

混凝土三维非正交弥散裂缝模型

巫昌海 汪基伟

夏颂佑

(淮海大学土木工程学院 南京 210098)

(淮海大学水利水电工程学院 南京 210098)

摘 要 基于应变分解法,将开裂后的混凝土应变分解成裂缝面的应变与完好混凝土应变两部分,裂缝面上混凝土法向刚度取单轴受拉混凝土应力应变曲线的下降段刚度,并保留裂缝面的剪切刚度以考虑骨料咬合与销栓作用,完好混凝土本构关系采用弹塑性本构模型,推导了混凝土三维非正交弥散裂缝模型的基本公式.算例表明,该模型可用于混凝土结构的开裂分析,且分析结果和试验结果较为吻合.

关键词 混凝土 本构关系 弥散裂缝模型 非线性有限元 三维

中图分类号 TV431

在钢筋混凝土有限元分析中采用弥散裂缝模型的优点是混凝土发生开裂后不需要改变单元网格,可以很方便地分析结构从加载到破坏的全过程特性.具体应用时,弥散裂缝模型又可分成以下几种:

a. 正交裂缝模型.该模型认为开裂后的材料各向异性主轴与开裂方向一致,开裂后裂缝面上无泊松效应,但为了考虑骨料咬合力等,通常保留部分剪切模量.若采用最大拉应力准则,则当最大主拉应力超过混凝土抗拉强度时,出现第 1 次开裂.为了便于坐标轴的转换,通常假定第 2 条裂缝与第 1 条裂缝垂直.这就意味着在三维情况下出现两次开裂后,第 3 个开裂方向也就确定了.这样的开裂方式,由于裂缝相互垂直,所以又称为正交裂缝模型.

b. 旋转裂缝模型. Cope^[1]等人在进行钢筋混凝土板的试验时发现裂缝方向并不总是相互垂直的.他们在建立板的非线性分析模型时采用了材料主轴随主应力轴旋转的弥散裂缝模型.这种模型在开裂后,考虑了主应力的转动,并假定材料的主轴与主应力轴一起转动.尽管这一方法被用于板的分析中取得较合理的结果,但许多材料科学家认为这一模型缺乏理论基础.其理由是,裂缝形成是不可逆的,一旦裂缝形成就意味着材料在某一方向产生缺陷,而这一缺陷是不能随坐标轴旋转的.

c. 非正交裂缝模型. De Borst^[2]提出的一种弥散裂缝模型是建立在应变分解的构思上的.在增量型本构关系中,混凝土破坏后这一模型的应变增量被分解为两部分:完好混凝土应变增量与裂缝应变增量.完好混凝土应变增量可按破坏前的本构关系取用,裂缝应变增量由裂缝面上的应力应变关系确定.这一模型的特点是裂缝的形成不需保持相互垂直,并且在某一积分点可以开裂若干次,裂缝间不必相互垂直.目前该模型已被广泛认可,并在二维情况下得到应用.但三维情况下该模型的应用尚未见报道.本文主要讨论三维非正交裂缝模型及其在混凝土结构非线性有限元分析中的应用情况.

1 基本公式

应变分解法与弹塑性理论相似,是将开裂后总体坐标下应变增量分解为两部分,即

$$\Delta \varepsilon = \Delta \varepsilon^{co} + \Delta \varepsilon^{cr} \quad (1)$$

式中: $\Delta \varepsilon$ ——总体坐标下应变增量; $\Delta \varepsilon^{co}$ ——完好混凝土的应变增量; $\Delta \varepsilon^{cr}$ ——混凝土裂缝面的应变增量.

