

紊流模式中的耗散相关和能耗率

张长高

(河海大学水文水资源及环境学院 南京 210098)

摘 要 在前人研究的成果——将耗散相关 ϵ_{ij} 和能耗率 ϵ 分解为非均匀部分和均匀部分——的基础上,进一步将均匀部分分解为主要部分即各向同性部分和剩余部分.分析了各向同性部分 ϵ_h 与脉动能 k 、横向微比尺 λ_g 的关系,指出 ϵ_h 随着脉动能 k 的取值,落在阻力平方区、过渡区和阻力线性区等范围,提出了可以代替紊流模式中并不精确的能耗率简化方程的算式.

关键词 紊流;耗散相关;能耗率;各向同性紊流;横向微比尺

中图分类号 TV131.21

1 以往的研究成果

1953 年 J. M. Burgers 和 M. Mitchner 为了表明紊流时两点速度相关不仅与两点的间距 $(x_k)_B - (x_k)_A$ 有关,还与两点所在位置 $\frac{1}{2}[(x_k)_A + (x_k)_B]$ 有关^[1],引入了两个自变量作为相关坐标:

$$\xi_k = (x_k)_B - (x_k)_A \quad \eta_k = \frac{1}{2}[(x_k)_A + (x_k)_B] \quad (1)$$

有偏导数关系

$$\left(\frac{\partial}{\partial x_k}\right)_A = \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial \eta_k} - \frac{\partial}{\partial \xi_k} \quad \left(\frac{\partial}{\partial x_k}\right)_B = \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial \eta_k} + \frac{\partial}{\partial \xi_k} \quad (2)$$

$$\left(\frac{\partial}{\partial x_k}\right)_A \left(\frac{\partial}{\partial x_k}\right)_B = \frac{1}{4} \frac{\partial^2}{\partial \eta_k \partial \eta_k} - \frac{\partial^2}{\partial \xi_k \partial \xi_k} \quad (3)$$

1972 年 B. A. Kolovandin 和 I. A. Vatutin 用式(3)研究耗散相关^[2],有

$$\overline{\left(\frac{\partial u_i}{\partial x_k}\right)_A \left(\frac{\partial u_j}{\partial x_k}\right)_B} = \left(\frac{\partial}{\partial x_k}\right)_A \left(\frac{\partial}{\partial x_k}\right)_B \overline{(u_i)_A (u_j)_B} = \frac{1}{4} \frac{\partial^2 \overline{(u_i)_A (u_j)_B}}{\partial \eta_k \partial \eta_k} - \frac{\partial^2 \overline{(u_i)_A (u_j)_B}}{\partial \xi_k \partial \xi_k} \quad (4)$$

式中 u_i, u_j 为脉动流速,字母上的横划表示统计平均. $B \rightarrow A$ 时, $\eta_k \rightarrow x_k, \xi_k \rightarrow 0$,得

$$\frac{\partial u_i}{\partial x_k} \frac{\partial u_j}{\partial x_k} = \frac{1}{4} \frac{\partial^2 \overline{u_i u_j}}{\partial x_k \partial x_k} - \left(\frac{\partial^2 \overline{u_i u_j'}}{\partial \xi_k \partial \xi_k}\right)_0 \quad (5)$$

于是建立了耗散相关的分解方程:

$$\epsilon_{ij} = \nu \frac{\partial u_i}{\partial x_k} \frac{\partial u_j}{\partial x_k} = \frac{\nu}{4} \frac{\partial^2 \overline{u_i u_j}}{\partial x_k \partial x_k} - \nu \left(\frac{\partial^2 \overline{u_i u_j'}}{\partial \xi_k \partial \xi_k}\right)_0 \quad (6)$$

