

混凝土三维等效单轴应变本构模型的研究

汪基伟 巫昌海 王 红

(河海大学土木工程学院 南京 210098)

摘 要 以应力-应变曲线的实验值与计算值的误差达到最小为目标,反演出相应于最大应力的等效单轴应变值 ϵ_{ic} ,并回归得到三轴受压时 ϵ_{ic} 的计算公式,对二轴受压一轴受拉、一轴受压二轴受拉及三轴受拉等受力状态提出了 ϵ_{ic} 的计算方法.算例表明本文的方法是合理的.

关键词 混凝土 ;三维本构模型 ;等效单轴应变

中图分类号 TU37 ;TU31

目前钢筋混凝土非线性有限单元法在大体积混凝土结构配筋设计方面发挥着越来越大的作用,水工混凝土结构设计规范(DL/T5057—1996)^[1]已规定可采用钢筋混凝土有限单元法进行大体积混凝土结构的配筋设计,在实际工程中也已得到应用^[2,3].但到目前为止,这些应用一般仅限于平面问题,其主要原因是难于正确地得出三维本构关系.因此,有必要对混凝土三维本构模型作进一步研究.

1977 年 Darwin 提出了适用于平面应力问题的等效单轴应变模型^[4],该模型假定混凝土为各向正交异性体,并认为消除泊松比影响的等效单轴应变与应力的关系可采用单轴试验得到的应力-应变曲线.由于 Darwin 模型概念明确,计算方便,因而应用较广.文献[5]将 Darwin 模型推广到轴对称问题,文献[6]又将 Darwin 模型推广到空间问题.在这些文献中均采用等效单轴应变曲面的概念,假定等效单轴应变破坏准则和强度破坏准则形式相同,如文献[6]的强度和等效单轴应变破坏准则采用 Willam 和 Warnke 提出的 W-W 五参数模型,五个参数采用单轴受压、单轴受拉、双轴等压、双轴等拉、三轴等拉的强度值和等效单轴应变值确定.同时,对于某一应力状态($\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$),它的强度值($\sigma_{1c}, \sigma_{2c}, \sigma_{3c}$)取为点($\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$)和原点的连线与强度曲面的交点,同样,相应于($\sigma_{1c}, \sigma_{2c}, \sigma_{3c}$)的等效单轴应变值($\epsilon_{1c}, \epsilon_{2c}, \epsilon_{3c}$),也取为点($\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$)所对应的等效单轴应变值($\epsilon_{1u}, \epsilon_{2u}, \epsilon_{3u}$)和原点的连线与等效单轴应变曲面的交点.这显然是不合理的,因为计算时总是先假定混凝土是各向同性的,那么从后面的公式可以知道,对于比例加载,如此确定 σ_{ic} 和 ϵ_{ic} 值,混凝土将一直保持各向同性,这和 Darwin 模型中混凝土为各向正交异性体的假定矛盾.因此,有必要对 ϵ_{ic} 值的计算方法作进一步研究,使三维等效单轴应变本构模型更加合理.

1 混凝土应力-应变关系

将混凝土视为正交各向异性体,其三维应力-应变关系可表示为

$$\begin{Bmatrix} d\sigma_1 \\ d\sigma_2 \\ d\sigma_3 \\ d\tau_{12} \\ d\tau_{23} \\ d\tau_{31} \end{Bmatrix} = \frac{1}{\Omega} \begin{bmatrix} E_1(1-\nu_{23}\nu_{32}) & E_1(\nu_{21}+\nu_{23}\nu_{31}) & E_1(\nu_{31}+\nu_{21}\nu_{32}) & 0 & 0 & 0 \\ E_2(\nu_{12}+\nu_{13}\nu_{32}) & E_2(1-\nu_{13}\nu_{31}) & E_2(\nu_{32}+\nu_{12}\nu_{31}) & 0 & 0 & 0 \\ E_3(\nu_{13}+\nu_{12}\nu_{23}) & E_3(\nu_{23}+\nu_{13}\nu_{21}) & E_3(1-\nu_{12}\nu_{21}) & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & G_{12}\Omega & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & G_{23}\Omega & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & G_{31}\Omega \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} d\epsilon_1 \\ d\epsilon_2 \\ d\epsilon_3 \\ d\gamma_{12} \\ d\gamma_{23} \\ d\gamma_{31} \end{Bmatrix} \quad (1)$$

其中

$$G_{ij} = E_i E_j [E_i(1 + \nu_{ij}) + E_j(1 + \nu_{ji})] \quad (2)$$

$$\Omega = 1 - \nu_{21}\nu_{12} - \nu_{31}\nu_{13} - \nu_{32}\nu_{23} - \nu_{12}\nu_{23}\nu_{31} - \nu_{21}\nu_{32}\nu_{13} \quad (3)$$