如以最大拉应力为混凝土开裂准则,则当主拉应力超过混凝土极限抗拉强度时,出现第 1 次开裂.由于裂缝面的应力释放,其后的应力主轴会发生旋转,当旋转后的主拉应力再次超过极限抗拉强度时,就发生第 2 次开裂.这样,在一点可以出现若干次开裂,且每条裂缝不一定相垂直.设第 i 条裂缝在其局部坐标系下的

应变增量为 $\Delta \mathbf{e}_i^{cr}$, 根据坐标转换矩阵, 可求得第 i 条裂缝在总体坐标系下的应变增量为

$$\Delta \mathbf{e}_i^{cr} = \mathbf{N}_i \Delta \mathbf{e}_i^{cr} \quad (2)$$

$$\mathbf{N}_i = \begin{bmatrix} l_1^2 & m_1^2 & n_1^2 & l_1 m_1 & m_1 n_1 & n_1 l_1 \\ l_2^2 & m_2^2 & n_2^2 & l_2 m_2 & m_2 n_2 & n_2 l_2 \\ 2l_1 l_2 & 2m_1 m_2 & 2n_1 n_2 & l_1 m_2 + l_2 m_1 & m_1 n_2 + m_2 n_1 & n_1 l_2 + n_2 l_1 \end{bmatrix} \quad (3)$$

式中 l_i, m_i, n_i 为开裂时主应力方向余弦. 若某一积分点发生 k 次开裂, 则裂缝产生的应变增量为

$$\Delta \mathbf{e}^{cr} = \sum_{i=1}^k \mathbf{N}_i \Delta \mathbf{e}_i^{cr} \quad (4)$$

式(2), (4)中裂缝面上的应变由 3 个分量组成:

$$\Delta \mathbf{e}_i^{cr} = \{\Delta \epsilon_i^n \quad \Delta \gamma_i^s \quad \Delta \gamma_i^t\}^T \quad (5)$$

式中 $\Delta \epsilon_i^n$ ——第 i 条裂缝面上的正应变增量; $\Delta \gamma_i^s$ ——第 i 条裂缝面上的剪应变增量(s 方向); $\Delta \gamma_i^t$ ——第 i 条裂缝面上的剪应变增量(t 方向).

同样, 设第 i 条裂缝在其局部坐标系下的应力增量为 $\Delta \mathbf{s}_i^{cr}$, 根据坐标转换矩阵, 可求得它与总体坐标系下的应力增量 $\Delta \boldsymbol{\sigma}$ 之关系为

$$\Delta \mathbf{s}_i^{cr} = \mathbf{N}_i^T \Delta \boldsymbol{\sigma} \quad (6)$$

式中 $\Delta \mathbf{s}_i^{cr}$ 也由 3 个分量组成:

$$\Delta \mathbf{s}_i^{cr} = \{\Delta s_i^n \quad \Delta \tau_i^s \quad \Delta \tau_i^t\}^T \quad (7)$$

定义裂缝面上应力与应变之关系为

$$\Delta \mathbf{s}_i^{cr} = \mathbf{D}_i^{cr} \Delta \mathbf{e}_i^{cr} \quad (8)$$

式中开裂面上的本构矩阵 $\mathbf{D}_i^{cr}$ 将在下节介绍. 完好混凝土的本构关系为

$$\Delta \boldsymbol{\sigma} = \mathbf{D}^{co} \Delta \boldsymbol{\epsilon}^{co} \quad (9)$$

将式(1)代入式(9), 可得

$$\Delta \boldsymbol{\sigma} = \mathbf{D}^{co} \{\Delta \boldsymbol{\epsilon} - \Delta \boldsymbol{\epsilon}^{cr}\} \quad (10)$$

将式(4)代入式(10), 可得

$$\Delta \boldsymbol{\sigma} = \mathbf{D}^{co} \left\{ \Delta \boldsymbol{\epsilon} - \sum_{i=1}^k \mathbf{N}_i \Delta \mathbf{e}_i^{cr} \right\} \quad (11)$$

由式(6), (8) 可得

$$\Delta \mathbf{e}_i^{cr} = (\mathbf{D}_i^{cr})^{-1} \mathbf{N}_i^T \Delta \boldsymbol{\sigma} \quad (12)$$

将式(12)代入式(11), 可得

$$\Delta \boldsymbol{\sigma} = \mathbf{D}^{co} \left\{ \Delta \boldsymbol{\epsilon} - \sum_{i=1}^k \mathbf{N}_i (\mathbf{D}_i^{cr})^{-1} \mathbf{N}_i^T \Delta \boldsymbol{\sigma} \right\} \quad (13)$$

由式(13) 可得

$$\Delta \boldsymbol{\sigma} = \{\mathbf{D}^{co}\}^{-1} + \sum_{i=1}^k \mathbf{N}_i (\mathbf{D}_i^{cr})^{-1} \mathbf{N}_i^T \}^{-1} \Delta \boldsymbol{\epsilon} \quad (14)$$

式(14)即为三维非正交弥散裂缝模型的本构关系.

