^2, J = x_{\xi}y_{\eta} - y_{\xi}x_{\eta}$.

P, Q 可用文献[1]中的方法确定,但其中的系数不易确定,较好的方法是根据边界点的分布计算 P 和 Q . 边界一般为 ξ 线或 η 线,此时另一方向的导数为零,如 P 由 η 线的边界确定(ξ 消失), Q 由 ξ 线边界确定,则有

$$\alpha x_{\xi\xi} = -Px_{\xi} \quad \gamma y_{\eta\eta} = -Qy_{\eta} \quad (3)$$

通常边界上的 x, y 值是已知的,这样可通过计算偏导数,由式(3)来确定 P, Q . 如要进一步控制网格点的分布,采用代数方法计算变换的拉普拉斯方程的初始解.

2 网格调整的代数方法

泊松方程中 P, Q 不易确定,可采用拉普拉斯方程生成网格,但拉普拉斯方程本身不具备调整网格疏密的能力.解决的办法是:先确定边界点,再用代数方法计算物理域中的初始网格,其计算式为[2]:

$$x_{j,i} = x_{1,i} + \sigma_i \left\{ 1 + \beta \left\{ 1 - [(\beta + 1)/(\beta - 1)]^{1-\eta} \right\} / \left\{ 1 + [(\beta + 1)/(\beta - 1)]^{1-\eta} \right\} \right\} \quad (4)$$

$$y_{j,i} = y_{1,i} + \phi_i \left\{ 1 + \beta \left\{ 1 - [(\beta + 1)/(\beta - 1)]^{1-\eta} \right\} / \left\{ 1 + [(\beta + 1)/(\beta - 1)]^{1-\eta} \right\} \right\} \quad (5)$$

式中: $\sigma_i = x_{m,i} - x_{1,i}$; $\phi_i = y_{m,i} - y_{1,i}$; $\eta = (j - 1)/(m - 1)$.

β 网格调整参数($\beta = 1 \sim \infty$), β 值较大时(如 > 5) 几乎没有调整作用, 当 β 接近 1 时, 网格密集于下边界. 如果要关注物理域边界附近的情况, 用式(6)(7)的代数方法更合适.

$$x_{j,i} = x_{1,i} + \sigma_i \frac{[2\alpha - \beta + [(2\alpha + \beta)\theta_1]]}{[(2\alpha + 1)\theta_2]} \tag{6}$$

$$y_{j,i} = y_{1,i} + \phi_i \frac{[2\alpha - \beta + [(2\alpha + \beta)\theta_1]]}{[(2\alpha + 1)\theta_2]} \tag{7}$$

$$\theta_1 = [(\beta + 1)/(\beta - 1)]^{(\eta - \alpha)/(1 - \alpha)}$$

$$\theta_2 = 1 + [(\beta + 1)/(\beta - 1)]^{(\eta - \alpha)/(1 - \alpha)}$$

式中 β 接近于 1.0 时有调整作用, β 大时则无调整. 当 $\alpha = 0$ 时, 网格线集中于上边界线($\eta = 1$), 当 $\alpha = 0.5$ 时, 网格线向上下边界密集($\eta = 1$ 和 $\eta = 0$).

当计算中需要向任一网格线密集时:

$$x_{j,i} = x_{1,i} + \lambda \sigma_i \frac{[1 + \sinh[\beta(\eta - A)]]}{\sinh(\beta A)} \tag{8}$$

$$y_{j,i} = y_{1,i} + \lambda \phi_i \frac{[1 + \sinh[\beta(\eta - A)]]}{\sinh(\beta A)} \tag{9}$$

其中 $A = \ln \frac{[1 + \lambda(e^\beta - 1)]}{[1 + \lambda(e^{-\beta} - 1)]} / 2\beta$, β 为 $0 \sim \infty$, λ 为 $0 \sim 1$, 当 $\lambda = 0.5$ 时, 网格线密集到计算域中部, 同样, 当 $\lambda = 0.25$ 和 0.75 时, 网格线集中到 $\eta = 0.25$ 和 $\eta = 0.75$ 线附近.

利用代数方法和变换的拉普拉斯方程, 可调整网格疏密, 避免确定源项 P, Q . 生成的网格光滑, 但失去正交性.

3 数值求解

由于椭圆型偏微分方程为非线性, 不能在物理域上直接求解, 只能进行数值解. 先计算系数 α, β, r, J , 再迭代求解, 式(1)(2)采用中心差分进行离散(P, Q 取零), 离散方程用 Gauss-Seidel 迭代, 为加快收敛速度, 辅之以超松弛迭代. 也可用泊松方程来生成网格, 算法同上, 但其最佳松弛系数 μ 的确定并无固定的法则, 视问题不同用试算办法确定.

偏导数 $x_\xi, x_\eta, y_\xi, y_\eta$ 反映了生成网格的质量, 代表了生成网格的斜度, 如矩阵发生突变, 表明需要调整某些参数. 偏导数代表计算域中弧长与物理域中长度之比, 每一个节点用差分方法计算. 在域内用中心差分离散, 在边界上, 用向前或向后二阶差分.

