

改进的求解应力强度因子的外插方法*

王宝庭 徐道远 王立民

(河海大学土木工程学院 南京 210098) (山东工程学院汽车系 淄博 255000)

摘 要 分析了无限大板中求解应力强度因子的应力外插法的误差原因 ,发现靠近裂纹尖端的应力误差可以用简单公式近似表达 ,由此建议用修正应力外插法提高有限元方法求解应力强度因子的精度 ,并通过二维问题验证了它的有效性 .结果表明 ,修正后可以较大地提高其精度 .
关键词 应力强度因子 ;应力外插法 ;修正应力外插法
中图分类号 TU502 ;TU528

现在已经可以计算各种形状、边界条件问题的应力强度因子 .其中 ,解析方法可以求解简单形状、简单边界条件问题的应力强度因子 .实用的数值分析方法如直接法中的应力外插法、位移外插法简单明了 ,且具有一定精度 .但由于在裂纹尖端产生的应力、位移解与精确解的偏离 ,因此数值分析方法不能说是高精度的 .为此 ,人们采用各种方法(包括采用奇异单元) ,以提高计算精度 .

从通用有限元的角度来看 ,难于把特殊的单元组装进去 .因此 ,希望有简单且可以提高精度的方法 .从这一点出发 ,本文利用有限元分析的低次单元 ,对应力外插法中应力解的误差 ,以无限大板中的裂纹问题为例 ,进行了研究 ,作为提高精度的一种简单方法 .本文使用应力修正外插法 ,并以二维问题为例 ,证实了其有效性 .

1 一般的应力外插法

首先概述一下一般的应力外插法 .裂纹尖端坐标及应力状态如图 1 所示 .
 $\theta = 0$ 上的应力 σ_y 以下式表示 :

$$\sigma_y = \frac{K_I}{\sqrt{2\pi r}} + 3C_1r^{\frac{1}{2}} + 5C_2r^{\frac{3}{2}} + \dots$$

图 1 裂纹尖端坐标
(1) Fig.1 Crack tip coordinates

将上式两端乘以 $\sqrt{2\pi r}$,并取其前两项表示 $K_I(r)$ 则

$$K_I(r) \equiv \sqrt{2\pi r}\sigma_y = K_I + 3\sqrt{2\pi}C_1r$$

(2)

这就是应力外插法的理论根据式 .

2 应力强度因子的计算误差

首先 ,对有限元分析中应力、无限大板裂纹问题位移的计算误差进行分析 .为此 ,利用有解析解的无限大平板中的裂纹问题(图 2) .为了研究网格剖分对计算结果的影响 ,本文研究了一种可以以不同梯度加密的三角形有限元网格全自动生成方法 ,如图 3、图 4 所示 .对图 2 所示的板进行粗、细两种不同密度的剖分 ,最小单元的尺寸粗剖分为半裂纹长的 1/1 024 ,细剖分为半裂纹长的 1/4 096 ,以单轴均匀拉伸进行计算 .图 5 所示的是粗剖分时裂纹尖端的应力计算值与理论值的比较 .从图 5 可以看出 ,越接近裂纹尖端 ,应力的计算值与理论值偏离越明显 .这就是应力外插法不能得到高精度解的原因 .

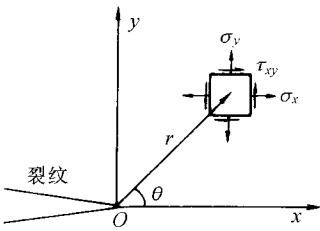


图 1 裂纹尖端坐标

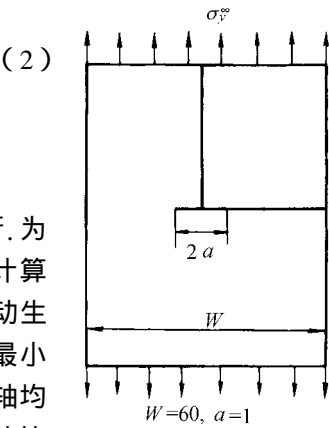


图 2 无限大板裂纹问题

Fig.2 Infinite plate problem

收稿日期 :1998-05-12
第一作者简介 :王宝庭 ,男 ,博士 ,结构工程专业 ,主要从事混凝土断裂与损伤研究 .
* 国家自然科学基金资助项目(59739180) .