式中 ϵ_{ij} ——原有耗散相关的一半; ν ——运动粘性系数. 方程(6)中末了一项的脚注“0”指 $\xi_k \rightarrow 0, u_j$ 右上角的“'”号指 $B \rightarrow A$. 文献[2]称方程(6)右边第一项为非均匀部分,第二项为均匀部分,用脚注“h”表示为 $(\epsilon_{ij})_h$,并指出 (ϵ_{ij}) 既是对称张量,必有

$$(\epsilon_{ij})_h = -\nu \left(\frac{\partial^2 \overline{u_i u_j'}}{\partial \xi_k \partial \xi_k}\right)_0 = -\nu \left(\frac{\partial^2 \overline{u_i' u_j}}{\partial \xi_k \partial \xi_k}\right)_0 \quad (7)$$

今由

$$\overline{\left(\frac{\partial u_i}{\partial x_k}\right)_B \left(\frac{\partial u_j}{\partial x_k}\right)_A} = \left(\frac{\partial}{\partial x_k}\right)_B \left(\frac{\partial}{\partial x_k}\right)_A \overline{(u_i)_B (u_j)_A} = \frac{1}{4} \frac{\partial^2 \overline{(u_i)_B (u_j)_A}}{\partial \eta_k \partial \eta_k} - \frac{\partial^2 \overline{(u_i)_B (u_j)_A}}{\partial \xi_k \partial \xi_k}$$

当 $B \rightarrow A$ 时,便有

$$\frac{\partial \overline{u_i}}{\partial x_k} \frac{\partial \overline{u_j}}{\partial x_k} = \frac{1}{4} \frac{\partial^2 \overline{u_i u_j}}{\partial x_k \partial x_k} - \left(\frac{\partial^2 \overline{u_i' u_j'}}{\partial \xi_k \partial \xi_k} \right) \lambda \quad (8)$$

比较(5)(8)两式,便知式(7)成立.由方程(6)即得能耗率 ϵ 的分解方程

$$\epsilon = \epsilon_{ii} = \frac{\nu}{2} \frac{\partial^2 k}{\partial x_k \partial x_k} - \left(\frac{\partial^2 \overline{u_i u_i'}}{\partial \xi_k \partial \xi_k} \right) \lambda \quad (9)$$

式中 $k = \frac{1}{2} \overline{u_i u_i'}$, 为脉动能.这样,求解能耗率 ϵ 的问题就转化为求解其均匀部分

$$\epsilon_h = - \left(\frac{\partial^2 \overline{u_i u_i'}}{\partial \xi_k \partial \xi_k} \right) \lambda \quad (10)$$