4 应 用

4.1 水库网格生成

上述网格生成方法应用于水库不规则边界计算中, 边界坐标由库区地形按正常库水位确定, 初始网格用代数方法计算.

图 1 是用代数方法生成的初始网格, α 均取 0.5, 图 1(a) 中 $\beta = 1.05$ 接近于 1, 网格线在边界附近较密集, 图 1(b) 中 β 较大($\beta = 5.0$), 网格线集中在中部, α, β 系数不同时的结果受篇幅限制未列. 有了这些初始网格, 利用 Gauss-Seidel 迭代, 辅之以加速收敛, 可产生光滑的近乎正交的网格, 图略.

在计算中, 收敛标准的选择对计算时间和网格质量有影响, 本文采用:

$$\sum [|x_{j,i}^{k+1} - x_{j,i}^k|] + \sum [|y_{j,i}^{k+1} - y_{j,i}^k|] \leq \epsilon \tag{10}$$

只需迭代 50 步即可, 生成的网格光滑可接受.

4.2 多连通域

多连通域的网格生成是通过增加辅助线将水域中所含陆域(如岛屿)人为切开, 形成单连通区域, 按单连通域生成曲线网格. 但该法在进行陆域映射时会产生双值问题, 可采用复合网格法处理, 其基本思想是将物理域中陆域对应于计算域中的一段, 关键是段的连接.

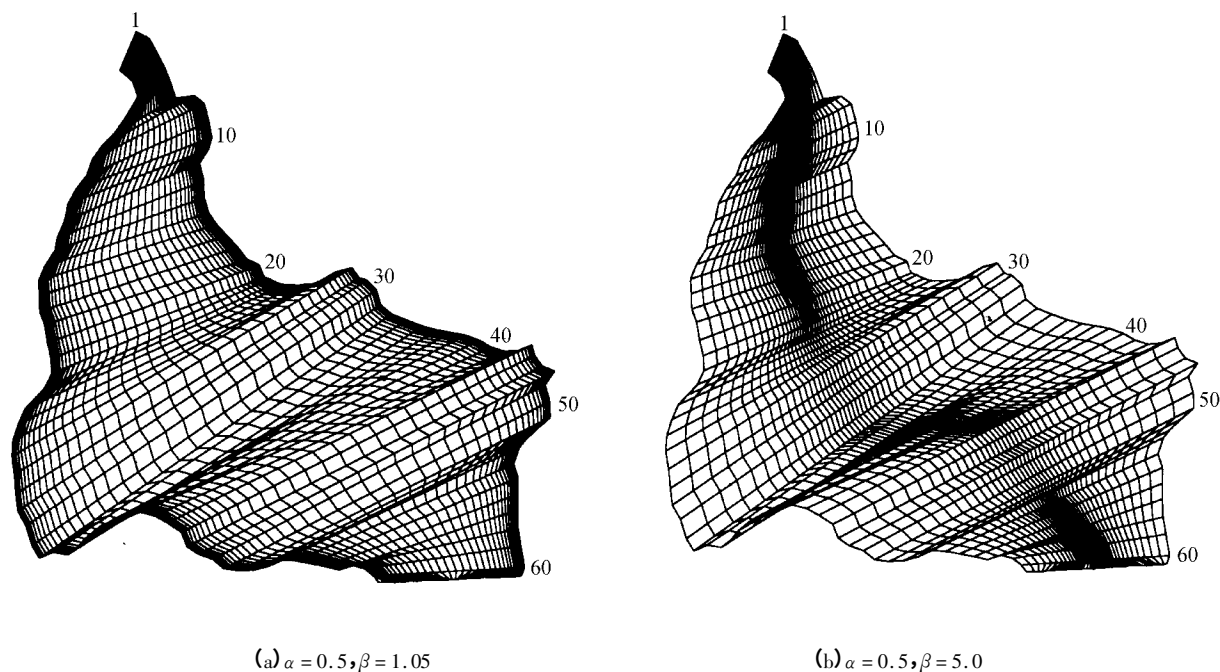


图1 代数方法生成初始网格

Fig.1 Initial grids with algebraic method

参 考 文 献

- 1 George P L. Automatic mesh generation for finite element applications. Masson: John Wiley & Sons, 1991. 97 ~ 110
- 2 Hoffman K A. Computational fluid dynamics for engineers. Texas: Engineering Education Systems, 1989. 24 ~ 32

Elliptic Generation of 2 - D Grids for Analysis of River Morphological Changes

Salau O. Buari Chen Jieren Chen Guoxiang

(College of Water Resources and Environment, Hohai Univ., Nanjing 210098)

Abstracts Elliptic partial differential equations are used to generate a curvilinear mesh. The initial grids are provided by the algebraic method. The effect of the coefficient of the algebraic method on clustering of the mesh is discussed. The inverted partial differential equations are solved by the Gauss-Seidel method and the convergence is accelerated with successive over-relaxation. The curvilinear grids of reservoirs with complex boundaries are generated.

Key words grid generation; elliptic partial differential equations; algebraic method