式中: $d\sigma_i$ 、 $d\tau_{ij}$ ——本级荷载在上一级荷载作用后的主应力方向上所引起的应力增量; $d\epsilon_i$ 、 $d\gamma_{ij}$ ——相应的应变增量; ν_{ij} —— i 方向受力对 j 方向所引起的泊松比; E_i ——上一级荷载作用后, 主应力方向上的切线弹性模量; G_{ij} ——上一级荷载作用后, 主应力平面上的切线剪切模量。

为了求得弹性模量 E_i , 引入等效单轴应变的概念, 将式(1)中的第一个方程改写为

$$d\sigma_1 = \frac{E_1}{\Omega}[(1 - \nu_{23}\nu_{32})d\epsilon_1 + (\nu_{21} + \nu_{23}\nu_{31})d\epsilon_2 + (\nu_{31} + \nu_{21}\nu_{32})d\epsilon_3] = E_1 d\epsilon_{1u} \quad (4)$$

变量 $d\epsilon_{1u}$ 称为等效单轴应变增量, 等效单轴应变

$$\epsilon_{iu} = \int d\epsilon_{iu} = \sum \Delta\sigma_i / E_i \quad (i = 1, 3) \quad (5)$$

它和应力 σ_i 的关系可由下式表示^[6]:

$$\sigma_i = \frac{E_0 \epsilon_{iu}}{1 + (R + E_0/E_s - 2)(\epsilon_{iu}/\epsilon_{ic}) - (2R - 1)(\epsilon_{iu}/\epsilon_{ic})^2 + R(\epsilon_{iu}/\epsilon_{ic})^3} \quad (i = 1, 3) \quad (6)$$

其中

$$R = (E_0/E_s)(\sigma_{ic}/\sigma_{if} - 1)(\epsilon_{if}/\epsilon_{ic} - 1)^2 - \epsilon_{ic}/\epsilon_{if} \quad (7)$$

式中: E_0 ——原点切线弹性模量; E_s ——相应于最大应力 σ_{ic} 的割线模量, $E_s = \sigma_{ic}/\epsilon_{ic}$; ϵ_{ic} ——相应于最大应力(强度值) σ_{ic} 的等效单轴应变; σ_{if} 、 ϵ_{if} ——应力-应变曲线下降段上某一点的应力和应变值。

对式(6)微分可得切线弹性模量 E_i , 即

$$E_i = E_0 \frac{1 + (2R - 1)(\epsilon_{iu}/\epsilon_{ic})^2 - 2R(\epsilon_{iu}/\epsilon_{ic})^3}{[1 + (R + E_0/E_s - 2)(\epsilon_{iu}/\epsilon_{ic}) - (2R - 1)(\epsilon_{iu}/\epsilon_{ic})^2 + R(\epsilon_{iu}/\epsilon_{ic})^3]^2} \quad (i = 1, 3) \quad (8)$$

i 方向受力对 j 方向所引起的泊松比 ν_{ij} 可按式计算:

$$\nu_{ij} = \sqrt{\nu_{iu}\nu_{ju}E_j/E_i} \quad \nu_{ij} \leq 0.5 \quad (i = 1, 3; j = 1, 3) \quad (9)$$

其中

$$\nu_{iu} = \nu_0[1 + 1.376(\epsilon_{iu}/\epsilon_{ic}) - 5.36(\epsilon_{iu}/\epsilon_{ic})^2 + 8.58(\epsilon_{iu}/\epsilon_{ic})^3] \quad (10)$$

式中: ν_0 ——初始泊松比。

2 相应于最大应力的等效单轴应变 ϵ_{ic} 值的确定

2.1 三轴受压时 ϵ_{ic} 值的反演计算和计算公式的确定

由于实测应力-应变曲线上的各点切线弹性模量不容易得到, 因此根据式(5)求 ϵ_{ic} 值是困难的。本文以应力-应变曲线的实验值与计算值的误差达到最小为目标, 通过试算反演来求解 ϵ_{ic} 。以三向受压为例, 计算的流程为:

