

悬索结构大位移分析改进的两节点索单元模型

唐建民 卓家寿

(河海大学土木工程学院 南京 210098)

摘 要 基于非线性弹性理论,提出了适合悬索结构大位移分析的改进的两节点索单元有限元模型.在位移函数的表达式中计及了索元自重垂度的影响,从而克服了目前悬索结构普遍采用的两节点索元无法直接计及自重垂度影响的缺点.采用 Lagrange 轴向应变的表达式建立了索元轴向应力、应变的直接关系,并基于 Lagrange 描述和虚功原理得到了索元的非线性平衡方程与切线刚度矩阵.采用 Newton-Raphson 法进行了实例计算,结果表明本文方法的精度明显优于两节点直线索单元的精度,适合于中、大跨度悬索结构的大位移分析.

关键词 悬索结构;大位移;非线性有限元

中图号 TU351

悬索结构在工程中有着广泛的应用,如悬索桥、拉索屋面、拉索塔架以及游览索道等等.悬索结构在力学上主要表现为高度柔性和极强的几何非线性.目前对中、小跨度悬索结构,当各索段的跨度不大时,主要是利用两节点直线单元进行有限元分析,否则采用多节点单元.常规的两节点杆单元由于忽略了索元柔性和自重垂度引起的非线性影响,当结构中索元的预拉力不大或受有沿索长分布的分布荷载作用时,会带来不精确的结果.采用多节点曲线元固然可以提高精度,但计算自由度会显著增加.因此,本文提出了适合悬索结构大位移分析的改进的两节点索单元有限元模型.在位移函数的表达式中计及了索元自重垂度的影响,采用 Lagrange 轴向应变的表达式建立了索元轴向应力、应变的直接关系,并基于 Lagrange 描述和虚功原理得到了索元的非线性平衡方程与切线刚度矩阵.采用 Newton-Raphson 法进行了实例计算,结果表明本文方法的精度明显优于两节点直线索单元的精度,适合于中、大跨度悬索结构的大位移分析.

1 位移函数

采用 Lagrange 坐标,建立如图 1 所示的单元局部坐标与整体坐标.

设索元的垂度方程为
$$f = 4\xi(1 - \xi)f_{\max} \quad (1)$$

式中 $f_{\max}$ 为索元跨中最大初始垂度,且

$$\xi = x'/L \quad (0 \leq \xi \leq 1) \quad (2)$$

由式(1)则
$$\Delta f = 4\xi(1 - \xi)\Delta f_{\max} \quad (3)$$

根据索元的几何与物理关系可求得^[1]

$$\Delta f_{\max} = \frac{3}{2} \frac{f_{\max}}{L} \Delta L \quad (4)$$

将式(4)代入式(3)则

$$\Delta f = k \Delta L \xi(1 - \xi) \quad (5)$$

其中
$$k = 6f_{\max}/L \quad (6)$$

设单元在局部坐标系下的位移向量为

$$\mathbf{u}_e = \{u_1 \quad v_1 \quad w_1 \quad u_2 \quad v_2 \quad w_2\}^T \quad (7)$$

则
$$\Delta L = u_2 - u_1 \quad (8)$$

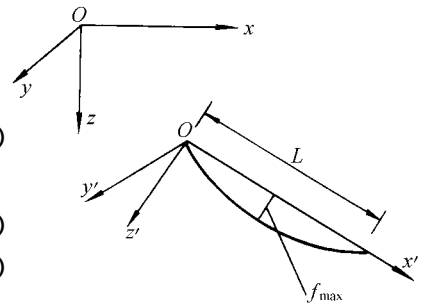


图 1 整体坐标与局部坐标下的索单元

Fig.1 Cable elements under entire and partial coordinates

将式(8)代入式(5)则

$$\Delta f = k\xi(1 - \xi)(u_2 - u_1) \quad (9)$$

因此,可设单元的位移函数为

$$\mathbf{f} = \mathbf{N}\mathbf{u}_e \quad (10)$$

其中

$$\mathbf{f} = [u \quad v \quad w]^T \quad (11)$$

$$\mathbf{N} = \begin{bmatrix} 1 - \xi & 0 & 0 & \xi & 0 & 0 \\ 0 & 1 - \xi & 0 & 0 & \xi & 0 \\ -k\xi(1 - \xi) & 0 & 1 - \xi & k\xi(1 - \xi) & 0 & \xi \end{bmatrix} \quad (12)$$