2 裂缝面上的应力应变关系

式(8)中开裂面上的本构矩阵通常采用以下形式:

$$\mathbf{D}^{cr} = \begin{bmatrix} D_c & 0 & 0 \\ 0 & G_c & 0 \\ 0 & 0 & G_c \end{bmatrix} \quad (15)$$

式中 D_c, G_c 分别为开裂面上的法向与切向刚度. 裂缝面上的正应力与正应变的关系可取为混凝土单轴受拉试验的下降段, 如图 1 所示. 为避免有限元计算的极限荷载随单元网格加密而降低^[3], 引入混凝土的断裂能 G_f 作为材料参数, 则图 1 中混凝土受拉极限应变为

$$\epsilon_u = 2G_f/(f_t l_c) \tag{16}$$

当计算过程中裂缝面的法向应变小于历史达到的最大应变 ϵ_m 时,则在裂缝面上发生卸载,卸载时法向刚度取图 1 所示的割线刚度 E_r .

式(16)中 l_c 为混凝土断裂特征长度,在三向应力状态下特征长度的计算较复杂,一种简单的计算方法是取积分点所占单元体积的立方根^[3],即

$$l_c = \sqrt[3]{dV} \tag{17}$$

在式(15)中,为考虑裂缝面上骨料咬合、销栓作用等,剪切模量常取为混凝土开裂前剪切模量 G 的一部分^[2],即

$$G_c = \beta G/(1 - \beta) \tag{18}$$

计算时取 $\beta = 0.01 \sim 0.2$,本文取 0.1.

3 弹塑性性与开裂分析

混凝土破坏之前的本构模型选用弹塑性模型,屈服函数取 Hinton 所建议的形式^[4]

$$f(I_1, J_2) = \sqrt{\beta(3J_2) + \alpha I_1} = \sigma_0 \tag{19}$$

式中: σ_0 ——等效应力; I_1 ——应力张量第 1 不变量; J_2 ——应力偏张量第 2 不变量.

由单轴受压与双轴等压试验结果确定出式(19)中两个常数为: $\alpha = 0.355\sigma_0, \beta = 1.355$. 采用相关流动法则,根据弹塑性理论导出弹塑性应力应变关系矩阵为

$$D_{ep} = D - \frac{DAA^T D}{H + A^T D A} \tag{20}$$

式中: D ——弹性矩阵; H ——硬化参数; A^T —— $[\partial f/\partial \sigma_x \ \partial f/\partial \sigma_y \ \partial f/\partial \sigma_z \ \partial f/\partial \tau_{xy} \ \partial f/\partial \tau_{yz} \ \partial f/\partial \tau_{xz}]$.

在有限元分析中,混凝土破坏之前采用以上弹塑性本构模型. 混凝土的破坏类型可分为开裂型与压碎型. 对于开裂型破坏,可将由式(20)所确定的 D_{ep} 代替式(14)中的 D^{co} ,而 D_i^{cr} 可由裂缝面的方向余弦确定. 对于压碎型破坏,可采用与屈服面相似的应变空间破坏面来近似模拟^[4]. 事实上,混凝土被压碎在整个结构中所占比例较小,其主要破坏类型是开裂型,所以对压碎型的近似处理并不影响对整个结构性能的分析结果.

4 算 例

Bresler-scorelelis 试验梁^[4]常被用于检验钢筋混凝土有限元分析结果是否合理的依据,现取其中一根梁进行分析. 梁的参数如下:

混凝土抗压强度 $f_c = 24.5 \text{ MPa}$,泊松比 $\nu = 0.2$ 初始弹性模量 $E_0 = 21.3 \text{ GPa}$,断裂能 $G_f = 0.1 \text{ N/mm}$ 混凝土抗拉强度 $f_t = 2.45 \text{ MPa}$,钢筋弹性模量 $E_s = 191.4 \text{ GPa}$.