1992年 J. Jovanovic, Q-Y. Ye 和 F. Durst^[2] 试令

$$\epsilon_h = 10\nu \frac{k}{\lambda_g^2} \quad (11)$$

式中 λ_g 为横向微比尺,并取在边壁 $x_2 = 0$ 邻近, $\lambda_g = 2\sqrt{10}x_2$. 1995年又根据两点间脉动流速 $(u_i)_A (u_i)_B$ 相关方程^[2],建立了 ϵ_h 的方程:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \epsilon_h}{\partial t} + U_k \frac{\partial \epsilon_h}{\partial x_k} = & 2\nu \left[\left(\frac{\partial^2 \overline{u_k' u_i'}}{\partial \xi_j \partial \xi_j} \right) \lambda + \left(\frac{\partial^2 \overline{u_j u_j'}}{\partial \xi_k \partial \xi_k} \right) \lambda \right] \frac{\partial U_i}{\partial x_k} + \\ & \nu \left[\frac{1}{4} \frac{\partial \overline{u_i u_i'}}{\partial x_k} \frac{\partial^2 U_k}{\partial x_j^2} + \frac{1}{2} \overline{u_k u_i} \frac{\partial^2}{\partial x_j \partial x_j} \left(\frac{\partial U_i}{\partial x_k} \right) - \left(\frac{\partial^2 \overline{u_k u_i'}}{\partial \xi_j \partial \xi_j} \right) \lambda \frac{\partial^2 U_i}{\partial x_k \partial x_j} \right] + \\ & \frac{\nu}{\rho} \frac{\partial^2}{\partial \xi_k \partial \xi_k} \left[\left(\frac{\partial \overline{p u_i'}}{\partial \xi_i} \right) \lambda - \left(\frac{\partial \overline{p' u_i}}{\partial \xi_i} \right) \lambda \right] - \frac{\nu}{2\rho} \frac{\partial^2}{\partial \xi_k \partial \xi_k} \left[\left(\frac{\partial \overline{p u_i'}}{\partial x_i} \right) \lambda + \left(\frac{\partial \overline{p' u_i}}{\partial x_i} \right) \lambda \right] + \\ & \nu \frac{\partial}{\partial \xi_k} \left[\left(\frac{\partial^2 \overline{u_i u_k' u_i'}}{\partial \xi_j \partial \xi_j} \right) \lambda - \left(\frac{\partial^2 \overline{u_i' u_k u_i}}{\partial \xi_j \partial \xi_j} \right) \lambda \right] + \frac{\nu}{2} \frac{\partial}{\partial x_k} \left[\left(\frac{\partial^2 \overline{u_i u_k' u_i'}}{\partial \xi_j \partial \xi_j} \right) \lambda + \left(\frac{\partial^2 \overline{u_i' u_k u_i}}{\partial \xi_j \partial \xi_j} \right) \lambda \right] + \\ & \frac{\nu}{2} \frac{\partial^2 \epsilon_h}{\partial x_j \partial x_j} + 2 \left(\frac{\partial^2 \epsilon_h}{\partial \xi_j \partial \xi_j} \right) \lambda \end{aligned} \quad (12)$$

式中: U_i ——统计平均流速; p ——脉动压强; ρ ——流体密度.鉴于方程(12)引出了许多新的未知量,难以求解,文献[2]建议了一个简化方程:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \epsilon_h}{\partial t} + U_k \frac{\partial \epsilon_h}{\partial x_k} = & -c_{\epsilon 1} \frac{\epsilon_h \overline{u_i u_k}}{k} \frac{\partial U_i}{\partial x_k} - c_{\epsilon 2} f_{\epsilon} \frac{\epsilon_h \left[\epsilon_h - \left(\frac{\partial k^{\frac{1}{2}}}{\partial x_2} \right)^2 \right]}{k} + \\ & \frac{\partial}{\partial x_k} \left(c_{\epsilon} \frac{k}{\epsilon_h} \overline{u_k u_i} \frac{\partial \epsilon_h}{\partial x_i} \right) + \frac{\nu}{2} \frac{\partial^2 \epsilon_h}{\partial x_j \partial x_j} \end{aligned} \quad (13)$$

其中

$$c_{\epsilon 1} = 1.44 \quad c_{\epsilon 2} = 1.92 \quad c_{\epsilon} = 0.18$$

$$f_{\epsilon} = 1 - \frac{0.52}{1.92} \left\{ \exp \left[- \left(\frac{1}{6} \frac{k^2}{\nu \epsilon_h} \right)^2 \right] \right\} \quad (14)$$

这样,在 $k-\epsilon$ 紊流模式中用方程(13)代替了 ϵ 方程.

2 对 $(\epsilon_{ij})_h$ 和 ϵ_h 的分析

从方程(12)的复杂性可以看到,简化方程(13)并没有可靠的理论依据,引入一些系数其适用范围即使不是可疑的,也是非常局限的,这就迫使我们寻求新的途径.式(11)建议了一个在边壁附近的算法,启发笔者考虑把这一方法用到全部流区的可能性.笔者认为既然分解方程(6)是从运动学方面、采用两点相关技巧导出的,并未涉及动力学因素,那么分解方程(6)理应适用于各种各样的紊流,自然也适用于各向同性紊流这一特例,此时由于方程(6)中的非均匀部分消失,便有

$$\varepsilon_{ij} = (\varepsilon_{ij})_h = -\nu \left(\frac{\partial^2 \overline{u_i u_j'}}{\partial \xi_k \partial \xi_k} \right)_0 = \frac{1}{3} \varepsilon_h \varepsilon_{ij} \quad (15)$$

$$\varepsilon = \varepsilon_h = -\nu \left(\frac{\partial^2 \overline{u_i u_i'}}{\partial \xi_k \partial \xi_k} \right)_0 = 10\nu \frac{k}{\lambda_g^2} = 20\nu \frac{k}{\lambda_f^2} \quad (16)$$

