

拟微分方程边值问题的局部可解性 *

周继东 董祖引

(河海大学数学物理系 南京 210098)

摘 要 利用微局部分析的工具,讨论了含两个变量的拟微分方程边值问题的局部可解性.通过构造渐近解的方法,给出了上述问题局部可解的微局部形式的必要条件.

关键词 拟微分方程 边值问题 局部可解性 Dirichlet 组 超覆盖

中图号 O175.8

在偏微分方程的理论研究中,一个基本的问题就是方程

$$P(x, D)u = f \quad (1)$$

当右端项 f 具有一定的正则性时(例如 C^∞), (1) 是否总是(至少局部地)可解? 对此问题, H. Lewy^[1] 于 1957 年给出了一个著名的反例. 此后, 人们对(1)的局部可解的必要条件和充分条件作了深入的研究. 70 年代初, L. Nirenberg 和 F. Treves 等人^[2] 还对具 C^∞ 系数的主型偏微分算子得到局部可解的充分条件和必要条件^[2]. 另一方面, 对线性偏微分方程 Cauchy 问题的局部可解性也有了比较完美的结果^[3,4]. 文[5] 首先研究了线性偏微分方程一般边值问题的局部可解性, 得到了局部可解的必要条件. 本文将这一结果推广到具两个自变量的拟微分方程的情形. 其中所有的拟微分算子都假定是经典恰当支的.

1 预 备 知 识

设 X 是 (t_0, x_0) 的一个邻域, 记 $X_+ = \{(t, x) \in X \mid t > t_0\}$, $X_0 = \{(t, x) \in X \mid t = t_0\}$, 我们现讨论拟微分方程边值问题

$$\begin{cases} Pu = f & \text{在 } X_+ \text{ 中} \\ B_j u = g_j & j = 1, 2, \dots, l \quad \text{在 } X_0 \text{ 上} \end{cases} \quad (2)$$

在点 (t_0, x_0) 局部可解的必要条件.

首先, 关于 $P, B_j (1 \leq j \leq l, l \leq m)$ 作如下假设: P 是 m 阶拟微分算子, B_j 为 m_j 阶拟微分算子, 且 $m_i \neq m_j (i \neq j)$, $0 \leq m_j \leq m-1 (j = 1, 2, \dots, l)$, X_0 关于 P, B_j 非特征, 所以

$$P(t, x, D_t, D_x) = D_t^m + \sum_{j=0}^{m-1} A_{m-j}(t, x, D_x) D_t^j$$

其中 $A_{m-j}(t, x, D_x) \in BL^{m-j}$, 其主象征 $a_{m-j}^0(t, x, \xi)$ 关于 $\xi \in R^1 \setminus \{0\}$ 齐 $m-j$ 次. 记 $P(t, x, D_t, D_x)$ 的主象征为 $p(t, x, \tau, \xi)$, 则 $p(t, x, \tau, \xi) = \tau^m + a_{m-j}^0(t, x, \xi) \tau^j$. 对任一 $\xi \in R^1 \setminus \{0\}$, 设方程 $p(t, x, \tau, \xi) = 0$ 关于 τ 有 e_1 个具负虚部的复根 $\tau_1(t, x, \xi), \dots, \tau_{e_1}(t, x, \xi)$, e_2 个具正虚部的复根 $\tau_{e_1+1}(t, x, \xi), \dots, \tau_{e_1+e_2}(t, x, \xi)$, $m - e_1 - e_2$ 个实根 $\tau_{e_1+e_2+1}(t, x, \xi), \dots, \tau_m(t, x, \xi)$, $p(t, x, \tau, \xi) = p_- p_+ p_h$. 其中 $p_- = \prod_{j=1}^{e_1} (\tau - \tau_j(t, x, \xi))$, $p_+ = \prod_{j=e_1+1}^{e_1+e_2} (\tau - \tau_j(t, x, \xi))$, $p_h = \prod_{j=e_1+e_2+1}^m (\tau - \tau_j(t, x, \xi))$.

$$B_j(x, D_t, D_x) = D_t^{m_j} + \sum_{k=0}^{m_j-1} B_{m_j-k}^j(x, D_x) D_t^k \quad j = 1, 2, \dots, l$$

其中算子 $B_{m_j-k}^j \in BL^{m_j-k}$, 其主象征 $b_{m_j-k}^j$ 关于 $\xi \in R^1 \setminus \{0\}$ 齐 m_j-k 次.