梁的网格划分如图 2 所示. 采用等效薄膜模拟钢筋^[5],梁的底层为含有钢筋的组合单元,计算所得梁的中点挠度值与试验值的比较如图 3 所示.

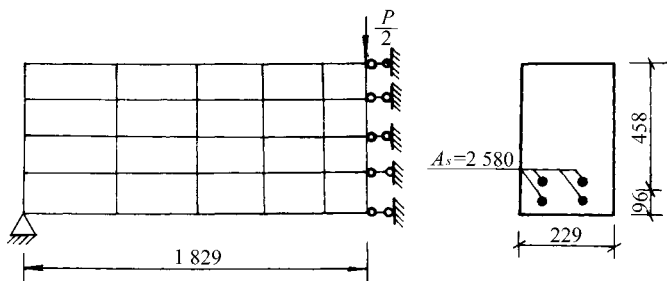


图 2 梁的网格划分
Fig.2 Mesh for the beam

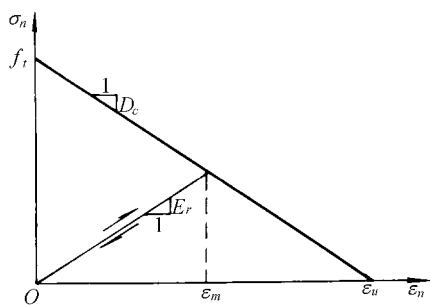


图 1 混凝土开裂面受拉应力应变关系
Fig.1 Tensile stress-strain relationship for the cracking surface of concrete

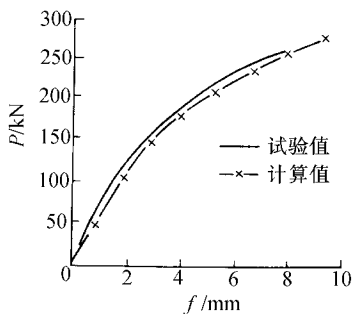


图 3 梁的荷载与中点位移曲线
Fig.3 Load-displacement curve for the beam

5 结 语

由于开裂引起的非线性是钢筋混凝土结构非线性的重要组成部分,所以非正交弥散裂缝模型不仅在理论上比其它模型合理,而且可以模拟混凝土的非正交裂缝. 本文的模型可与任何混凝土破坏前的本构模型相结合,用于混凝土结构的三维分析.

参 考 文 献

1 Cope R J. Material modeling of real, reinforced concrete slabs. In :Damjanic F, et al, eds. Proceeding of International Conference on Computer Aided Analysis and Design of Concrete Structures, Swansea :Pineridge Press,1984. 85 ~ 117
2 De Borst R, Nauta P. Non-orthogonal cracks in a smeared finite element model. Engineering Computations,1985,2(3) 35 ~ 46
3 江见鲸. 钢筋混凝土结构非线性有限元分析. 西安 陕西科学技术出版社,1994. 128 ~ 131
4 Hinton E, Owen D R J. Finite element software for plates and shells. Swansea :Pineridge Press,1984. 327 ~ 340
5 康清梁. 钢筋混凝土有限元分析. 北京 中国水利水电出版社,1996. 65 ~ 67

Three-Dimensional Non-Orthogonal Smeared Crack Model for Concrete

Wu Changhai Wang Jiwei

(College of Civil Engineering , Hohai Univ. , Nanjing 210098)

Xia Songyou

(College of Water Conservancy and Hydropower Engineering , Hohai Univ. , Nanjing 210098)

Abstract Based on the method of strain decomposition in which the total strain increment of cracked concrete is decomposed into an intact concrete strain increment and a crack strain increment, the basic formulations of 3D non-orthogonal smeared crack model for concrete are derivated. The stiffness in the normal direction of cracking surface is equal to the decending stiffness of axial tensile stress strain curve of concrete. A shear modulus is retained to account for the interlock of aggregates and dowel action. Elastoplastic constitutive relationship is applied to intact concrete. This model has been applied to the analysis of an RC beam, and its adaptability to cracking analysis of concrete structures has been justified.

Key words concrete ; constitutive relationship ; smeared crack model ; nonlinear finite element ; three-dimension