对于一般紊流情况又将如何? 我们从 $(\varepsilon_{ij})_h$ 的对称性(式(7))着手, 如图 1 所示, A 与 B 两点脉动流速分量为 $(u_i)_A$ 和 $(u_j)_B$, 今取坐标 (r, y, z) , 原点在 A 点, A 与 B 两点间距 $\xi = r$, 于是两点脉动流速相关, 即

$$\overline{(u_i)_A (u_j)_B} = \overline{u_i(0) u_j(r)} = u_i(0) \left[u_j(0) + \frac{\partial u_j}{\partial r} \frac{r}{1!} + \frac{\partial^2 u_j}{\partial r^2} \frac{r^2}{2!} + \dots \right]$$

对 r 求导二次得

$$\frac{\partial^2 \overline{u_i u_j(r)}}{\partial r^2} = \overline{\left(u_i \frac{\partial^2 u_j}{\partial r^2} \right)} + \overline{\left(u_i \frac{\partial^3 u_j}{\partial r^3} \right) r} + \dots$$

$B \rightarrow A$ 时, $\xi = r \rightarrow 0$ 得

$$\left(\frac{\partial^2 \overline{u_i u_j'}}{\partial r^2} \right)_0 = \overline{\left(u_i \frac{\partial^2 u_j}{\partial r^2} \right)}_0 \quad (17)$$

同理, 对于 $\overline{(u_i)_B (u_j)_A}$, 可得

$$\left(\frac{\partial^2 \overline{u_i' u_j}}{\partial r^2} \right)_0 = \overline{\left(u_j \frac{\partial^2 u_i}{\partial r^2} \right)}_0 \quad (18)$$

由于对称性, 下式应成立:

$$\overline{\left(u_i \frac{\partial^2 u_j}{\partial r^2} \right)}_0 = \overline{\left(u_j \frac{\partial^2 u_i}{\partial r^2} \right)}_0 \quad (19)$$

$j = i$ 时, 上式自然成立, 但是 $j \neq i$ 时上式只有两边都等于零时才成立, 可见选用坐标 (r, y, z) 如图 1 所示时, 耗散相关的均匀部分只有对角线项, 其它各项元素为零:

$$(\varepsilon_{ij})_h = -\nu \left(\frac{\partial^2 \overline{u_i u_j'}}{\partial r^2} \right)_0 = -\nu \left(\frac{\partial^2 \overline{u_i' u_j}}{\partial r^2} \right)_0 = (\varepsilon_i)_h \delta_{ij} \quad (20)$$

当然, 式(20)中对角线上三元素 $(\varepsilon_i)_h$ 未必相等, 即 $(\varepsilon_{ij})_h$ 未必各向同性. 今用能耗率 ε 的均匀部分 ε_h 的 $\frac{1}{3}$ 表示 $(\varepsilon_{ij})_h$ 对角线上三元素的平均值, 即

$$\frac{1}{3} (\varepsilon_i)_h \delta_{ij} \Big|_{j=i} = \frac{1}{3} \left[-\nu \left(\frac{\partial^2 \overline{u_i u_i'}}{\partial r^2} \right)_0 \right] = \frac{1}{3} \varepsilon_h \quad (21)$$

使得

$$(\varepsilon_{ij})_h = -\nu \left(\frac{\partial^2 \overline{u_i u_j'}}{\partial r^2} \right)_0 = \left(\frac{1}{3} \varepsilon_h + \nu R_i \right) \delta_{ij} \quad (22)$$