收稿日期: 1998-01-08

第一作者简介: 周继东, 男, 讲师, 基础数学专业, 主要从事基础数学的教学与研究.

* 河海大学科学基金资助项目.

定义 1 若存在 (t_0, x_0) 的一个邻域 Y , 使得对任意 $f \in \dot{C}^\infty(\overline{X}_+)$, $(g_1, g_2, \dots, g_l) \in (C^\infty(X_0))^l$, 存在 $u \in \overline{D}'(Y \cap X_+)$, 成立

$$\begin{cases} Pu = f \\ B_j u = g_j \end{cases} \quad \begin{array}{l} \text{在 } Y \cap X_+ \text{ 中} \\ \text{在 } Y \cap X_0 \text{ 上} \end{array} \quad 1 \leq j \leq l$$

则称 (2), (3) 在点 (t_0, x_0) 是局部可解的.

引理 1 对任一 $u \in \overline{D}'(X_+)$ 和 $v \in \overline{C}_c(X_+)$, 可以找到 $B_{l+1}, \dots, B_m$ 使 $\{B_j(x, D_t, D_x)\}_{j=1}^m$ 成为一 m 阶 Dirichlet 组, 并可找到另一 m 阶 Dirichlet 组 $\{B'_j(x, D_t, D_x)\}_{j=1}^m$ 使得

$$\int_{X_+} Pu \cdot \overline{v} dx dt = \int_{X_+} u \cdot \overline{P^* v} dx dt - i \sum_{j=1}^m \int_{X_0} B_j u \cdot \overline{B'_j v} dx \quad (4)$$

这里 P^* 是 P 的伴随算子.

定义 2 设 $r(t)$ 为 m 阶多项式, $\{p_j(t)\}_{j=1}^k$ 为 t 的一组多项式, 若 $k > m$, 且从 $\{p_j(t)\}_{j=1}^k$ 中能选出 m 个多项式模 $r(t)$ 线性无关, 则称 $\{p_j(t)\}_{j=1}^k$ 超覆盖 $r(t)$; 若 $k = m$, 且 $\{p_j(t)\}_{j=1}^k$ 模 $r(t)$ 线性无关, 则称 $\{p_j(t)\}_{j=1}^k$ 覆盖 $r(t)$.

引理 2 a. 设 $l > m - e_1$, 若 $B_1, B_2, \dots, B_l$ 的主象征 $\overset{0}{b}_1, \overset{0}{b}_2, \dots, \overset{0}{b}_l$ 构成 p_{-p_h} 的超覆盖, 则由 (4) 式所导出的算子 $B'_{l+1}, B'_{l+2}, \dots, B'_m$ 的主象征 $\overset{0}{b}'_{l+1}, \overset{0}{b}'_{l+2}, \dots, \overset{0}{b}'_m$ 模 p_{-} 线性无关.

b. 设 $l = m - e_1$, 则 $\overset{0}{b}_1, \overset{0}{b}_2, \dots, \overset{0}{b}_{m+e_1}$ 覆盖 p_{+p_h} 的充要条件为 $\overset{0}{b}'_{m-e_1+1}, \overset{0}{b}'_{m-e_1+2}, \dots, \overset{0}{b}'_m$ 覆盖 p_{-} .

证明: a. 不妨设 $(t_0, x_0) = (0, 0)$, 且 $\overset{0}{b}_1, \overset{0}{b}_2, \dots, \overset{0}{b}_{m-e_1}$ 模 p_{+p_h} 线性无关. 以下分三步来证.