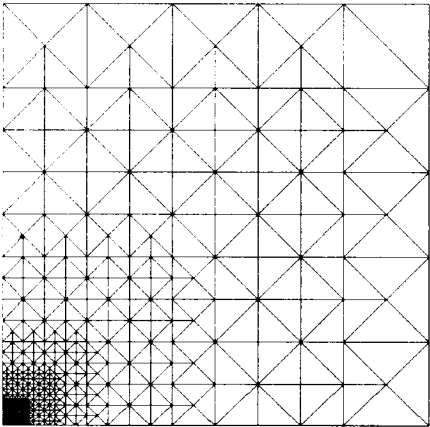


图3 总体网格剖分

Fig.3 General mesh subdivision

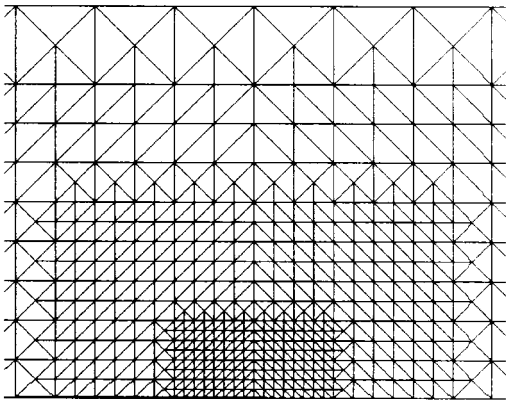


图4 裂尖网格剖分

Fig.4 Crack tip zone mesh subdivision

为了使位移的计算值与理论值一致,如图6所示,可以用两种方法予以修正.其一,给纵坐标的计算值一修正量 $\Delta\sigma$;其二,给横坐标的距离一修正量 Δr .以下说明基于改善误差提高应力强度因子精度的方法 $\Delta\sigma$ 要比 Δr 容易.应力修正量 $\Delta\sigma$ 和距离修正量 Δr 与距离的关系分别示于图7、图8.从图8可以看出,由于在靠近裂纹尖端处,应力分布具有 $r^{1/2}$ 奇异性,计算结果对距离极其敏感,计算误差也会对距离修正构成影响,因而以距离去修正是困难的.如以应力进行修正的话, $\Delta\sigma$ 除最尖端的一个点外,可以用低次函数近似.对于不同密度的网格剖分,可得出同样的结果.