式中 νR_i 是偏离平均值的差量, 有

$$R_1 + R_2 + R_3 = 0 \quad (23)$$

再研究图 1 所示一般坐标 (x_1, x_2, x_3) 情形, 此时 A, B 两点落在任意位置 $(x_k)_A, (x_k)_B$, 其间距

$$r = \left\{ \sum_{k=1}^3 [(x_k)_B - (x_k)_A]^2 \right\}^{\frac{1}{2}} = (\xi_1^2 + \xi_2^2 + \xi_3^2)^{\frac{1}{2}} \quad (24)$$

并有

$$\frac{\partial}{\partial \xi_k} = \frac{\partial}{\partial r} \frac{\partial r}{\partial \xi_k} = \frac{\xi_k}{r} \frac{\partial}{\partial r} \quad \frac{\partial^2}{\partial \xi_k \partial \xi_k} = \frac{\xi_k \xi_k}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial r^2} = \frac{\partial^2}{\partial r^2} \quad (25)$$

今将原坐标 (r, y, z) 中的耗散相关均匀部分

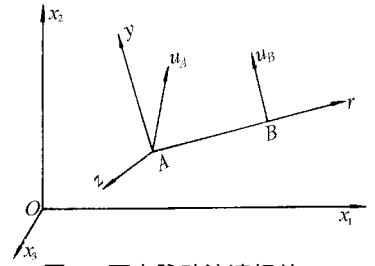


图 1 两点脉动流速相关

Fig.1 Correlation of velocity at two points

$$(\epsilon_{nm})_h = -\nu \left(\frac{\partial^2 \overline{u_n u_n'}}{\partial r^2} \right)_0 = \left(\frac{1}{3} \epsilon_h + \nu R_n \right) \delta_{nm}$$

转换到新坐标 (x_1, x_2, x_3) 中去, 根据二阶张量的坐标变换法则, 可得

$$(\epsilon_{ij})_h = -\nu \left(\frac{\partial^2 \overline{u_i u_j'}}{\partial \xi_k \partial \xi_k} \right)_0 = -\nu \left(\frac{\partial^2 \overline{u_i u_j'}}{\partial r^2} \right)_0 = \alpha_{in} \alpha_{jm} (\epsilon_{nm})_h =$$

$$\alpha_{i1} \alpha_{j1} \left(\frac{1}{3} \epsilon_h + \nu R_1 \right) + \alpha_{i2} \alpha_{j2} \left(\frac{1}{3} \epsilon_h + \nu R_2 \right) + \alpha_{i3} \alpha_{j3} \left(\frac{1}{3} \epsilon_h + \nu R_3 \right)$$

即

$$(\epsilon_{ij})_h = \frac{1}{3} \epsilon_h \delta_{ij} + \nu R_{ij} \quad (26)$$

式中 α_{in}, α_{jm} 为方向余弦, $\alpha_{in} \alpha_{jm} = \delta_{ij}$,

$$R_{ij} = \alpha_{i1} \alpha_{j1} R_1 + \alpha_{i2} \alpha_{j2} R_2 + \alpha_{i3} \alpha_{j3} R_3 \quad R_{ii} = 0 \quad (27)$$

这样, 笔者根据耗散相关的对称性进一步把耗散相关的均匀部分 $(\epsilon_{ij})_h$ 分解为主要部分, 即各向同性部分和剩余部分, 最后将耗散相关 ϵ_{ij} 和能耗率 ϵ 分解为

$$\epsilon_{ij} = \frac{\nu}{4} \frac{\partial^2 \overline{u_i u_j'}}{\partial x_k \partial x_k} + \frac{1}{3} \epsilon_h \delta_{ij} + \nu R_{ij} \quad (28)$$

$$\epsilon = \epsilon_{ii} = \frac{\nu}{2} \frac{\partial^2 \overline{k}}{\partial x_k \partial x_k} + \epsilon_h = \frac{\nu}{2} \frac{\partial^2 \overline{k}}{\partial x_k \partial x_k} + 10\nu \frac{k}{\lambda_g^2} \quad (29)$$

