

二维问题的随机界面元法

王卫标 武清玺 卓家寿

(河海大学土木工程学院 南京 210098)

摘 要 首次提出适用于求解连续及不连续介质结构可靠度的随机界面元法,建立了数学模型,导出了基本公式,研制了计算程序.在算例分析中,用 Monte-Carlo 法的模拟结果进行验证,实际计算表明本文提出的方法是可靠而有效的,且适用于复杂结构可靠度问题的求解.

关键词 随机界面元法 不连续介质 结构可靠度 Monte-Carlo 法

中图分类号 TU311.2

在结构设计进行可靠度分析时,荷载效应的计算方法一般都采用材料力学方法.对于二维或三维大体积连续介质问题则常采用随机有限元方法.在确定性分析中,由于界面元法在处理连续及不连续介质力学问题,尤其在处理不连续介质力学问题时具有很大的优越性^[1,2],因此,在不确定分析中,随机界面元法也应占有一席之地.基于这一点,本文用界面元法在结构可靠度分析领域进行了首次探索,取得了比较满意的结果.

1 界面元法^[1,2]概述

界面元是以单元形心点的位移分量作为基本未知量、界面上保持应力连续条件、积累变形于单元界面的非协调元,它采用分片刚体位移模式:

$$u = N u_g \tag{1}$$

其中 $u = \{u \quad v\}^T$ $u_g = \{u_g \quad v_g \quad \theta\}^T$ $N = \begin{bmatrix} 1 & 0 & y_g - y \\ 0 & 1 & x_g - x \end{bmatrix}$

式中: u ——单元上任一点上的位移矢量; u_g ——单元形心点的位移矢量; N ——形函数.

并假设^[1,2]微分变形条每一微段内界面法向正应变 ϵ_n 和切向剪应变 γ_{si} 为均匀分布,切向正应变 $\epsilon_{si} = 0$,由虎克定律可以推得其应力公式为

$$T_l = -D(L^{(1)}U^{(1)} + L^{(2)}U^{(2)}) = -DL^{(1)}(U^{(1)} - U^{(2)}) \tag{2}$$

式中: L ——界面局部坐标与整体坐标形成的方向余弦列阵; $(1), (2)$ ——与该界面相邻的两单元.

根据其数学机理——加权余量法和力学机理——虚功原理都可推得与有限元法格式相似的支配方程:

$$KU = Q \tag{3}$$

其中

$$K = \sum_{e=1}^{NE} C_e^{(1)T} \int_{S_0^e} N^{(1)T} L^{(1)T} D L^{(1)} N^* ds C_e^* =$$
$$\sum_{j=1}^{NSE} C_e^{*T} \int_{S_j} N^{*T} L^{(1)T} D L N^* ds C_e^* =$$
$$\sum_{j=1}^{NSE} C_e^{*T} K_j C_e^*$$
$$Q = \sum_{e=1}^{NE} C_e^T \left[\int_{\Omega^e} N^{(1)T} f d\Omega + \int_{S_0^e} N^{(1)T} p ds \right]$$

$$U = \{u_{g1} \quad u_{g2} \quad \cdots \quad u_{gNE}\}^T$$

式中： NE ——界面元的总数； K_j ——对界面 S_j 形成的劲度矩阵； Q ——由荷载引起的等效荷载列阵； U ——位移列阵。

2 随机界面元法

设已知结构可靠度分析中的一组基本随机变量 $X = (x_1 \quad x_2 \quad \cdots \quad x_n)^T$ ，功能函数为 $g(X) = 0$ ，基本随机变量 $x_i (i = 1, 2, \cdots, n)$ 可以是荷载、几何尺寸、材料特性参数等。由于结构的功能函数是建立在结构力学特性上的，通常用一组表示强度的变量 $R = R(X)$ 和表示荷载效应的变量 $S = S(X)$ 组成，所以结构的功能函数 $g(X)$ 可以改写为 $g = g(R, S)$ 。

为简便起见，不妨设基本变量 X 为相互独立的正态变量，通过变换式：

$$Y = TX + B \tag{4}$$

其中

$$T = \begin{bmatrix} 1/\sigma_{x_1} & & & 0 \\ & 1/\sigma_{x_2} & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & 1/\sigma_{x_n} \end{bmatrix} \quad B = \begin{Bmatrix} -\overline{x_1}/\sigma_{x_1} \\ -\overline{x_2}/\sigma_{x_2} \\ \vdots \\ -\overline{x_n}/\sigma_{x_n} \end{Bmatrix}$$

