

水电站水库入库径流随机模型

徐招才

(浙江水利水电高等专科学校 杭州 310016)

摘 要 在水电站水库优化调度中,水库入库径流的描述直接影响水库运用的动能经济效益和工程安全.为了更客观地反映雨源型河川径流内在的随机特性和时历特性规律,较好地反映河川径流的连续性,将中小型水库入库径流过程按连续随机过程处理,提出雨源型水库的入库径流具有马氏链特性的条件,将十分复杂的径流关系简化为相邻时段间的相关关系,使问题大为简化.根据卡氏建议,将径流转换成对应的另一变量,按正态分布规律的频率密度分配微分方程,建立全年各时段的径流转移概率矩阵数学模型,作为水库入库径流的数学描述,实用性强.

关键词 入库径流,随机过程,马氏链,正态分布,转移概率矩阵,数学模型

中图号 TV121

在研究水电站水库优化调度中,水库入库径流的描述直接影响调度成果,影响水库运用的动能经济效益和工程安全.南方水电站水库的入库径流均为雨源型,具有多变性与不确定性的特点,其流量的发生是一种连续随机过程,从而使水电站的运行情况也具有随机性.对入库径流的这种不确定性,若能以数学形式加以描述,从而采用动态规划法进行水库优化调度,可大大提高电站运行的动能经济效益,提高工程安全性.

1 入库径流的随机描述

水电站水库入库径流存在着以年为周期的循环,但又是一个^[1]随时间变化的连续随机过程.这种随机过程我们用记号 $\{Q_t; t \in T\}$ 来表达,其中 T 为时间指标集, Q_t 为时刻 t 的随机变量,即流量.

若将连续随机过程 $\{Q_t; t \in T\}$ 在时间上进行离散,将一个年度划分成若干时段,以 t 表示时段编号, Q_t 表示时段 t 的平均流量,则随机过程 $\{Q_t; t \in T\}$ 存在二重特性^[2](a)对于某一特定时段 $t_0, t_0 \in T$,则 Q_{t_0} 是随机变量;(b)随机变量 Q_t ,即水库入库径流是一个随时间变化的函数.长期来,我们采用特性(a)的统计规律,用统计法来分析水库入库径流,也采用特性(b)的时历特性,用时历法计算电站水库的来水过程.两种方法在实际工程设计中均具有良好的实用效果.

为了更客观地反映天然水流的内在规律,不人为地将以上两种特性加以分割,而将两种特性揉合在一起,来描述入库径流的随机过程,可将 $\{Q_t; t \in T\}$ 表示为:

$$P(Q_{n+k} | Q_{n+k-1}, Q_{n+k-2}, Q_{n+k-3}, \dots, Q_n) \tag{1}$$

式中 $Q_{n+k}, Q_{n+k-1}, Q_{n+k-2}, \dots, Q_n$ 分别表示时段 $t_{n+k}, t_{n+k-1}, t_{n+k-2}, \dots, t_n$ 的时段平均流量,其前向排列关系如图 1 所示.

式(1)较详细地描述了水库入库径流的随机过程特征, k 值取得越大,描述的随机过程越详尽、越具体,但计算量将相当大.实际上,当 k 值适当大时, Q_{n+k} 与 Q_n 的联系已经十分微弱,以致在实际工作中可忽略不计,并不影响最终结果的精确性.在实际工程中,特别是一些中小河流上的中型及一些小型水

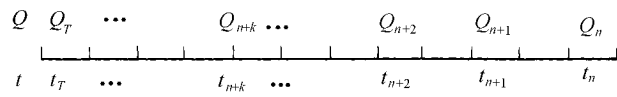


图 1 时段平均流量排列
Fig.1 Array of period-averaged flow

库实测水文系列均较短,故 k 值宜取较小数值^[3,4].当取 $k=1$ 时,式(1)成为

$$P(Q_{n+k} | Q_{n+k-1}, Q_{n+k-2}, \dots, Q_n) = P(Q_{n+1} | Q_n) \quad (2)$$

式(2)所表达的径流随机过程表明,面临时段径流只与相邻时段径流存在相关关系,而与以往时段径流的大小无关.符合式(2)条件的 $\{Q_t; t \in T\}$ 称为简单的马尔柯夫型随机过程,简称马氏链.

马氏链描述的随机过程相邻时段间相关关系常采用自回归线表示,并以线性自回归方程表达,即

$$Q_n = \overline{Q_n} + \frac{\sigma_n}{\sigma_{n+1}} \cdot \gamma_{n,n+1}(Q_{n+1} - \overline{Q_{n+1}}) + \zeta \quad (3)$$

式中: $\overline{Q_n}, \overline{Q_{n+1}}$ ——时段 n 与时段 $n+1$ 的平均流量; σ_n, σ_{n+1} ——时段 n 与时段 $n+1$ 的径流系列均方差; $\gamma_{n,n+1}$ ——时段 n 与时段 $n+1$ 的径流间相关系数; ζ ——相关直线的偏差值,偏差值 ζ 随着不同时段间径流相关关系而变化,亦具有不确定性,为随机变量.