从式 (27) 可以看到剩余部分 R_{ij} 中方向余弦 α_{in}, α_{jm} 不大于 1, R_i 有正有负, 总和为零. 特别是对角线部分 R_{11}, R_{22}, R_{33} 也有正有负, 总和为零. 因此, 在计算 ϵ_{ij} 时, 作为近似, 先略去剩余部分 νR_{ij} 不计, 在紊流模式中是可取的, 并可用此与实测资料比较, 进一步研究剩余部分. 在计算 ϵ 时, 由于平均值 $\frac{1}{3} \epsilon_h$ 本身已与方向无关, 所以 ϵ_h 是各向同性的. 据此笔者建议采用

$$\epsilon_{ij} = \frac{\nu}{4} \frac{\partial^2 \overline{u_i u_j'}}{\partial x_k \partial x_k} + \frac{1}{3} \epsilon_h \delta_{ij} \quad (30)$$

以及式 (29) 进行计算.

3 对 λ_g 的分析

现在研究冷落了多年的各向同性紊流, 只考虑脉动能 k 的衰减方程:

$$\frac{dk}{dt} = -\epsilon = -10\nu \frac{k}{\lambda_g^2} \quad (31)$$

将 ϵ 对 k 求导, 注意到 λ_g 也是 k 的函数, 得

$$\frac{d\epsilon}{dk} = 10\nu \frac{1}{\lambda_g^2} \left(1 - \frac{2k}{\lambda_g} \frac{d\lambda_g}{dk} \right) \quad (32)$$

式中 $\frac{d\lambda_g}{dk}$ 未知, 但是以往学者的研究已经积累了丰富的成果, 笔者概括了这些成果, 作了必要的补充, 建议了一个假设:

$$\frac{d\lambda_g}{dk} = n \frac{\lambda_g}{2k} \quad (33)$$

式中 n 为系数, 于是积分可得

$$\lambda_g^2 k^{-n} = c_{-n} = \text{常量} \quad (34)$$

代入式 (31) 得

$$\epsilon = \frac{10\nu}{c_{-n}} k^{1-n} \quad (35)$$

并得

$$\frac{dk}{dt} = - \frac{10\nu}{c-n} k^{1-n}$$

(36)

$n = 0$ 时积分得

$$k = ce^{-\frac{10\nu}{c_0}t}$$

(37)

除此以外, $n \neq 0$ 时积分得

$$k^n = - \frac{10\nu}{c-n} n t + c$$

(38)

式中 c 为积分常量, n 的取值以及相应于 n 的 λ_g , ε 和 k 的公式见表 1. k 及 λ_g 随时间 t 的变化、 ε 随 k 的变化见图 2.

表 1 相应于 n 的 λ_g , ε 和 k 的公式

Table 1 The formulas of λ_g , ε and k corresponding to n

项目	衰减早期		衰减后期		衰减晚期		衰减末期
n	-1		$-\frac{2}{5}$		0		$n = \frac{p}{q} = \frac{1}{2}$
λ_g	$\lambda_g^2 k = c_1$	$\lambda_g k^{\frac{1}{2}}/\nu = \text{常数}$	$\lambda_g^2 k^{\frac{2}{5}} = c_{2/5}$	$\lambda_g k^{\frac{1}{5}} = \text{常数}$	$\lambda_g^2 = c_0$	$\lambda_g = \text{常数}$	$\lambda_g^2/k^{\frac{1}{2}} = c_{-(1/2)}$
ε	$\varepsilon = \frac{10\nu}{c_1} k^2$		$\varepsilon = \frac{10\nu}{c_{2/5}} k^{1.4}$		$\varepsilon = \frac{10\nu}{c_0} k$		$\varepsilon = \frac{10\nu}{c_{-(1/2)}} k^{1/2}$
k	$\frac{k}{k_0} = [1 + \frac{10\nu k_0}{c_1} (t - t_0)]^{-1}$		$(\frac{k}{k_1})^{\frac{2}{5}} = [1 + \frac{4\nu k_1^{2/5}}{c_{2/5}} (t - t_1)]^{-1}$		$k = k_2 \exp[-\frac{10\nu}{c_0} (t - t_2)]$		$\frac{k}{k_3} = 1 - \frac{5\nu k_3^{-(1/2)}}{c_{-(1/2)}} (t - t_3)$