- 分别输入实测 $\sigma_1 \sim \epsilon_1$ 曲线、 $\sigma_2 \sim \epsilon_2$ 曲线和 $\sigma_3 \sim \epsilon_3$ 曲线上的 n 个点 $(\sigma_{1j}, \epsilon_{1j}^t)$ 、 $(\sigma_{2j}, \epsilon_{2j}^t)$ 和 $(\sigma_{3j}, \epsilon_{3j}^t)$;
- 分别给定 ϵ_{1c} 、 ϵ_{2c} 和 ϵ_{3c} 值的范围 $\epsilon_{1c}^1 \sim \epsilon_{1c}^2$ 、 $\epsilon_{2c}^1 \sim \epsilon_{2c}^2$ 和 $\epsilon_{3c}^1 \sim \epsilon_{3c}^2$;
- 令 $\epsilon_{1c}^1 = \epsilon_{1c}^{k1-1} + (\epsilon_{1c}^2 - \epsilon_{1c}^1)/m1$, 按下列(d)~(g)对 $k1$ 进行 $m1$ 次循环;
- 令 $\epsilon_{2c}^1 = \epsilon_{2c}^{k2-1} + (\epsilon_{2c}^2 - \epsilon_{2c}^1)/m2$, 按下列(e)~(g)对 $k2$ 进行 $m2$ 次循环;
- 令 $\epsilon_{3c}^1 = \epsilon_{3c}^{k3-1} + (\epsilon_{3c}^2 - \epsilon_{3c}^1)/m3$, 按下列(f)~(g)对 $k3$ 进行 $m3$ 次循环;
- 对每一组应力值 σ_{1j} 、 σ_{2j} 和 σ_{3j} , 根据式(1)~式(3)、式(5)~式(10)求得满足精度要求的应变值 ϵ_{1j}^c 、 ϵ_{2j}^c 和 ϵ_{3j}^c ;

$$(g) \text{ 求误差 } T^k = \sum (\epsilon_{1j}^t - \epsilon_{1j}^c)^2 + \sum (\epsilon_{2j}^t - \epsilon_{2j}^c)^2 + \sum (\epsilon_{3j}^t - \epsilon_{3j}^c)^2;$$

$$(h) \text{ 找出误差 } T^k \text{ 的最小值 } T_{\min}, \text{ 相应于 } T_{\min} \text{ 的 } \epsilon_{1c}^{k1}, \epsilon_{2c}^{k2} \text{ 和 } \epsilon_{3c}^{k3} \text{ 值即为所求的 } \epsilon_{1c}, \epsilon_{2c} \text{ 和 } \epsilon_{3c}.$$

计算中发现, 随着 ϵ_{1c}^{k1} 、 ϵ_{2c}^{k2} 和 ϵ_{3c}^{k3} 值的增大, T^k 值逐渐减小。当 ϵ_{1c}^{k1} 、 ϵ_{2c}^{k2} 和 ϵ_{3c}^{k3} 达到一定值后, T^k 值为最小。随后 T^k 值又随 ϵ_{1c}^{k1} 、 ϵ_{2c}^{k2} 和 ϵ_{3c}^{k3} 值的增大而增大, 说明按以上流程计算能得到最佳的 ϵ_{ic} 值。根据文献[7]和[8]的双轴受压、文献[9]的三轴受压试验结果得到 ϵ_{ic} 值, 其 ϵ_{ic}/ϵ_0 值列于表 1。

表 1 等效单轴应变 ϵ_{ic}/ϵ_0 的反演值及回归公式计算值

Table 1 Values of equivalent uniaxial strain ϵ_{ic}/ϵ_0 from tests and eqs.(11)~(13)

应力比 $\alpha_1:\alpha_2:\alpha_3$	σ_3/f_c	ϵ_{1c}/ϵ_0			ϵ_{2c}/ϵ_0			ϵ_{3c}/ϵ_0			资料来源
		反演值	计算值	误差/%	反演值	计算值	误差/%	反演值	计算值	误差/%	
0:0.333:1	1.29	0.00	0.00	0.0	0.39	0.38	-2.6	1.75	1.70	-2.9	文献 8]
0:0.520:1	1.25	0.00	0.00	0.0	0.66	0.67	1.5	1.74	1.71	-1.7	文献 7]
0:0.666:1	1.33	0.00	0.00	0.0	0.90	0.92	2.2	1.69	1.67	-1.2	文献 8]
0:1:1	1.16	0.00	0.00	0.0	1.55	1.55	0.0	1.55	1.57	1.2	文献 7]
0:1:1	1.15	0.00	0.00	0.0	1.56	1.55	-0.6	1.56	1.57	0.6	文献 8]
0.1:0.1:1	2.12	2.22	2.28	2.7	2.22	2.15	-3.2	11.80	11.39	-3.5	文献 9]
0.1:0.25:1	4.59	6.10	5.89	-3.4	7.75	7.13	-8.0	11.65	11.44	1.8	文献 9]
0.1:0.5:1	3.65	9.30	9.65	3.8	8.25	8.84	7.2	9.95	10.33	3.8	文献 9]
0.1:0.75:1	2.45	12.20	11.89	-2.5	9.30	8.60	-7.3	9.35	8.94	-4.4	文献 9]
0.1:1:1	2.65	13.10	13.41	2.4	7.80	8.40	7.7	7.85	7.68	-2.2	文献 9]
0.25:0.25:1	5.95	8.40	8.19	-2.5	8.40	7.95	-5.4	58.65	57.67	-1.7	文献 9]

