

几个 Bézier、有理 Bézier 曲线性质的算子化证明

陈正鸣 王锦桥

(淮海大学常州分校 常州 213022)

摘 要 利用 Bézier、有理 Bézier 曲线的算子表示 , 非常简捷地证明了 Bézier 曲线和有理 Bézier 曲线的分段性和包络性 . 类似的方法很容易推广到 Bézier、有理 Bézier 曲面上 .

关键词 CAGD ; 算子 ; Bézier 曲线 ; 有理 Bézier 曲线

中图号 TP391

Bézier 曲线、有理 Bézier 曲线是 CAGD 中极为重要的两种曲线形式 , 而有理 Bézier 曲线因其对二次曲线的精确表达能力而备受重视 . 目前对这两种曲线的研究已相当成熟 . 国内外诸多学者分析了它们的性质 , 如凸包性、分段性、升阶性、包络性等^[1,2] , 但到目前为止所见到的对分段定理和包络性质的证明都比较麻烦 . 本文利用 Bézier 曲线、有理 Bézier 曲线的算子表示形式 , 给出了 Bézier、有理 Bézier 曲线的分段定理和包络性质的非常简捷的证明 . 算子表示形式对其他曲线、曲面的研究也有相当的推广价值 .

1 Bézier、有理 Bézier 曲线的算子表示

1.1 算子定义

定义 1 设 $\{x_i\}, \{y_i\}$ 为两个序列 , 称 I 为恒等算子 , E 为向前移位算子 , 如果 I, E 满足如下条件 :

$$Ix_i = x_i \qquad I(x_i y_i) = x_i y_i \qquad Ex_i = x_{i+1} \qquad E(x_i y_i) = x_{i+1} y_{i+1}$$

可见 I, E 算子仅对数列的下标起作用 .

记 $\Delta = E - I$ 称 Δ 为向前差分算子 . 易知

$$\Delta x_i = (E - I)x_i = x_{i+1} - x_i \qquad \Delta(x_i y_i) = x_{i+1} y_{i+1} - x_i y_i$$

对 I, E 算子定义如下运算法则 :

定义 2

a. 加法、减法运算 :

$$I(x_i + y_i) = Ix_i + Iy_i = x_i + y_i \qquad E(x_i + y_i) = Ex_i + Ey_i = x_{i+1} + y_{i+1}$$

b. 数乘运算 : 设 a 为常数 , 则

$$I(ax_i) = aIx_i = ax_i$$

c. 设 n 为正整数 , 则

$$E^n x_i = E(E^{n-1} x_i) = x_{i+n}$$

由上定义 , 易见 I, E 有如下性质 (设 a, b 为常数) :

a. $I(ax_i + by_i) = ax_i + by_i, E(ax_i + by_i) = ax_{i+1} + by_{i+1}$;

b. $(aI + bE)x_i = aIx_i + bEx_i = ax_i + bx_{i+1}$;

c. $(aI + bE)^n x_0 = \sum_{j=0}^n C_n^j (aI)^{n-j} (bE)^j x_0 = \sum_{j=0}^n C_n^j a^{n-j} b^j E^j x_0 = \sum_{j=0}^n C_n^j a^{n-j} b^j x_j.$

1.2 Bézier 曲线的算子表示

设 $P(t)$ 为以 $P_0, P_1, \dots, P_n$ 为控制顶点的 n 次 Bézier 曲线 , 则

$$P(t) = \sum_{i=0}^n P_i B_{i,n}\left(\frac{t-a}{b-a}\right) \quad t \in [a, b]$$

其中

$$B_{i,n}\left(\frac{t-a}{b-a}\right) = C_n^i \left(\frac{t-a}{b-a}\right) \left(1 - \frac{t-a}{b-a}\right)^{n-i}$$

则

$$\begin{aligned} P(t) &= \sum_{i=0}^n C_n^i \left(\frac{t-a}{b-a}\right) \left(1 - \frac{t-a}{b-a}\right)^{n-i} E^i P_0 = \\ &= \sum_{i=0}^n C_n^i \left(\frac{t-a}{b-a} E\right) \left(1 - \frac{t-a}{b-a} I\right)^{n-i} P_0 = \\ &= \left[\left(1 - \frac{t-a}{b-a}\right) I + \frac{t-a}{b-a} E\right]^n P_0 \end{aligned}$$

记

$$K(t) = \left(1 - \frac{t-a}{b-a}\right) I + \frac{t-a}{b-a} E$$

则有

$$P(t) = K^n(t) P_0 \quad (a \leq t \leq b) \quad (1)$$

式(1)即为 n 次 Bézier 曲线的算子表示形式.