第一步 公式 (4) 的变形.

在 (4) 中分别以 $u(\lambda t, \lambda x), v(\lambda t, \lambda x)$ 代替 $u(t, x), v(t, x)$, 这里 $\lambda > 1$, 令 $\lambda \rightarrow \infty$, 注意到此时 $v(\lambda t, \lambda x) \in \overline{C}_c(X_+)$, 可得

$$\int_{R^2_+} p(0, 0, D_t, D_x) u \overline{v} dx dt - \int_{R^2_+} u \overline{p^*(0, 0, D_t, D_x) v} dx dt = -i \sum_{j=1}^m \int_{X_0} \overset{0}{B}_j(0, D_t, D_x) u \overline{\overset{0}{B}'_j(0, D_t, D_x) v} dx$$

其中 $p(0, 0, D_t, D_x), p^*(0, 0, D_t, D_x), \overset{0}{B}_j(0, D_t, D_x), \overset{0}{B}'_j(0, D_t, D_x)$ 分别是算子 $P(0, 0, D_t, D_x), P^*(0, 0, D_t, D_x), B_j(0, D_t, D_x), B'_j(0, D_t, D_x)$ 的主部.

对任一固定的 $\xi \in R^1 \setminus \{0\}$, 取 $u(t, x) = e^{i\xi x} \psi(\mu x) g(t), v(t, x) = e^{i\xi x} \psi(\mu x) h(t)$, 其中 $g(t), h(t) \in D(R)$ 待定, μ 为正实数, 则

$$\begin{aligned} & [\int_0^{+\infty} p(0, 0, D_t, \xi) g(t) \overline{h(t)} dt - \int_0^{+\infty} g(t) \overline{p^*(0, 0, D_t, \xi) h(t)} dt] \cdot \int_{R^1} |\psi(x)|^2 dx = \\ & -i \sum_{j=1}^m \overset{0}{B}_j(0, D_t, \xi) g(t) \cdot \overline{\overset{0}{B}'_j(0, D_t, \xi) h(t)} \Big|_{t=0} \cdot \int_{R^1} |\psi(x)|^2 dx + o(\mu) \end{aligned}$$

令 $\mu \rightarrow 0$, 可得

$$\begin{aligned} & \int_0^{+\infty} p(0, 0, D_t, \xi) g(t) \overline{h(t)} dt - \int_0^{+\infty} g(t) \overline{p^*(0, 0, D_t, \xi) h(t)} dt = \\ & -i \sum_{j=1}^m \overset{0}{B}_j(0, D_t, \xi) \cdot \overline{\overset{0}{B}'_j(0, D_t, \xi) h(t)} \Big|_{t=0} \end{aligned} \quad (5)$$

当 $g(t), h(t) \in C^\infty([0, \infty))$, 且其中有一在无穷远处急减, 另一在无穷远处缓增时, (5) 式也对.

第二步 对 (5) 中的 $g(t), h(t)$ 加以适当选取.

取 $h(t)$ 为

$$\begin{cases} p^*(0, 0, D_t, \xi) h(t) = 0 \end{cases} \quad (6)$$

$$\begin{cases} \overset{0}{B}'_j(0, D_t, \xi) h(t) \Big|_{t=0} = 0 \end{cases} \quad m - e_1 + 1 \leq j \leq m \quad (7)$$

在无穷远处急减的 $C^\infty([0, \infty))$ 的解;

取 $g(t)$ 为

$$\begin{cases} p(0, 0, D_t, \xi) g(t) = h(t) \end{cases} \quad (8)$$

$$\begin{cases} \overset{0}{B}_j(0, D_t, \xi) g(t) \Big|_{t=0} = 0 \end{cases} \quad 1 \leq j \leq m - e_1 \quad (9)$$

在无穷远处缓增的解. 将所取的 $g(t), h(t)$ 代入式(5)可得 $\int_0^{+\infty} |h(t)|^2 dt = 0$, 即 $h(t) = 0$. 这就证明了(6), (7)在无穷远处急减的 $C^\infty([0, \infty))$ 解只能是零解.