式中 $\sigma_{x_i}, \overline{x_i} (i = 1, 2, \cdots, n)$ 分别为随机变量 x_i 的标准差和均值。由此得到一组相互独立的标准正态变量 Y ，相应的功能函数可转换到标准正态空间：

$$g(X) = g(R, S) = g(R(T^{-1}(Y - B)), S(T^{-1}(Y - B))) = G(Y) \tag{5}$$

按迭代格式：

$$Y^{(k+1)} = [Y^{(k)} \alpha^{(k)} + \frac{G(Y^{(k)})}{\|\nabla G(Y^{(k)})\|}] \alpha^{(k)} \tag{6}$$

其中

$$\nabla G(Y^{(k)}) = (\frac{\partial G(Y^{(k)})}{\partial y_1} \quad \frac{\partial G(Y^{(k)})}{\partial y_2} \quad \cdots \quad \frac{\partial G(Y^{(k)})}{\partial y_n})^T$$
$$\alpha^{(k)} = -\frac{\nabla G(Y^{(k)})}{\|\nabla G(Y^{(k)})\|}$$

进行迭代，确定极限状态方程曲面 $G(Y) = 0$ 上距原点最近的点 Y^* 。显然，极限状态方程梯度 $\nabla G(Y)$ 的计算是整个计算过程的关键。

在随机界面元中，考虑开裂的功能函数的具体表达式为

$$g(X) = R_t(X) - S_N(X) = G(Y) \tag{7}$$

式中： $R_t(X)$ ——材料的抗拉强度，一般选作随机变量； $S_N(X)$ ——界面考察点的法向拉应力，它一般为随机变量的隐函数。根据微分理论

$$\nabla G(Y) = (T^{-1})^T \nabla g_X(R_t, S_N) = (T^{-1})^T [J_{R_t} \nabla g_{R_t}(R_t, S_N) + J_{S_N} \nabla g_{S_N}(R_t, S_N)] \tag{8}$$

其中 $\nabla g_X(R_t, S_N), \nabla g_{R_t}(R_t, S_N)$ 和 $\nabla g_{S_N}(R_t, S_N)$ 分别为结构功能函数对 X, R_t 和 S_N 的梯度向量， $J_{R_t} = \frac{\partial R_t}{\partial x_j}$ ， $J_{S_N} = \frac{\partial S_N}{\partial x_j} (j = 1, 2, \cdots, n)$ 。通常 $J_{R_t}, \nabla g_{R_t}(R_t, S_N)$ 和 $\nabla g_{S_N}(R_t, S_N)$ 的计算很容易，而对 J_{S_N} 的计算较困难，须从界面元的支配方程入手。

式(3)的两边同时对随机变量 $x_j (j = 1, 2, \cdots, n)$ 求偏导，得

$$\frac{\partial}{\partial x_j}(KU) = \frac{\partial}{\partial x_j}(Q)$$

所以

$$\frac{\partial U}{\partial x_j} = K^{-1}(\frac{\partial Q}{\partial x_j} - \frac{\partial K}{\partial x_j}U) \quad (j = 1, 2, \cdots, n) \tag{9}$$

根据界面元应力公式(2),可得

$$J_{S_N} = \frac{\partial S_N}{\partial x_j} = - \frac{\partial D}{\partial x_j} L^{(1)} (U^{(1)} - U^{(2)}) - DL^{(1)} (\frac{\partial U^{(1)}}{\partial x_j} - \frac{\partial U^{(2)}}{\partial x_j}) \quad (j = 1, 2, \cdots, n) \quad (10)$$

再由式(8),便可求出 $\nabla G(Y)$. 然后,按式(6)进行迭代计算求出 Y^* ,进一步按距离公式确定界面的可靠指标

$$\beta = \sqrt{Y^{*T} Y^*} \quad (11)$$

由此,便可得到几何法^[3]求界面可靠指标的具体计算步骤:

- a. 确定初始迭代点 $\bar{X}^{(0)}$,一般以均值点 $\bar{X} = \{\bar{x}_1, \bar{x}_2, \cdots, \bar{x}_n\}^T$ 作为初始迭代点.
- b. 对结构进行静力分析,得到单元的形心位移 U 及界面应力 S_N .
- c. 形成 $\frac{\partial K}{\partial x_j}, \frac{\partial Q}{\partial x_j}$,并按式(9)求出 $\frac{\partial U}{\partial x_j} (j = 1, 2, \cdots, n)$,按式(10)求出 J_{S_N} .
- d. 由式(7)求出 $G(Y^{(k)})$,由式(8)求出 $\nabla G(Y^{(k)})$.
- e. 按式(6)的迭代格式计算出 $Y^{(k+1)}$ 值,进而得到新的设计验算点 $X^{(k+1)}$ 的值.
- f. 按式(11)计算界面的可靠指标 β .
- g. 按式(7)计算功能函数 $g(X)$ 的值,并进行收敛判断.若 $g(X) > \epsilon$,则返回(步骤 b)继续迭代.

