

双二次域的 Tame 核和 Wild 核

孙爱玲

(中国药科大学基础部 南京 210009)

摘 要 设 $F = Q(\sqrt{d}, \sqrt{-1})$ 为双二次域, $K_2 O_F$ 和 $W(F)$ 分别是 F 的 Tame 核和 Wild 核. 本文决定了 $K_2 O_F / W(F)$ 的结构.

关键词 Tame 核; Wild 核; 素理想

中图号 O156.2

设 F 是代数数域, O_F 是其整元环. $K_2 O_F$, $W(F)$ 分别是 F 的 Tame 核和 Wild 核, 我们总有 $W(F) \subseteq K_2 O_F$. 这两个群具有十分重要的数论意义, 其研究成果较多. 二次域的情形可参见文献 [1, 2]. 双二次域的情形, 研究成果很少. 本文将针对这一情形进行研究.

设 Ω 为 F 的全体素除子集合, 对任意 $P \in \Omega$, 记 F_P 为 F 在 P 处的完备化, m_P 为 F_P 的整元环中的全体单位根. NP 为 P 的范, 对任意素数 p , ζ_p 为 p 次单位根.

下面阐述 $K_2 O_F / W(F)$ 的结构.

引理 1 设 $F = Q(\sqrt{d}, \sqrt{-1})$, $-1 \neq d \in \mathbf{Z}$ 无平方因子. 则

$$2O_F = \begin{cases} P_1^2 P_2^2 & \text{如果 } d \equiv \pm 1 \pmod{8} \\ P_3^4 & \text{如果 } d \equiv \pm 2 \pmod{8} \\ P_4^2 & \text{如果 } d \equiv \pm 3 \pmod{8} \end{cases}$$

这里 P_1, P_2, P_3, P_4 是 O_F 中的素理想.

证明 显然, $F = Q(\sqrt{d}, \sqrt{-1}) = Q(\sqrt{-d}, \sqrt{-1})$. 所以 $d \equiv \pm 1 \pmod{8}$ 时, 2 在 O_F 中的分解相同. 显然, 我们有 2 在 O_F 中分歧.

当 $d \equiv 1 \pmod{8}$ 时, 2 在 $Q(\sqrt{d})$ 中分裂, 从而 $2O_F = P_1^2 P_2^2$;

当 $d \equiv 2 \pmod{8}$ 时, 2 在 $Q(\sqrt{-d})$ 中惯性, 从而 $2O_F = P_4^2$;

当 $d \equiv 3 \pmod{8}$ 时, 分解域 $F_D = Q$. 设 $F \supseteq E \supseteq Q$ 为惯性域. 当 $E \neq Q$ 时, 2 在 E 中总分歧, 故 $E = Q$, 从而 $2O_F = P_3^4$.

定理 设 $F = Q(\sqrt{d}, \sqrt{-1})$, $\pm 3 \neq d \in \mathbf{Z}$ 无平方因子. 则

当 $d \equiv 1 \pmod{8}$ 时, $K_2 O_F / W(F) \simeq \begin{cases} \mathbf{Z}/4\mathbf{Z} \oplus \mathbf{Z}/3\mathbf{Z} & \text{若 } 3 \nmid d, \\ \mathbf{Z}/4\mathbf{Z} & \text{若 } 3 \mid d; \end{cases}$

当 $d \not\equiv 1 \pmod{8}$ 时, $K_2 O_F / W(F) \simeq \begin{cases} \mathbf{Z}/3\mathbf{Z} & \text{若 } 3 \nmid d, \\ \{0\} & \text{若 } 3 \mid d; \end{cases}$

当 $F = Q(\sqrt{-3}, \sqrt{-1})$ 时, $K_2 O_F / W(F) \simeq \mathbf{Z}/4\mathbf{Z}$.