第三步 证明 $\{b'_j\}_{j=m-e_1+1}^m$ 模 $p_- = (p^*)_+$ 线性无关.

若不然, 从 $\{b'_j\}_{j=m-e_1+1}^m$ 中换去几个后得到的 $\{b''_j\}_{j=m-e_1+1}^m$ 模 $(p^*)_+$ 线性无关. 不妨设 b''_m 是换进来的一个, 则由 $B''_j h(t) = 0 (j = m - e_1 + 1, \dots, m - 1)$ 和 $p^*_+ h(t)|_{t=0} = 0$ 可得 $B'_j h(t)|_{t=0} = 0 (j = m - e_1 + 1, \dots, m)$.

现在来求解问题:

$$\begin{cases} p^*_+(0, 0, D_t, \xi) h(t) = 0 \end{cases} \quad (10)$$

$$\begin{cases} B''_j(0, D_t, \xi) h(t)|_{t=0} = 0 \quad j = m - e_1 + 1, \dots, m - 1 \end{cases} \quad (11)$$

$$\begin{cases} B''_m(0, D_t, \xi) h(t)|_{t=0} = 1 \end{cases} \quad (12)$$

显然(10) ~ (12)有一非零的在无穷远处急减的 $C^\infty([0, \infty))$ 解. 注意到此解也满足(6), (7), 这就导出了矛盾, 所以 $\{b'_j\}_{j=m-e_1+1}^m$ 模 p_- 线性无关. 由于 $l > m - e_1$, 所以 $\{b'_j\}_{j=l+1}^m$ 模 p_- 线性无关.

b. 可与 a. 一样证明.

引理3 设 m 阶多项式 $p(t)$ 有根 $t_1, t_2, \dots, t_d$, 重数分别为 $s_1, s_2, \dots, s_d$, $\sum_{i=1}^d s_i = m$, 又设多项式组

$$\{q_j(t)\}_{j=1}^l (l \leq m) \text{ 模 } p(t) \text{ 线性无关, 则矩阵 } q = \begin{bmatrix} q_1(t_1) \cdots q_1^{(s_1-1)}(t_1) \cdots q_1(t_d) \cdots q_1^{(s_d-1)}(t_d) \\ q_2(t_1) \cdots q_2^{(s_1-1)}(t_1) \cdots q_2(t_d) \cdots q_2^{(s_d-1)}(t_d) \\ \vdots \\ q_l(t_1) \cdots q_l^{(s_1-1)}(t_1) \cdots q_l(t_d) \cdots q_l^{(s_d-1)}(t_d) \end{bmatrix} \text{ 的秩为 } l.$$

引理4 若(2), (3)在 (t_0, x_0) 局部可解, 则对任一 $\phi \in C_c^\infty(K) (K \subset \subset Y)$, 存在常数 C, q 使得

$$|\int_{X_+} f \bar{\psi} dx dt| \leq C \sum_{|\alpha| \leq q} \sup_{t > t_0} |D^\alpha f| \cdot \left(\sum_{|\beta| \leq q} \sup_{t > t_0} |D^\beta P^* \phi| + \sup_{t=t_0} \sum_{j=l+1}^m |D_x^\beta B'_j \phi| \right) \quad (13)$$

2 主要结果

定理 a. $l > m - e_1$, (2), (3)在 (t_0, x_0) 局部可解的必要条件是: 对任一 $\xi \in R^1 \setminus \{0\}$, $\{b_j\}_{j=1}^l$ 不能超覆盖 $p_+ p_h$.

b. $l = m - e_1$, (2), (3)在 (t_0, x_0) 局部可解的必要条件是: 对任一 $\xi \in R^1 \setminus \{0\}$, $\{b_j\}_{j=1}^l$ 不能覆盖 $p_+ p_h$.