1.3 有理 Bézier 曲线的算子表示

设 $P(t)$ 为以 $P_0, P_1, \dots, P_n$ 为控制顶点, 以 $W_0, W_1, \dots, W_n$ 为权因子的 n 次有理 Bézier 曲线, 则

$$P(t) = \frac{\sum_{i=0}^n W_i P_i B_{i,n}\left(\frac{t-a}{b-a}\right)}{\sum_{i=0}^n W_i B_{i,n}\left(\frac{t-a}{b-a}\right)} \quad (a \leq t \leq b)$$

同 1.2 法, 可推得其算子表示形式为

$$P(t) = \frac{K^n(t) (W_0 P_0)}{K^n(t) W_0} \quad (a \leq t \leq b) \quad (2)$$

2 性质证明

定理 1 Bézier 曲线的分段定理: 设 $a \leq t \leq b$, $e \in (a, b)$, 则 n 次 Bézier 曲线可分段表示为

$$P(t) = K^n(t) P_0 = \begin{cases} K_1^n(t) P_0^{(1)}(e) & t \in [a, e] \\ K_2^n(t) P_0^{(2)}(e) & t \in [e, b] \end{cases}$$

其中

$$\begin{aligned} K_1(t) &= \left(1 - \frac{t-a}{e-a}\right) I + \frac{t-a}{e-a} E & K_2(t) &= \left(1 - \frac{t-e}{b-e}\right) I + \frac{t-e}{b-e} E \\ P_i^{(1)}(e) &= K^i(e) P_0 & P_i^{(2)}(e) &= K^{n-i}(e) P_0 \quad (i = \overline{0, n}) \end{aligned}$$

$$K(t) = \left(1 - \frac{t-a}{b-a}\right) I + \frac{t-a}{b-a} E$$

证 当 $t \in [a, e]$ 时,

$$\begin{aligned} K(t) &= \left(1 - \frac{t-a}{b-a}\right) I + \frac{t-a}{b-a} E = \\ &= \left(1 - \frac{t-a}{e-a} \frac{e-a}{b-a}\right) I + \left(1 - \frac{t-a}{e-a} \frac{e-a}{b-a}\right) E = \\ &= \left(1 - \frac{t-a}{e-a}\right) I + \frac{t-a}{e-a} \left[\left(1 - \frac{t-a}{e-a}\right) I + \frac{t-a}{e-a} E\right] = \\ &= \left(1 - \frac{t-a}{e-a}\right) I + \frac{t-a}{e-a} K(e) \end{aligned}$$

则有

$$P(t) = K^n(t) P_0 = \left[\left(1 - \frac{t-a}{e-a}\right) I + \frac{t-a}{e-a} K(e)\right]^n P_0 =$$

$$\begin{aligned}
& \sum_{i=0}^n C_n^i \left(1 - \frac{t-a}{e-a}\right)^{n-i} I^{n-i} \left(\frac{t-a}{e-a}\right) k^i(e) P_0 = \\
& \sum_{i=0}^n C_n^i \left(1 - \frac{t-a}{e-a}\right)^{n-i} I^{n-i} \left(\frac{t-a}{e-a}\right) P_i^1(e) = \\
& \sum_{i=0}^n C_n^i \left(1 - \frac{t-a}{e-a}\right)^{n-i} I^{n-i} \left(\frac{t-a}{e-a}\right) E^i P_0^1(e) = \\
& k^n(t) P_0^1(e)
\end{aligned}$$

同理可证当 $t \in [e, b]$ 时定理成立.