2 Lagrange 应变的非线性几何关系

令应变张量为 ε_{ij} 则

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2}(u^i_{,j} + u^j_{,i} + u^k_{,i}u^k_{,j}) \quad (13)$$

索视为一维体,索元的相对伸长与应变的关系为

$$E_{11} = \sqrt{1 + 2\varepsilon} - 1 \quad (14)$$

其中

$$E_{11} = \frac{ds}{ds} - 1$$

式中: E_{11} ——索元的相对伸长; ds ——索元变形前后的长度; ε ——Lagrange 轴向应变。

由于

$$ds = \sqrt{(dx' + du)^2 + (dy' + dv)^2 + (dz' + dw)^2} \quad (15)$$

$$ds = \sqrt{(dx')^2 + (dy')^2 + (dz')^2} \quad (16)$$

所以

$$\left(\frac{ds}{ds}\right)^2 = 1 + 2a + b \quad (17)$$

式中

$$a = \frac{d}{ds} \begin{bmatrix} x' & y' & z' \end{bmatrix} \frac{d}{ds} \begin{bmatrix} u & v & w \end{bmatrix}^T \quad b = \frac{d}{ds} \begin{bmatrix} u & v & w \end{bmatrix} \frac{d}{ds} \begin{bmatrix} u & v & w \end{bmatrix}^T \quad (18)$$

将式(17)代入式(14)则

$$\varepsilon = a + \frac{1}{2}b \quad (19)$$

根据式(1)(2),可建立索元局部坐标下的初始状态参数方程

$$x' = L\xi \quad y' = 0 \quad z' = 4\xi(1 - \xi)f_{\max} \quad (20)$$

将式(20)代入式(16)则

$$ds = Gd\xi \quad (21)$$

其中

$$G = \sqrt{L^2 + 16(1 - 2\xi)^2 f_{\max}^2} \quad (22)$$

由式(20)(21)(10)(11)可求得

$$\frac{d}{ds} \begin{bmatrix} x' & y' & z' \end{bmatrix}^T = \frac{1}{G} \mathbf{N}' \mathbf{X}_e \quad \frac{d}{ds} \begin{bmatrix} u & v & w \end{bmatrix}^T = \frac{1}{G} \mathbf{N}' \mathbf{u}_e \quad (23)$$

其中

$$\mathbf{N}' = \frac{d\mathbf{N}}{d\xi} \quad \mathbf{X}_e = \begin{bmatrix} 0 & 0 & Lk(1 - 2\xi) & L & 0 & \frac{2}{3}Lk(1 - 2\xi) \end{bmatrix}^T$$

由式(12)可求得

$$\mathbf{N}' = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ -k(1 - 2\xi) & 0 & -1 & k(1 - 2\xi) & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (24)$$

将式(23)(24)代入式(18)则

$$a = \mathbf{X}_e^T \mathbf{A} \mathbf{u}_e \quad b = \mathbf{u}_e^T \mathbf{A} \mathbf{u}_e \quad (25)$$

其中

$$\mathbf{A} = \frac{1}{G^2} \mathbf{N}'^T \mathbf{N}'$$

3 非线性平衡方程与刚度矩阵

根据虎克定律:

$$\sigma = E\varepsilon_s + \sigma_0 \quad (26)$$

式中： E, σ_0 ——索元的弹性模量和变形前的初始应力.