注: k_m 为 t_m 时刻的脉动能.

1938 年 Th. von Kármán 和 L. Howarth 指出: $\lambda_g k^{\frac{1}{2}}/\nu = \text{常数}$, 脉动能 k 与时间 t 成反比^[3]. 1939 年 A. Г. Лойцанский 指出 $\lambda_g k^{\frac{1}{5}} = \text{常量}$, 脉动能 k 与时间的 $5/2$ 次方成反比^[3]. 1948 年 G. K. Batchelor 和 A. A. Townsend 对脉动衰减过程作了广泛的量测, 将衰减过程分为早期和后期, 脉动能 k 分别与时间 t 的一次方和 $5/2$ 次方成反比^[3]. 笔者的假设(式 33))吸取了这些成果, 又作了必要的补充. 因为在衰减后期, 随着脉动能 k 的减小, 必有横向微分比尺 λ_g 的增大, 但是 λ_g 不可能无限增大, 笔者认为必将转入衰减晚期和衰减末期, λ_g 随着衰减过程的结束而趋于零.

根据笔者的假设(式 33))还可得知如果初始时刻 t_0 的脉动能 k_0 足够大, 则能耗率 ε 将历经阻力平方区、阻力过渡区、阻力线性区和阻力分区(如表 1 所示), 并有三个临界脉动能 k_1, k_2, k_3 (如图 2). 此外, 还可得知: 存在着一个普遍适用的常数

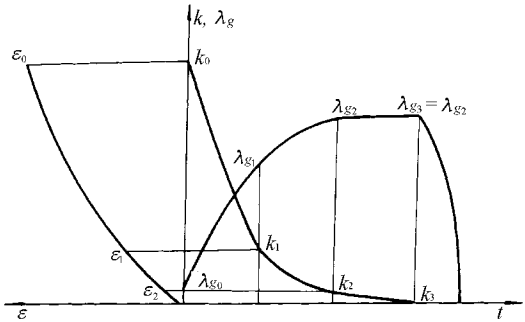


图 2 k, λ 随时间 t 的变化、 ε 随 k 的变化
Fig.2 Variation of k, λ with time and variation of ε with k

$$(Re)_{\lambda_g} = \lambda_g k^{\frac{1}{2}}/\nu$$

(39)

式中 $k \geq k_1$, 属于阻力平方区.

4 能耗率 ε 的计算

1942 年 A. Н. Колмогров 建议的^[3]

$$\varepsilon = c_2 \frac{k^{\frac{3}{2}}}{L}$$

(40)

1945 年被 L. Prandtl 和 K. Wieghardt 用来计算紊流边界层的能耗率, 式中 $c_2 = 0.18, L = \kappa y$ 即混合长度.

1961 年 B. J. Davydov 建立了能耗率 ε 方程^[3]:

$$\frac{\partial \varepsilon}{\partial t} + U_j \frac{\partial \varepsilon}{\partial x_j} = -2\mathcal{M} \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_k} \frac{\partial u_j}{\partial x_k} + \frac{\partial u_k}{\partial x_i} \frac{\partial u_k}{\partial x_j} \right) \frac{\partial U_i}{\partial x_j} + u_j \frac{\partial u_i}{\partial x_k} \frac{\partial^2 U_i}{\partial x_k \partial x_j} \Big] +$$

$$\frac{\partial}{\partial x_j} \left(\nu \frac{\partial \varepsilon}{\partial x_j} - \overline{\varepsilon' u_j} - \frac{2\nu}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x_k} \frac{\partial u_j}{\partial x_k} \right) - \left[\overline{\chi \nu \frac{\partial^2 u_i}{\partial x_k \partial x_j}} \right] + 2\nu \frac{\partial u_i}{\partial x_k} \frac{\partial u_j}{\partial x_k} \frac{\partial u_i}{\partial x_j} \quad (41)$$