定理 2 Bézier 曲线的包络定理: 设 r ($r < n$) 为自然数, 则曲线 (1) 为曲线簇 $\{P_r(t, c): c \in [a, b]\}$ 的包络. 其中

$$P_r(t, c) = k^{n-r}(t) k^r(c) P_0$$

证

$$\text{a. } P_r(t, c)|_{c=t} = k^{n-r}(t) k^r(c) P_0|_{c=t} = k^n(t) P_0 = P(t);$$

$$\text{b. } \frac{\partial P_r(t, c)}{\partial t}|_{c=t} = (n-r) k^{n-r-1}(t) k^r(t) \frac{E-I}{b-a} P_0 = \frac{n-r}{b-a} k^{n-1}(t) \Delta P_0, \text{ 又}$$

$$\frac{\partial P(t)}{\partial t} = n k^{n-1}(t) k^r(t) \frac{E-I}{b-a} P_0 = \frac{n}{b-a} k^{n-1}(t) \Delta P_0$$

得

$$\frac{\partial P_r(t, c)}{\partial t}|_{c=t} // \frac{\partial P(t)}{\partial t}$$

可见: 当 $c=t$ 时, $\{P_r(t, c): c \in [a, b]\}$ 曲线簇中有一条曲线和 $P(t)$ 相交, 且在此点有公共切线, 故 $\{P_r(t, c): c \in [a, b]\}$ 是 $P(t)$ 的包络簇.

定理 3 有理 Bézier 曲线的分段定理: 设 $a \leq t \leq b$, $e \in (a, b)$, 则曲线 (2) 可分段表示为

$$P(t) = \frac{k^n(t) \mathbb{I} W_0 P_0}{k^n(t) W_0} = \begin{cases} \frac{k_1^n(t) \mathbb{I} W_0^{(1)}(e) P_0^{(1)}(e)}{k_1^n(t) W_0^{(1)}(e)} & t \in [a, e] \\ \frac{k_2^n(t) \mathbb{I} W_0^{(2)}(e) P_0^{(2)}(e)}{k_2^n(t) W_0^{(2)}(e)} & t \in [e, b] \end{cases}$$

其中

$$\begin{aligned}
k_1(t) &= \left(1 - \frac{t-a}{e-a}\right) I + \frac{t-a}{e-a} E & k_2(t) &= \left(1 - \frac{t-e}{b-e}\right) I + \frac{t-e}{b-e} E \\
k(t) &= \left(1 - \frac{t-a}{b-a}\right) I + \frac{t-a}{b-a} E \\
P_i^{(1)}(e) &= k^i(e) P_0 & P_i^{(2)}(e) &= k^{n-i}(e) P_0 \\
W_i^{(1)}(e) &= k^i(e) W_0 & W_i^{(2)}(e) &= k^{n-i}(e) W_0 \quad (i = \overline{0, n})
\end{aligned}$$

证 当 $t \in [a, e]$ 时, 同定理 1 证明可知

$$k(t) = \left(1 - \frac{t-a}{e-a}\right) I + \frac{t-a}{e-a} k(e)$$

则

$$\begin{aligned}
P(t) &= \frac{k^n(t) \mathbb{I} W_0 P_0}{k^n(t) W_0} = \frac{\left[\left(1 - \frac{t-a}{e-a}\right) I + \frac{t-a}{b-a} k(e)\right] \mathbb{I} (W_0 P_0)}{\left[\left(1 - \frac{t-a}{e-a}\right) I + \frac{t-a}{b-a} k(e)\right] \mathbb{I} W_0} = \\
& \frac{\sum_{i=0}^n C_n^i \left[\left(1 - \frac{t-a}{b-a}\right) I\right]^{n-i} \left(\frac{t-a}{e-a}\right)^i k^i(e) \mathbb{I} (W_0 P_0)}{\sum_{i=0}^n C_n^i \left[\left(1 - \frac{t-a}{b-a}\right) I\right]^{n-i} \left(\frac{t-a}{e-a}\right)^i k^i(e) W_0} =
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & \frac{\sum_{i=0}^n C_i^r \left[\left(1 - \frac{t-a}{b-a} \right)^{n-i} \left(\frac{t-a}{b-a} \right)^i W_i^{(1)}(e) P_i^{(1)}(e) \right]}{\sum_{i=0}^n C_i^r \left(1 - \frac{t-a}{b-a} \right)^{n-i} \left(\frac{t-a}{b-a} \right)^i W_i^{(1)}(e)} = \\ & \frac{\sum_{i=0}^n C_i^r \left[\left(1 - \frac{t-a}{b-a} \right)^{n-i} \left(\frac{t-a}{b-a} \right)^i W_0^{(1)}(e) P_0^{(1)}(e) \right]}{\sum_{i=0}^n C_i^r \left(1 - \frac{t-a}{b-a} \right)^{n-i} \left(\frac{t-a}{b-a} \right)^i W_0^{(1)}(e)} = \\ & \frac{k_1^n(t) [W_0^{(1)}(e) P_0^{(1)}(e)]}{k_1^n(t) W_0^{(1)}(e)} \end{aligned}$$