2 马氏链适用条件

马尔柯夫随机过程将十分复杂的关系简化为相邻时段径流间的相关关系,使问题大为简化.但马氏链是否适用于入库径流的基本规律,需加以证明.若能证明第 n 时段($n=1, 2, \dots, t_T$)的径流与第 $n+2$ 时段的径流不存在直接的联系,而只与第 $n+1$ 时段的径流存在联系,即说明该入库径流的随机过程具有马氏链特性.

第 $n, n+1, n+2$ 时段间的径流关系可用复相关自回归线性方程表示,即

$$Q_n = \overline{Q_n} + \frac{\sigma_n(\gamma_{n,n+1} - \gamma_{n,n+2} \cdot \gamma_{n+1,n+2})}{\sigma_{n+1}(1 - \gamma_{n+1,n+2}^2)}(Q_{n+1} - \overline{Q_{n+1}}) + \frac{\sigma_n(\gamma_{n,n+2} - \gamma_{n,n+1} \cdot \gamma_{n+1,n+2})}{\sigma_{n+2}(1 - \gamma_{n+1,n+2}^2)}(Q_{n+2} - \overline{Q_{n+2}}) + \zeta \quad (4)$$

式中: $\gamma_{n,n+2}, \gamma_{n+1,n+2}$ ——时段 n 与时段 $n+1$ 、时段 $n+1$ 与时段 $n+2$ 间的径流相关系数.在式(4)中,当 $\gamma_{n,n+2} - \gamma_{n,n+1} \cdot \gamma_{n+1,n+2} = 0$ 时,即有

$$\gamma_{n+1,n+2} = \frac{\gamma_{n,n+2}}{\gamma_{n,n+1}} \quad (5)$$

式(5)代入式(4),经化简整理后可得出,式(4)与式(3)完全相同,复相关与单相关等价,即:

$$P(Q_n | Q_{n+1}, Q_{n+2}) = P(Q_n | Q_{n+1}) \quad (6)$$

由上可知,式(5)是入库径流随机过程 $\{Q_t; t \in T\}$ 复相关与单相关等价的条件.

在一般情况下,同理可得出式(2)成立的条件为:

$$\left. \begin{aligned} \gamma_{n,n+j} - \gamma_{n,n+1} \cdot \gamma_{n+1,n+2} \cdots \gamma_{n+j-1,n+j} &= 0 \\ n &= 1, 2, 3, \dots \quad j = 2, 3, 4, \dots \end{aligned} \right\} \quad (7)$$

当式(7)中取 $j=2$ 时,式(7)即为式(5).实际上,采用式(5)作为判别径流随机过程 $\{Q_t; t \in T\}$ 马氏链的适用性已较为符合实际情况.对雨源型的山区中小型水库的入库径流过程,降雨和径流形成的关系甚为密切,时段间隔仅为数天,而计算时段一般为旬、月,考虑相邻时段相关已足够精确,很难引起间隔时段的径流相关.对于大型水库,优化调度计算中时段取值相对更长,考虑相邻月份之间径流相关也已足够精确.现随机选取浙江某小型水电站水库的3月、4月、5月间月径流相关,根据23年的月径流资料分别计算得到3个月份相互间的月径流相关系数为 $\gamma_{3,4}=0.16, \gamma_{4,5}=0.03395, \gamma_{3,5}=0.00441$.计算结果表明,相邻时段间径流相关程度已很差,隔时段相关关系基本为零相关,其相互关系符合马氏一阶模型,即 $\gamma_{3,5} \approx \gamma_{3,4} \cdot \gamma_{4,5}$.针对枯水期各时段间径流相关分析得到同样结果.由上证明可知,式(5)为马氏链适用条件.

3 入库径流的数学模型

我们已经证明式(5)为复相关与单相关等价的条件,即在入库径流的随机模型中只考虑相邻时段的相关.据此,我们将径流量离散化,对于第 n 时段($n=1, 2, \dots, t_T$)的径流具有状态集 $\{Q_1, Q_2, \dots, Q_n\}_n$.

以 P_{ij} 表示 n 时段的径流 Q_i 转移到第 $n+1$ 时段径流 Q_j 状态的概率,即 $P(Q_{n+1} | Q_n = i) = P_{ij}$,称为系统一步转移概率,可用马氏一步转移概率矩阵表示^[4]:

$$P = (P_{ij}) = \begin{bmatrix} P_{11} & P_{12} & P_{13} & \cdots \\ P_{21} & P_{22} & P_{23} & \cdots \\ P_{31} & P_{32} & P_{33} & \cdots \end{bmatrix}$$

(8)

若系统由径流 Q_i 经 n 步转移到径流 Q_j 的马氏 n 步转移概率矩阵为

$$P_n = (P_{ij})_n \quad i, j = 1, 2, 3, \dots, M \quad n = 1, 2, 3, \dots, T$$

(9)

河川径流的频率密度分配曲线比较符合皮尔逊Ⅲ型曲线,水文分析中大多采用.在寻求条件概率时,为使计算简化,根据卡特维利斯维利教授建议^[1],在水文学中,概率分布函数可以表示成为同一目的而采用的任何一种形式,找出一个符合标准正态分布规律的非减函数 $f(x)$,将径流转换成对应的按正态分布的另一变量 x ,从而可利用正态分布的微分方程式将计算简化.