鉴于方程(41)的复杂性,B.J. Davydov 进行了简化.1972 年 K. Hanjalic 和 B. E. Launder 给出简化方程^[3]:

$$\frac{\partial \varepsilon}{\partial t} + U_j \frac{\partial \varepsilon}{\partial x_j} = -c_{\varepsilon 1} \frac{\overline{\varepsilon u_i u_j}}{k} \frac{\partial U_i}{\partial x_j} - c_{\varepsilon 2} \frac{\varepsilon^2}{k} + \frac{\partial}{\partial x_j} \left(c_{\varepsilon} \frac{k^2}{\varepsilon} \frac{\partial \varepsilon}{\partial x_j} + \nu \frac{\partial \varepsilon}{\partial x_j} \right) \quad (42)$$

其中系数 c_{ε} , $c_{\varepsilon 1}$, $c_{\varepsilon 2}$ 的值见式(14).1973 年 B. E. Launder , A. Morse , W. Rodi , D. B. Spalding 将方程(42)与简化的 k 方程^[3]

$$\frac{\partial k}{\partial t} + U_j \frac{\partial k}{\partial x_j} = - \overline{u_i u_j} \frac{\partial U_i}{\partial x_j} + \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\frac{\nu_t}{\delta_k} \frac{\partial k}{\partial x_j} + \nu \frac{\partial k}{\partial x_j} \right) - \varepsilon \quad (43)$$

联立,建立了 k - ε 紊流模式,该模式流行至今.近年来,有些学者认为方程(42)并不普遍适用,特别是系数的选择逐个而异,缺乏依据.因此笔者建议采用式(35)计算 ε_h ,代入方程(29),得

$$\varepsilon = \frac{\nu}{2} \frac{\partial^2 k}{\partial x_k \partial x_k} + \frac{10\nu}{c-n} k^{1-n} \quad (44)$$

这样计算能耗率 ε 减少了一个方程,甚至还能提高精度.至于 k_1 , k_2 , k_3 及 $(Re)_{\lambda_g}$ 的确定,有待实验.

参 考 文 献

- 1 Hinze J O. Turbulence. New York : McGraw-Hill Book Company ,1975.329
- 2 Jovanovic J , Ye Q-Y , Durst F. Statistical interpretation of the turbulent dissipation rate in wall-bounded flows. J F M , 1995 203 : 321 ~ 347
- 3 张长高.水动力学.北京:高等教育出版社,1993.895 ~ 898 , 758 , 810 ~ 815

On Turbulent Dissipation Correlation and Turbulent Dissipation Rate in Turbulence Model

Zhang Changgao

(College of Water Resources and Environment , Hohai Univ. , Nanjing 210098)

Abstract Previous investigators' study indicates that the turbulent dissipation correlation and the turbulent dissipation rate are composed of an inhomogeneous part and a homogeneous part. On the basis of this result , the homogeneous part is further composed of a main part—*isotropic part* and a residual part. The residual part is negligible in the turbulence model. Further more , the relation among the *isotropic part* ε_h , fluctuating energy k and transverse differential length scale λ_g is established. The study indicates that the *isotropic part* ε_h is located in various regions of resistance , such as quadratic , transitional and linear regions. It seems that the ε -equation in k - ε turbulence model can be replaced by the ε formula.

Key words turbulent flow ; turbulent dissipation correlation ; turbulent dissipation rate ; isotropic turbulent flow ; transverse differential length scale