当 $t \in [a, b]$ 时, 同理可证.

定理 4 有理 Bézier 曲线的包络定理: 设 $r (r < n)$ 为自然数, 则曲线(2)为曲线簇 $\{P_r(t, c) : c \in [a, b]\}$ 的包络. 其中

$$P_r(t, c) = \frac{k^{n-r}(t) k^r(c) (W_0 P_0)}{k^{n-r}(t) k^r(c) W_0}$$

证

a. $P_r(t, c)|_{c=t} = \frac{k^{n-r}(t) k^r(c) (W_0 P_0)}{k^{n-r}(t) k^r(c) W_0} |_{c=t} = k^n(t) P_0 = P(t);$

b. $\frac{\partial P_r(t, c)}{\partial t} |_{c=t} = \frac{n-r}{(b-a) \int k^n(t) W_0} [k^{n-1}(t) \Delta(W_0 P_0) k^n(t) W_0 - k^{n-1}(t) \Delta W_0 k^n(t) (W_0 P_0)]$ 又

$$\frac{\partial P(t)}{\partial t} = \frac{n k^{n-1}(t) \frac{\Delta}{b-a} (W_0 P_0) k^n(t) W_0 - n k^{n-1}(t) \frac{\Delta}{b-a} W_0 k^n(t) (W_0 P_0)}{[k^n(t) W_0]^2} =$$
$$\frac{n-r}{(b-a) \int k^n(t) W_0} [k^{n-1}(t) \Delta(W_0 P_0) k^n(t) W_0 - k^{n-1}(t) \Delta W_0 k^n(t) (W_0 P_0)]$$

得 $\frac{\partial P_r(t, c)}{\partial t} |_{c=t} // \frac{\partial P(t)}{\partial t}$

可见: 当 $c = t$ 时, $\{P_r(t, c) : c \in [a, b]\}$ 曲线簇中有一条曲线和 $P(t)$ 相交, 且在此点有公共切线, 故 $\{P_r(t, c) : c \in [a, b]\}$ 是 $P(t)$ 的包络簇.

3 结 束 语

从上面证明可知, 用算子表示来证明 Bézier、有理 Bézier 曲线的分段性、包络性异常简捷. 当然, 也可用算子表示来描述和证明曲线的其他性质.

参 考 文 献

1 苏步青, 金通洸. Bézier 曲线的包络定理. 见: 苏步青主编. 浙江大学学报 1982 年计算几何讨论会论文集. 杭州: 浙江大学出版社, 1982. 13~16

2 施法中. 计算机辅助几何设计与非均匀有理 B 样条. 北京: 北京航空航天大学出版社, 1994. 2

The Proof of Properties of Bézier and Rational Bézier Curves with Operator

Chen Zhengming Wang Jingqiao

(Changzhou College, Hohai Univ., Changzhou 213022)

Abstract The subdivision and envelop properties of Bézier curves and rational Bézier curves are proved with their operator representation. The present method is very simple and easy to be used in study on Bézier and rational Bézier planes.

Key words CAGD ;operators ;Bézier curves ;rational Bézier curves