令
$$d\epsilon = B du_e \tag{27}$$

则由式(19)和(25)可以得到

$$B = B_0 + B_L \tag{28}$$

其中
$$B_0 = X_e^T A \qquad B_L = u_e^T A$$

根据虚功原理,索元在局部坐标下的平衡方程为

$$\Psi_e = A_s \int_s B^T \sigma ds - R_e = 0 \tag{29}$$

式中： Ψ_e ——索元在局部坐标系下的内、外力矢量和； R_e ——外荷载向量； A_s ——索元的截面面积.

令
$$f_e^R = A_s \int_s B^T \sigma ds = A_s \int_0^1 GB^T \sigma d\xi \tag{30}$$

则
$$\Psi_e = f_e^R - R_e = 0 \tag{31}$$

式中的 Ψ_e 称为迭代过程中的不平衡力.

为便于应用 Newton-Raphson 法进行求解,尚需得到增量形式的平衡方程.为此,对式(29)进行 Taylor 级数展开取线性项,则

$$\left(\frac{\partial \Psi_e}{\partial u_e}\right)_n \Delta u_e^n = -\Psi_e^n = R_e^n - f_e^{Rn} \qquad u_e^{n+1} = u_e^n + \Delta u_e^n \tag{32}$$

定义 $K_{T_e} = \frac{\partial \Psi_e}{\partial u_e}$ 为索元的切线刚度矩阵,那么由式(29)微分可求得

$$K_{T_e} = K_0 + K_L + K_\sigma \tag{33}$$

其中
$$K_0 = A_s \int_0^1 GB_0^T EB_0 d\xi$$

$$K_L = A_s \int_0^1 GE(B_0^T B_L + B_L^T B_0 + B_L^T B_L) d\xi$$

$$K_\sigma = A_s \int_0^1 A^T \sigma d\xi$$

4 局部坐标与整体坐标的转换

以上所推得的节点力、不平衡力、切线刚度矩阵及节点位移均为索元局部坐标系下的向量,为了整体求解,尚需将它们转换到整体坐标系下.若设 T 为局部坐标与整体坐标的转换矩阵,则

$$T = \begin{bmatrix} t & 0 \\ 0 & t \end{bmatrix} \tag{34}$$

其中
$$t = \begin{bmatrix} l_{x'} & l_{y'} & l_{z'} \\ m_{x'} & m_{y'} & m_{z'} \\ n_{x'} & n_{y'} & n_{z'} \end{bmatrix} \tag{35}$$

式中 $l_i, m_i, n_i (i = x', y', z')$ 分别表示局部坐标轴 i 对整体坐标 x, y, z 轴的方向余弦.因此,可建立如下转换关系:

$$U_e = T u_e \qquad R = T R_e \qquad F^R = T f^R \qquad K_e = T K_{T_e} T^T$$

式中 U_e, R, F^R 和 K_e 分别表示索元在整体坐标系下的节点位移、等效节点外力、等效节点内力矢量及切线刚度矩阵.

5 实例计算

例 1 某承受均布荷载作用的小垂度($f_0/L = 2\%$)抛物线索截面面积 $A = 0.674 \text{ cm}^2$,弹性模量 $E = 1.7 \times 10^{11} \text{ Pa}$,跨度 $L = 8 \text{ m}$,初始态荷载 $q_0 = 0.2 \text{ kN} \cdot \text{m}^{-1}$,初始水平张力 $H_0 = 10 \text{ kN}$,初始垂度 $f_0 = 16 \text{ cm}$,终态荷载 $q = 0.5 \text{ kN} \cdot \text{m}^{-1}$ (图 2).

利用本文模型取整根索为四个单元进行计算,结果列于表 1.

例2 一大垂度单索($f_0/L=10\%$) ,单位长度自重 $q=46.5\text{ N}\cdot\text{m}^{-1}$,自重垂度 $f_0=30.5\text{ m}$,跨度 $L=305\text{ m}$,弹性模量 $E=1.3\times10^{11}\text{ Pa}$,截面面积 $A=550\text{ mm}^2$,跨中作用一集中荷载 $P=35.6\text{ kN}$ (图 3) .
利用本文模型取 AC , CB 各为四个单元进行计算 ,结果见表 2 .