根据正态频率密度分配曲线方程,有:

$$f(x_n | x_{n+1}) = \frac{1}{\sigma'_n \sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x_n - x_n(n+1))^2}{2\sigma_n'^2}}$$

(10)

对式(10)进行积分,即得到累积转移概率:

$$F(x_n | x_{n+1}) = \int_{-\infty}^{x_n} \frac{1}{\sigma'_n \sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x_n - x_n(n+1))^2}{2\sigma_n'^2}} dx$$

(11)

令:

$$t = \frac{x_n - x_n(n+1)}{\sigma_n}$$

(12)

经式(12)换元,将式(11)变换成如下形式:

$$F(x_n | x_{n+1}) = \int_{-\infty}^{x_n} \frac{x_n - x_n(n+1)}{\sqrt{1 - \gamma_{n,n+1}^2}} \cdot \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{t^2}{2}} dt =$$
$$0.5 + \alpha \left(\frac{x_n - x_n(n+1)}{\sqrt{1 - \gamma_{n,n+1}^2}} \right)$$

(13)

以 σ'_n 为 x_n 倚 x_{n+1} 回归线的均方误, $x_n/(n+1)$ 为 x_{n+1} 的回归线中对应于 x_n 的坐标值,即对应于条件 x_{n+1} 的 x_n 的数学期望值.

根据式(13)计算径流状态转移概率矩阵
框图如图 2,根据式(13)
计算各个时段的径流转移概率矩阵 P

$$P_n = (P_{ij})_n$$

$$i, j = 1, 2, 3, \dots, M \quad n = 1, 2, 3, \dots, T$$

矩阵 P_n 为描述全年各时段径流转移概率的数学模型,即随机径流过程 $\{Q_t; t \in T\}$ 的马氏链径流描述,作为水库优化调度入库径流的随机过程,具有实用意义.

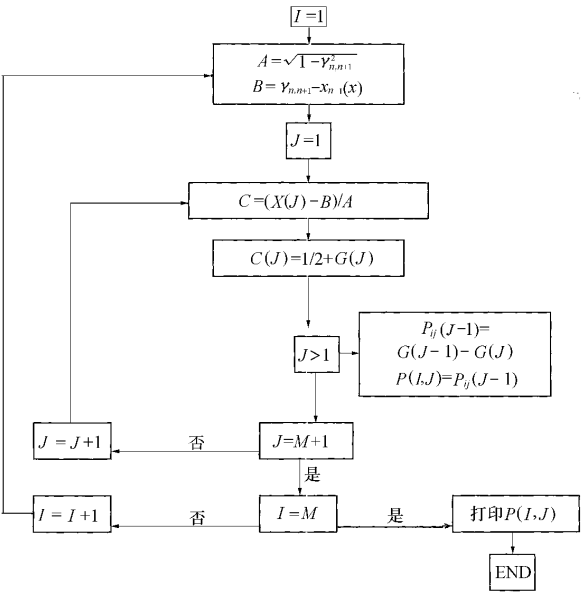


图 2 径流状态转移概率矩阵框图

Fig.2 Matrix block chart of runoff state transfer probability

参 考 文 献

1 卡特维利斯维利 H A. 运筹学在水文水利计算中的应用. 北京: 科学出版社, 1960. 71 ~ 72
2 熊斯毅, 黄益芬. 马尔柯夫决策规划在水电站水库优化调度中的应用. 水力发电, 1980(2): 11 ~ 16
3 丛树铮. 水文学概率统计基础. 北京: 水利出版社, 1981. 158
4 董子敖. 水库群调度与规划的优化理论和应用. 济南: 山东科学技术出版社, 1989. 344 ~ 345

A Stochastic Model of Inflow Runoff into a
Reservior of Hydropower Station
Xu Zhaocai

(Zhejiang Water Conservancy and Hydropower College ,Hangzhou 310016)

Abstract The description of runoff into the reservior of a hydropower station directly affects the dynamic economic benefits of the operation of the reservoir and the safety of the project. To reflect objectively the characteristics of randomness and time dependence of runoff of rainsource rivers , and the continuity of runoff , this article treats runoff into small and medium reservoirs as a continuous random process. The runoff into a reservoir of rain source pattern has Ma's Chain characteristic , thus , the complicated relation of runoff can be simplified into the relation of neighbouring time intervals. Based upon Ka's suggestion , runoff is converted to another corresponding variable. According to the frequency density distribution differential equation of normal distribution law , the matrix mathematic model of runoff transfer probability is set up for every period of the year. This mathematic model can function as a mathematic discription of runoff into the reservoir and it is very practical.

Key words runoff into reservoir ; random process ; Ma's Chain ; normal distribution ; transfer probability matrix ; mathematic model