注： $\alpha_1 = \sigma_1/\sigma_3$ ， $\alpha_2 = \sigma_2/\sigma_3$ ， $\alpha_3 = \sigma_3/\sigma_3 = 1$ ， ϵ_0 为单轴受压时最大应力所对应的应变。

从表 1 知，双轴受压时， ϵ_{3c}/ϵ_0 值先随 α_2 的增加而加大，到一定值后又随 α_2 的增加而减小； ϵ_{2c}/ϵ_0 值则一直随 α_2 的增加而增大。对于三轴受压的情况，当 α_1 增大时， ϵ_{3c}/ϵ_0 、 ϵ_{2c}/ϵ_0 和 ϵ_{1c}/ϵ_0 值均随之加大；当 α_2 增大时， ϵ_{1c}/ϵ_0 值也随之加大，而 ϵ_{2c}/ϵ_0 和 ϵ_{3c}/ϵ_0 先是随之加大，到一定值后又随 α_2 增大而减小。以 α_1 和 α_2 为变量对表 1 中的反演值进行拟合，同时满足单轴受压时 $\epsilon_{3c} = \epsilon_0$ ， $\epsilon_{1c} = \epsilon_{2c} = 0$ 的条件，得

$$\epsilon_{1c} = 69.5\epsilon_0(1.0 + 3.5\alpha_1)\alpha_2^{1.5}/(1.0 + 6.0\alpha_2^{1.3}) \tag{11}$$

$$\epsilon_{2c} = 1.55\epsilon_0[\alpha_2 + 86.5\alpha_1^{0.1}\alpha_2^{1.7}/(1.0 + 24.0\alpha_2^{2.2})]^{1.28} \tag{12}$$

$$\epsilon_{3c} = \epsilon_0[1.0 + 5.6\alpha_1(1.0 + 15.8\alpha_1)^{2.7}(\alpha_2 + 2.4\alpha_1)(1.0 + 2\alpha_1 + \alpha_2)^{3.3}] \tag{13}$$

式 (11)~(13) 适用于 $\alpha_1 \leq 0.25$ 的情况。由表 1 知，式 (11)~(13) 的计算值与反演值符合较好，它们不但适用于三轴受压的情况，而且也适用于双轴受压的情况。

2.2 二轴受压一轴受拉时 ϵ_{ic} 值的计算方法

实验结果表明，当 $\alpha_1 \leq -0.25$ 时，在受拉向开裂前，三个方向的应力-应变曲线为线性^[9]。因此，在受拉向开裂前可按线性计算，开裂后可按双轴受压情况计算，这时混凝土的应力-应变关系见文献 4]， ϵ_{ic} 值可令 $\alpha_1 = 0$ 按式 (12) 和式 (13) 计算。

当 $\alpha_1 > -0.25$ 时，取 $\epsilon_{1c} = \sigma_1/E_0$ ，而 ϵ_{2c} 和 ϵ_{3c} 值按下列方法确定：由于其拉应力较小，可假定 α 值($\alpha = \epsilon_{2c}/\epsilon_{3c}$)和双轴受压时相等，将 ϵ_{1c} 和 $\epsilon_{2c} = \alpha\epsilon_{3c}$ 值代入等效单轴应变破坏准则，求得 ϵ_{3c} 值。

等效单轴应变破坏准则可采用 Ottosen 四参数强度准则^[10]的型式，它的表达式为

$$f(I_1', J_2', \cos 3\theta) = \alpha(J_2'/\epsilon_0^2) + \lambda(\sqrt{J_2'}/\epsilon_0) + b(I_1'/\epsilon_0) - 1 = 0 \tag{14}$$

其中

$$\left. \begin{aligned} \lambda &= k_1 \cos\left[\frac{1}{3} \arccos(k_2 \cos 3\theta)\right] & 0^\circ \leq \theta \leq 30^\circ \\ \lambda &= k_1 \cos\left[\frac{\pi}{3} - \frac{1}{3} \arccos(-k_2 \cos 3\theta)\right] & 30^\circ \leq \theta \leq 60^\circ \end{aligned} \right\} \tag{15}$$