证明 当 $3 \nmid d$ 时, $9 \nmid d$. 所以 $d \equiv \pm 3 \pmod{9}$. 此时 $3O_F = P^2$, P 为 O_F 中素理想, 这样 $NP = 9$. 我们证明 $m_P = 24$. 事实上 $3 \parallel \# m_P$, $8 \mid \# m_P$. 故只须证 $16 \nmid \# m_P$. 由于 16 是 $\mathbf{Z}_3$ 中的单位, 所以 Q_3 添加 16 次单位根所得扩域是非分歧的^[3]. 又由于 $x^8 + 1 \equiv (x^4 + x^2 - 1)(x^4 - x^2 - 1) \pmod{3}$ 为素分解, 故若 $16 \nmid \# m_P$, 则 F_P 是 Q_3 的非分歧扩域, 与 3 在 F_P 中分歧矛盾.

由文献 4 知 $K_2O_F/W(F)$ 由满足下列条件的生成元生成：

当 $\zeta_p \in F_p(P \mid p)$ 时 g_p ；当 P 为实除子时 $g_P^2 = 1$ ；当 P 为有限素除子时 $g_P^{\#m_P/NP-1} = 1$ ；

$\prod_{P \text{ 实}} g_P \prod_{P \text{ 有限}, \zeta_p \in F} g_P^{\#m_P/m} = 1 (P \mid p)$ 这里 m 是 F 中的单位根数。当 $F = Q(\sqrt{d}, \sqrt{-1})$ 时 F 中无实除子。

显然 $\zeta_3 \notin F$ 故 $K_2O_F/W(F)$ 的 3 部分为：当 $3 \mid d$ 时是 $\mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$ ；当 $3 \nmid d$ 时是 $\{0\}$ 。下面考虑 2 部分。

当 $d \equiv \pm 1 \pmod{8}$ 时 $2O_F = P_1^2 P_2^2, \#m_{P_1} = \#m_{P_2} = 4, NP_1 = NP_2 = 2$ 。我们有 $g_{P_1}^4 = g_{P_2}^4 = 1, g_{P_1} \cdot g_{P_2} = 1$ ，从

而 $K_2O_F/W(F)$ 的 2 部分为 $\mathbb{Z}/4\mathbb{Z}$ 。

当 $d \equiv \pm 5 \pmod{8}$ 时 $2O_F = P_3^4, NP_3 = 2, \#m_{P_3} = 12$ ，从而 $g_{P_3}^4 = 1, g_{P_3}^3 = 1$ ；

当 $d \equiv \pm 3 \pmod{8}$ 时 $2O_F = P_4^2, NP_4 = 4, \#m_{P_4} = 12$ ，从而 $g_{P_4}^4 = 1, g_{P_4} = 1$ 。

这样 $d \not\equiv \pm 1 \pmod{8}$ 的情形 $K_2O_F/W(F)$ 无 2 部分。

当 $F = Q(\sqrt{-3}, \sqrt{-1})$ 时 $2O_F = P^2, NP = 4, \#m_P = 12, 3O_F = Q^2, NQ = 9, \#m_Q = 24, m = 12$ 。故 $K_2O_F/W(F)$ 的生成元为 g_P, g_Q 满足： $g_P^4 = 1, g_Q^3 = 1$ 且 $g_P \cdot g_Q^2 = 1$ ，从而 $K_2O_F/W(F) \cong \mathbb{Z}/4\mathbb{Z}$ 。证毕。

参 考 文 献

1 Qin H. The 2-Sylow subgroups of the tame kernel of imaginary quadratic fields. Acta Arith, 1995, 69 :153 ~ 169
2 Qin H. The 4-rank of K_2O_F for real quadratic fields F. Acta Arith, 1995, 72 :323 ~ 333
3 O'Meara O.T. Introduction to quadratic forms. Springer, Berlin :1963
4 Browkin J. The functor K_2 for the ring of integers of a number field. Banach Center Publications, 1982, 9 :187 ~ 195

The Tame Kernel and Wild Kernel of Biquadratic Fields

Sun Ailing

(Department of Mathematics , China Pharmaceutical University ,Nanjing 210009)

Abstract Let $F = Q(\sqrt{d}, \sqrt{-1})$ be a biquadratic field, K_2O_F and $W(F)$ are the Tame kernel and Wild kernel of F respectively. The structure of $K_2O_F/W(F)$ is determined.

Key words Tame kernel ;Wild kernel ;prime ;idealization