证明 a. 用反证法. 说明当 $\{b_j\}_{j=1}^l$ 超覆盖 $p_+ p_h$ 时, 式(13)不总成立.

首先, 通过一坐标变换可使 $(t_0, x_0) = (0, 0)$, $\xi > 0$, 这样,

$$p(0, 0, \tau, \xi) = \tau^m + \sum_{j=0}^{m-1} a_{m-j}^0(0, 0, \xi) \tau^j = \prod_{k=1}^{e_1} (\tau - \tau_k \xi) Q(\tau, \xi)$$

其中 $\text{Im} \tau_k < 0, 1 \leq k \leq e_1$, $Q(\tau, \xi)$ 为关于 τ 的 $m - e_1$ 次多项式, $Q(\tau, \xi)$ 关于 τ, ξ 齐 $m - e_1$ 次, 且 $Q(\tau_k, 1) \neq 0$. 下面利用构造渐近解^[6]的方法来说明. 对于所构造的渐近解, 式(13)对任意的 C, q 都不成立.

作变量代换 $t \rho^v \rightarrow t, x \rho^v \rightarrow x$, 这里 v 为一适当大的正整数, ρ 为一大参数, 记

$$p_\rho^*(t, x, D_t, D_x) = p^*\left(\frac{t}{\rho^v}, \frac{x}{\rho^v}, \rho^v D_t, \rho^v D_x\right)$$

$$B'_{j\rho}(x, D_t, D_x) = B'_j\left(\frac{x}{\rho^v}, \rho^v D_t, \rho^v D_x\right) \quad j = l+1, \dots, m$$

由(13)可得

$$|(f, \psi)| \leq C \rho^\mu \sum_{|\alpha| \leq q} \sup_{t > 0} |D^\alpha f| \cdot \left(\sum_{|\beta| \leq q} \sup_{t > 0} |D^\beta P_\rho^* \psi| + \sup_{t=0} \sum_{j=l+1}^m |D_x^\beta B'_{j\rho} \psi| \right) \quad (14)$$

对任一 $\phi \in C_c^\infty(M)$ 成立, 其中 M 为一固定紧集, $\mu = v(2 + 2q)$. 设 p_- 的两两互异根为 $\tau_1, \tau_2, \dots, \tau_d$, 重数分

别为 $s_1, s_2, \cdots, s_d$, 这里 $\sum_{j=1}^d s_j = e_1$, 作

$$\psi_k(t, x) = 2(\overline{\tau_k}t + x) + i(\overline{\tau_k}t + x)^2 \quad k = 1, 2, \cdots, d$$

它满足 : (a) $(D_t - \overline{\tau_k}D_x)\psi_k = 0$; (b) 对适当的 $\delta, c > 0$, 当 $t \geq 0, \sqrt{t^2 + x^2} < \delta$ 时, $\text{Im}\psi_k(t, x) \geq c(t^2 + x^2)$; (c) 当 $t = 0$ 时, 所有的 $\psi_k(t, x)$ 相等.

下面构造如下形式的渐近解 $\psi_\rho = \sum_{j=0}^J \sum_{k=1}^d V_{kj}(t, x) e^{i\rho\psi_k(t, x)} \rho^{-j}$. 其中 J 充分大, $V_{kj}(t, x)$ 待定. 此解将使 (14) 不能成立.