为了避免在求设计验算点迭代过程中每次形成和分解劲度矩阵,可以将位移在 X 的均值处进行 Taylor 展开,并近似地取一次项^[4],得

$$U(X) \approx U(\bar{X}) + \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x}_i) \frac{\partial U}{\partial x_i} \Big|_{x_i = \bar{x}_i} = U(\bar{X}) + \sum_{i=1}^n y_i \sigma_{xi} \frac{\partial U}{\partial x_i} \Big|_{x_i = \bar{x}_i} \quad (12)$$

这样,只需在上述步骤 f 和 g 之间增加当 $Y = Y^{(k+1)}, X = X^{(k+1)}$ 时的位移和应力.

重复步骤 c ~ g 也可计算界面的可靠指标.

对于考虑滑移的结构功能函数 $g(X) = c - \sigma_n \tan \varphi - |\tau_s|$,可以按上述方法进行类似处理,同样可得到界面的抗滑可靠指标,只不过增加材料参数中的粘聚力 c ,摩擦角 φ 作为随机变量.

3 Monte - Carlo 法

为了验证随机界面元几何法求界面可靠指标的正确性,本文针对界面元模型,用蒙特卡罗法对结构进行抽样模拟,具体步骤为:

- a. 用乘同余法^[5]产生(0,1)区间上均匀分布的随机数.
- b. 对(0,1)区间上均匀分布的随机数进行均匀性和独立性检验^[6].检验通过的,则将其变换成给定分布的随机数.
- c. 利用变量的随机数进行结构分析,求出功能函数 $g(X)$ 的值.
- d. 重复步骤 c,累积记录出现 $g(X) \leq 0$ 的次数 L 和抽样总数 N .
- e. 计算结构的失效概率和可靠指标.

4 数值算例

为了考证随机界面元法求界面可靠指标的正确性,本文通过一个数值算例将其结果与蒙特卡罗法进行比较.

例 考虑如图 1 所示的悬臂梁,由 I, II 两种不同的材料构成,受匀布荷载作用. 计算条件:取材料的弹模 E_i 、抗拉强度 R_{ti} 、自重 γ_{gi} 、粘聚力 c_i 、摩擦角 φ_i 的正切函数 $\tan \varphi_i$ 以及荷载 q 作为随机变量,并认为它们服从正态分布,而将泊松比 μ_i 作为常数 ($i = 1, 2$),并

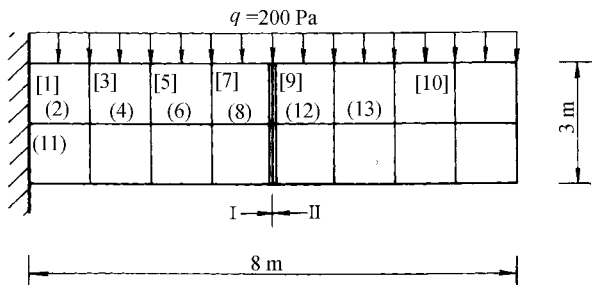


图 1 悬臂梁

Fig.1 Cantilever beam

取 $\mu_1 = \mu_2 = 0.167$,按平面应力进行计算.

各随机变量的均值及变异系数如表 1 所示,计算结果如表 2、表 3 所示,表中方括号内数值为抗拉可靠指标,圆括号内数值为抗压可靠指标.

表 1 计算所用的各随机变量的均值及变异系数
Table 1 Means and variant coefficients of stochastic variables for calculation

变量	E_1	E_2	R_{t1}	R_{t2}	γ_{g1}	γ_{g2}	c_1	c_2	$\tan \varphi_1$	$\tan \varphi_2$	q
均值	2.0×10^9	3.0×10^9	1.0×10^5	2.5×10^5	1960	2450	3.0×10^4	3.5×10^4	0.60	0.65	200
变异系数	0.10	0.10	0.25	0.25	0.02	0.02	0.25	0.25	0.20	0.20	0.05

表 2 用随机界面元法求界面可靠指标的结果
Table 2 Results of interface reliability index from the stochastic interface-stress element method

界面	[1]	(2)	[3]	(4)	[5]	(6)	[7]	(8)	[9]
β	3.090	2.623	3.218	2.036	3.402	2.109	3.580	2.327	3.345