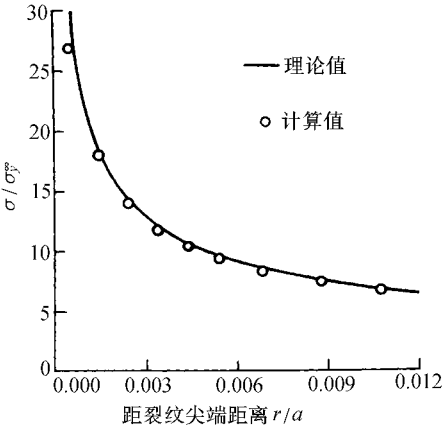


图5 数值解与精确解的比较

Fig.5 Comparison of numerical and theoretical solutions

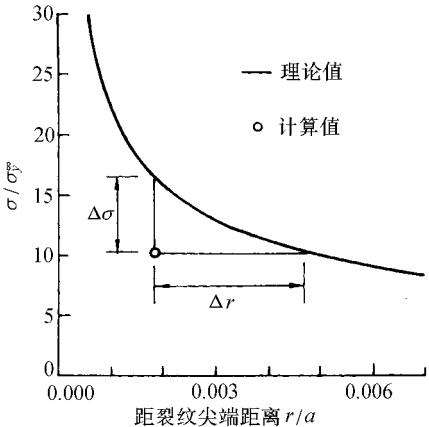


图6 应力偏离量与位置偏离量示意图

Fig.6 The stress and position deviations

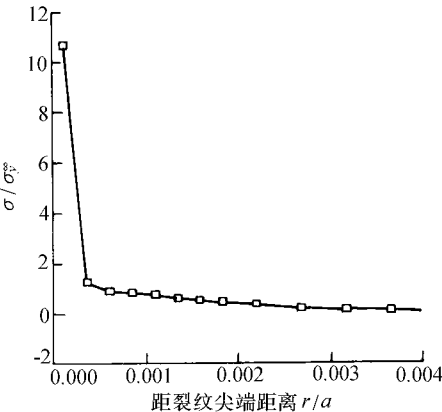


图7 应力修正结果

Fig.7 The modified stress results

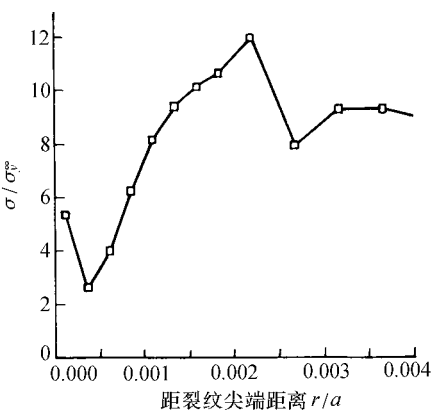


图8 位置修正结果

Fig.8 The modified position results

从以上可知,数值求解得到的应力 $\sigma_{\text{计算}}$ 引入 $\Delta\sigma$ 的概念的话,式(1)可表示为

$$\sigma_{\text{修正}} = \frac{K_I}{\sqrt{2\pi r}} + 3C_1r^{\frac{1}{2}} + 5C_2r^{\frac{3}{2}} + \dots$$

(3)

这里 $\sigma_{\text{修正}} = \sigma_{\text{计算}} + \Delta\sigma$.

通过增加单元划分密度、利用高次单元等,离散带来的误差越来越小, $\Delta\sigma$ 趋近于 0,式(3)可以看作与理论式(1)等价.

原来的外插法使用式(3),则式(2)就变为

$$\sqrt{2\pi r}\sigma_{\text{数值}} = K_I - \sqrt{2\pi r} \cdot \Delta\sigma + 3\sqrt{2\pi}C_1r$$

(4)

如果 $\Delta\sigma$ 与 σ 相比足够小,则式(4)就与原来的外插法相同;如不够小,用原来的外插法,数据就失去了线性性质.

3 应力修正外插法

有限单元法产生的应力位移的误差用上述应力修正法降低,然后求解应力强度因子,本文称之为应力修正外插法.引入 $\Delta\sigma$ 的概念,将原来外插法的 σ 代之以 $\sigma_{\text{计算}} + \Delta\sigma$,如下式所示,它可以比原来的外插法在更广的范围内恢复线性性.

$$\sqrt{2\pi r}\sigma_{\text{修正}} = K_I + 3\sqrt{2\pi}C_1r$$

(5)

以下就具体算法进行说明.关于应力的修正量,除了裂纹尖端第一点外,可以用下式表示:

$$\Delta\sigma = a_0 + a_1r + a_2r^2 + \dots$$

(6)

从图 7 可以看出,用下式近似就具有足够的精度.

$$\Delta\sigma = a_0 + a_1r$$

(7)

通过使式(2)表示的 $K(r)$ 的线性即相关系数达到最好去决定常数 a_0, a_1 .此时,在 Y 轴的截距定为应力强度因子.决定各系数时,设定适当的初值(本文取原有数据点的最小二乘拟合直线的参数为初值),各系数以适当的间隔上下浮动(本文让各常数各增大、减小 50 次),各种组合中相关系数最大的组合记为暂时的最优参数,把它作为新的初值,减小步长,再次求下一组最优参数,如此反复,使求得的最优参数与上一次的最优参数的误差达到设定值.并且,应力修正外插法不需要像比例外插法那样需有基本解.