由于 $\rho \rightarrow \infty$ 时, $\rho^{-mv} P_\rho^*(t, x, D_t, D_x) = D_t^m + \sum_{j=0}^{m-1} A_{m-j}^*(0, 0, D_x) D_t^j + o(\rho^{-v}) =$

$$\prod_{k=1}^d (D_t - \overline{\tau_k}D_x)^{s_k} \overline{Q}(D_t, D_x) + o(\rho^{-v})$$

$\rho^{-kv_j} B'_{j\rho}(x, D_t, D_x) = B'_j(x, D_t, D_x) + o(\rho^{-v}), l+1 \leq j \leq m$ (k_j 为 B'_j 的阶数)

令 $P_\rho^* \psi_\rho$ 及 $B'_{j\rho} \psi_\rho|_{t=0}$ 中 ρ 的同次幂项之和为 0, 并注意到 $\{e^{-i\rho\psi_k(t, x)}\}_{k=1}^d$ 是一线性无关组, 可得

$$\alpha_k(D_k - \overline{\tau_k}D_x)^{s_k} V_{kj}(t, x) = F_{kj}(V_{k,0}, \cdots, V_{k,j-1}) \tag{15}$$

$$\sum_{k=1}^d \sum_{r=0}^{s_k-1} \frac{1}{r!} (a_\epsilon^0 b_h^r)_{(\overline{\tau_k}, 1)} \partial_t^r V_{k,j-1} = G_{hj} \quad l+1 \leq h \leq m \tag{16}$$

其中 $\alpha_k = \prod_{j=1}^d (D_t - \overline{\tau_j}D_x)^{s_j} \overline{Q}(D_t, D_x) \psi_k(t, x) \neq 0, F_{k0} = G_{h0} = 0, F_{kj}$ 和 G_{hj} 是其变元及其导数的线性函数, 其表达式可递推求出. 由反证假设及引理 2 的 a 知 $\{b_h^r\}_{h=l+1}^m$ 模 p 线性无关且又由引理 3 知式 (16) 右端系数矩阵的秩为 $m-l < e_1$, 从而对任一 j , 存在非零向量 $(V_{1j}(0, x), \cdots, \frac{\partial^{s_1-1}}{\partial t^{s_1-1}} V_{1j}(0, x), \cdots, V_{dj}(0, x), \cdots, \frac{\partial^{s_d-1}}{\partial t^{s_d-1}} V_{dj}(0, x))$ 满足 (16). 对每一 j , 将上述数据取为初值在 $t > 0$ 中求解 (15) 即可求出 V_{kj} , 从而非平凡解 ψ_ρ 可以作出. 此时式 (14) 右端可以任意小 (当 J 充分大, $\rho \rightarrow \infty$ 时), 这样式 (14) 对任意的常数 C, q 都不能成立. 证毕.

b. 同 a 一样证明.
注 本文所用的方法对于拟微分方程组的情形也是有效的.

参 考 文 献

1 Lewy H. An example of a smooth linear partial differential equation without solution. *Ann of Math*, 1957, 66(2) :155 ~ 158

2 Nirenberg L, Treves F. On local solvability of linear partial differential equations. I. Necessary conditions. II . Sufficient conditions. *Comm Pure Appl Math*, 1970, 23 :1 ~ 38, 459 ~ 509

3 Ivrii V Ia, Petkov V M. Necessary conditions for the correctness of the Cauchy problem for non-strictly hyperbolic equations. *Uspehi Math Nauk*, 1974, 29 :3 ~ 70

4 Mizohata S. Some remarks on the Cauchy problem. *J Math Kyoto Univ*, 1961, 1 :109 ~ 127

5 陈恕行. 线性偏微分方程边值问题局部可解的必要条件. *科学通报*, 1987, 32(5) :328 ~ 331

6 Lax P D. Asymptotic solutions of oscillatory initial value problems. *Duke Math J*, 1957, 24 :627 ~ 646

On Local Solvability of Boundary Value Problem of
Pseudo-Differential Equation

Zhou Jidong Dong Zuyin

(Dept. of Mathematics and Physics, Hohai Univ., Nanjing 210098)

Abstract In this paper, through construction of an asymptotic solution, We give a necessary condition of the micro local form to local solvability of boundary value problem of pseudo differential equation with two variables.

Key words pseudo-differential equation ; boundary value problem ; local solvability ; Dirichlet system ; supercover