表 3 用蒙特卡罗法模拟求界面可靠指标的结果
Table 3 Results of interface reliability index from Monte-Carlo method

模拟次数	[1]	(2)	[3]	(4)	[5]	(6)	[7]	(8)	[9]
2000	3.090	2.697	3.090	2.044	3.291	2.086		2.366	3.291
4000	2.920	2.674	3.023	2.014	3.291	2.080	3.481	2.336	3.481
8000	3.055	2.622	3.175	2.002	3.481	2.078	3.662	2.290	3.371
10000	3.062	2.620	3.156	2.007	3.432	2.079	3.719	2.297	3.291
20000	3.036	2.628	3.138	2.007	3.432	2.085	3.615	2.306	3.320
30000	3.053	2.615	3.168	1.998	3.463	2.074	3.646	2.293	3.331
40000	3.062	2.614	3.185	2.000	3.481	2.078	3.662	2.289	3.305
80000	3.062	2.612	3.180	2.001	3.481	2.078	3.662	2.291	3.305
100000	3.062	2.612	3.179	2.002	3.481	2.079	3.673	2.292	3.296
200000	3.059	2.612	3.177	2.002	3.481	2.080	3.662	2.292	3.299

当材料参数 c_1 与 $\tan \varphi_1$ 以及 c_2 与 $\tan \varphi_2$ 相关时,其相关系数分别为 $\rho_1 = 0.5, \rho_2 = 0.4$,考虑抗滑界面的可靠指标,其结果如表 4 所示.

表 4 材料参数 c 和 $\tan \varphi$ 相关⁽¹⁾与不相关⁽²⁾对抗滑可靠指标的影响
Table 4 The influence on anti-slide reliability index of related⁽¹⁾ or unrelated⁽²⁾ material parameter c and $\tan \varphi$

界 面 条 件	(12)		(13)		(6)		(8)	
	(1)	(2)	(1)	(2)	(1)	(2)	(1)	(2)
β	2.7547	2.7567	3.0362	3.0385	2.1080	2.1092	2.3259	2.3273

5 结 语

从表 4 可以得到材料参数 c 和 $\tan\varphi$ 相关性会降低界面的可靠指标.

比较表 2 和表 3 不难看出 随机界面元法与蒙特卡罗法求界面可靠指标的结果基本上是一致的. 由于蒙特卡罗法的基础是确定性界面元法,而确定性界面元法的正确性已在文献 [1] 和 [2] 中作了充分而全面的论述. 由此,我们可以得出 随机界面元法求结构可靠指标的方法是可行的,结论是正确的,对于不连续介质力学的非确定性问题行之有效的. 它只需要劲度矩阵的一次形成和分解就可计算结构的可靠指标,效率高且满足精度要求,对于三维不连续介质力学的非确定性问题的求解具有重要意义.

参 考 文 献

1 赵 宁. 不连续介质的力学模型及其应用 :[学位论文]. 南京 :河海大学,1994

2 卓家寿,赵宁. 不连续介质静、动力分析的刚体-弹簧元法,河海大学学报,1993,21(5) :34 ~ 43

3 吕泰仁,吴世伟. 用几何法求构件的可靠指标. 河海大学学报,1988,16(5) :86 ~ 93

4 刘 宁. 基于三维弹塑性随机有限元的结构体系可靠度计算 :[学位论文]. 南京 :河海大学,1994

5 徐钟济. 蒙特卡罗方法. 上海 :上海科学技术出版社,1985. 40 ~ 48,61 ~ 78

6 吴世伟. 结构可靠度分析. 北京 :人民交通出版社,1999. 163 ~ 166

7 武清玺,吴世伟,吕泰仁. 基于有限元法的重力坝可靠度分析. 水利学报,1990(1) :58 ~ 64

8 钱令希,张雄. 结构分析中的刚体有限元法. 计算结构力学及其应用,1991,8(1) :1 ~ 14

Stochastic Interface-Stress Element Method for 2-D Problems

Wang Weibiao Wu Qingxi Zhuo Jiashou

(College of Civil Engineering, Hohai Univ., Nanjing 210098)

Abstract The stochastic interface-stress element method for solving the reliability of continuous or discontinuous medium structures is introduced for the first time. A mathematical model has been constructed. Formulas have been deduced and computer program have been developed. In the analysis of an example,the results are compared with those obtained by Monte-Carlo method. It is shown that the method is reliable and effective,and can be applied to complex structures.

Key words stochastic interface-stress element method ; discontinuous medium ; structure reliability ; Monte-Carlo method