4 求解无限大裂纹板的 K_I 的应用

本文提出的修正应力外插法与通常的外插法求解的无限大裂纹板中的应力强度因子如图 9(细网格)所示.用修正应力外插法得到的 K_I 为 1.009,与理论解 1.0 非常一致.

5 二维裂纹问题的应用

把修正距离外插法用于中央裂纹板的 K_I 的计算,以证明其有效性.中央裂纹板的参数分别取 $2a/W = 0.2 \sim 0.7$. K_I 计算结果与严格解^[1]的比较及相对误差如表 1 所示,其中相对误差示于图 10.本方法应力强度因子的误差(细网格)为 1% 左右,都比原来的外插法(误差 4% 左右)接近严格解.

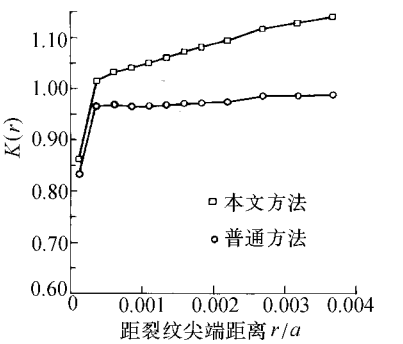


图 9 修正结果与未修正结果的比较

Fig.9 Comparison between modified and unmodified results

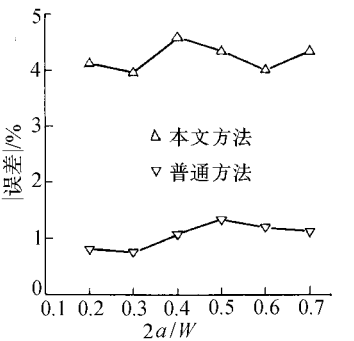


图 10 误差对比

Fig.10 Error comparison

表 1 计算结果与严格解的对比

Table 1 Comparison between computational results and strict solution

$2a/W$	严格解	普通方法	改进方法
0.2	1.025	0.9828(- 4.12%)	1.033(0.82%)
0.3	1.058	1.0161(- 3.96%)	1.066(0.76%)
0.4	1.109	1.0582(- 4.58%)	1.097(- 1.08%)
0.5	1.187	1.1355(- 4.34%)	1.171(- 1.34%)
0.6	1.303	1.2508(- 4.01%)	1.287(- 1.20%)
0.7	1.488	1.4234(- 4.34%)	1.471(- 1.14%)

6 结 果

本文以受拉的无限大中央裂纹板为例,说明了有限单元法产生的裂纹尖端的应力误差可以用直线近似修正.本方法的精度受直线近似范围的影响,以 rD/a (距裂纹尖端最远点的距离/半裂纹长)表示,则为 0.01 ($2a/W=0.7$)~0.03($2a/W=0.2$),在此范围内,利用此方法可以得到精度较高的应力强度因子.本文以中心裂纹板问题为算例进行了验证.

参 考 文 献

1 Murakami Y. Stress intensity factors handbook. Canada :Canada Pergamon Press ,1987. 452 ~ 561

Improved Extrapolation Method for Stress Intensity Factor

Wang Baoting Xu Daoyuan
(College of Civil Engineering ,Hohai Univ. ,Nanjing 210098)

Wang Limin
(Shandong University of Engineering ,Zibo 255000)

Abstract In this study , errors of stress intensity factor K_I on a crack in infinite plate problem are investigated by stress extrapolation method. It is found that the errors of stress near the crack tip may be expressed as a simple equation ,and the modified stress extrapolation method which assures the high accuracy of K_I by finite element analysis is proposed. The usefulness of this method is shown by the results of K_I calculation of two dimensional crack problems. Results indicate that the precision is improved remarkably after modification.

Key words stress intensity factor ;stress extrapolation method ; modified stress extrapolation method