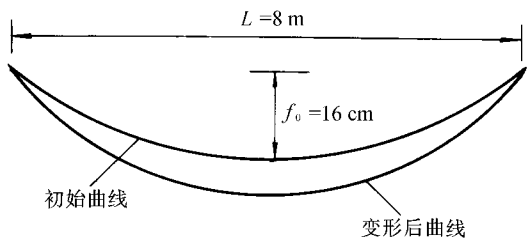


图 2 算例 1 模型
Fig.2 Model for expression 1

Table 1 Calculated results for expression 1			
解 法	本文解	五节点曲线元解 ^[2]	取整根索为四个直线索单元解 ^[3]
中点垂度 /cm	21.18	21.09	21.29
水平张力 /kN	18.85	19.00	18.82

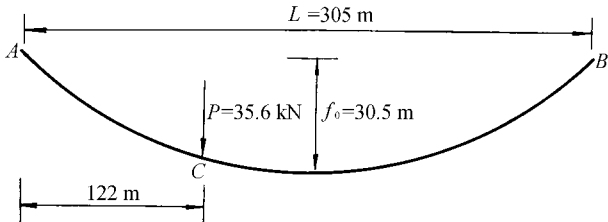


图 3 算例 2 模型
Fig.3 Model for expression 2

Table 2 Calculated results for expression 2					
解 法	本文结果	AC , CB 各为四个直线索单元解 ^[3]	AC , CB 为悬链线理论解 ^[4]	AC , CB 为两个五节点曲线元解 ^[2]	
C 点垂度 /m	5.74	5.36	5.62	5.63	
与悬链线理论解比较误差 /%	2.1	4.6		0.2	

6 结 论

计算表明 ,本文模型在悬索结构大位移分析中的精度虽稍逊于多节点曲线元的 ,但比常规的两节点直线索单元的有明显提高 .由于本文方法可以直接计及索元自重垂度的影响 ,同时又比多节点曲线元自由度少 ,计算简单 ,因此对解决中、大跨度悬索结构的强几何非线性问题不失为一种行之有效的方法 ,在分析大跨度索网、索穹顶结构等悬索结构时是一种值得推广的数值计算方法 .

参 考 文 献

1 张其林 欧阳可庆 .桅杆结构非线性稳定与振动的杆索有限元分析法 .土木工程学报 ,1993 26(5) :31 ~ 42
2 Tang Jianmin ,Shen Zuyan ,Qian Ruojun .A nonlinear finite element method with five-node curved element for analysis of cable structures . Proceedings of the IASS Inter Symp ,1995 2
3 唐建民 钱若军 蔡新 .索穹顶结构非线性有限元分析 .空间结构 ,1996 2(1) :12 ~ 17
4 Krishna ,Prem .Cable suspended roofs .New York :McGraw-Hill Inc ,1978

An Improved Two-node Cable Element for
Large Deformation Analysis of Cable Structures

Tang Jianmin Zhuo Jiashou

(College of Civil Engineering ,Hohai Univ . ,Nanjing 210098)

Abstract An improved nonlinear finite element method with two-node elements is presented in this paper .The effects of cable initial sag have been considered in the element displacement functions .Assuming the cable to be ideal flexible ,in terms of the nonlinear theory elastically ,the expression of correlation between the axial strain and stress is established .By means of the virtual displacement principle and the Lagrangian expression of the axial strain ,the nonlinear finite element formulation has been derived ,and this model has been used to compute cable structures .By comparison with the straight-line and curved cable element methods ,the proposed model leads to good precision and can meet the engineering requirements .The model presented in this paper can be applied in the analysis of long-span cable structures ,such as cable structures ,cable domes ,cable stayed towers and so forth .

Key words cable stuctures ;large deformation ;nonlinear finite element