式中： I_1' ——等效单轴应变第一不变量； J_2' ——偏斜等效单轴应变第二不变量； θ ——相似角。

式 (14) 和式 (15) 中的四个参数可由单轴受拉、单轴受压、双轴等压和一个三轴受压的 ϵ_{ic} 值得出。单轴受拉时 $\epsilon_{1c} = f_t/E_0$ ， $\epsilon_{2c} = \epsilon_{3c} = 0$ ，其它值可由表 1 查得。

2.3 一轴受压二轴受拉及三轴受拉时 ϵ_{ic} 的计算方法

当一轴受压、二轴受拉时，取 $\epsilon_{1c} = \sigma_1/E_0$ ， $\epsilon_{2c} = \sigma_2/E_0$ ，而 ϵ_{3c} 值可将 ϵ_{1c} 和 ϵ_{2c} 值代入式 (14) 和式 (15) 求得。

当三轴受拉时，取 $\epsilon_{ic} = \sigma_i/E_i$ ， $i = 1, 2, 3$ 。

3 算 例

某三轴试验^[5] ,二向等压 , $\sigma_1 = \sigma_2$,其值分别取为 -3.8 MPa 和 -6.9 MPa ,混凝土单轴抗压强度 $f_c = 25.2\text{ MPa}$,取 $E_0 = 3.2 \times 10^4\text{ MPa}$, $\epsilon_0 = 2f_c/E_0$,其计算曲线(虚线)和实验曲线(实线)见图 1. 从图知 ,计算曲线和实验曲线符合较好 ,表明本文提出的 ϵ_{ic} 值的计算方法合理的.

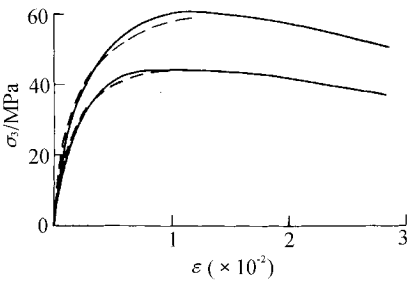


图 1 三轴受压实验曲线和计算曲线的比较
Fig.1 Comparison of calculated and experimental curves of concrete under triaxial compression

4 结 论

- a. 以应力-应变曲线的实验值与计算值的误差达到最小为目标 ,来反演相应于最大应力的等效单轴应变值 ϵ_{ic} 是十分有效的 ;
- b. 所提出的各种受力状态下 ϵ_{ic} 值的计算方法是合理的 ,较好地解决了等效单轴应变本构模型中的一个关键问题.

参 考 文 献

1 电力工业部西北勘测设计研究院. DL/T5057—1996 水工混凝土结构设计规范. 北京: 中国电力出版社, 1996. 188 ~ 189
2 汪基伟 吴胜兴. 三峡升船机塔柱底部实体混凝土温度配筋研究. 水利水电技术, 1998(8) 30 ~ 38
3 汪基伟 吴胜兴. 尾水管施工期温度裂缝钢筋混凝土有限元分析. 水利水运科学研究, 1998(4) 347 ~ 354
4 Darwin D , Pecknold D A. Nonlinear biaxial stress-strain law for concrete. ASCE ,1977 ,103(EM2) 229 ~ 241
5 Chen W F. Plasticity in reinforced concrete. New York :McGraw-Hill Book Co Inc , 1982. 176 ~ 184
6 Balan T A. Constitutive model for 3D cyclic analysis of concrete structures. ASCE ,1997 ,123(EM2) :143 ~ 153
7 Kupfer H. Behavior of concrete under biaxial stresses. ACI ,1969 ,66(8) 656 ~ 666
8 Gerstle K H. Simple fomulation of biaxial concrete behavior. ACI ,1981 ,78(1) 62 ~ 68
9 彭放. 复杂应力状态下多种混凝土材料的破坏准则及本构模型研究 [学位论文]. 大连: 大连理工大学, 1990
10 Ottosen N S. A failure criterion for concrete. ASCE ,1977 ,103(EM4) 527 ~ 535

Study on 3-D Equivalent Uniaxial Strain-Stress Relation of Concrete

Wang Jiwei Wu Changhai Wang Hong

(College of Civil Engineering ,Hohai Univ. ,Nanjing 210098)

Abstract The values of ϵ_{ic} ,by which the mean error between calculated and experimental values is minimized ,are obtained from trail calculation of available experimental values and regression equations for calculating ϵ_{ic} under triaxial compression are given. The method for calculation of ϵ_{ic} under triaxial compression-tension and triaxial tension is also presented. Examples show the present method is reasonable.

Key words concrete 3-D stress-strain relation ,equivalent uniaxial strain