

模糊一致矩阵在 多层次、多因素决策方案优选中的应用

黄健元

(河海大学数学物理系 南京 210098)

摘 要 主要是在模糊一致矩阵有关概念和运算性质的基础上 ,提出了多层次、多因素决策方案优选的实施方案 .由于若干决策方案的优选问题往往牵涉到很多因素 ,因素之间通常又具有不同的层次 ,故本文所提出的方法比单层次的方法更具实用性 .由于本方法是利用所谓的优先关系系数来描述方案间的优劣 ,从而可以避免模糊综合评判方法中隶属度的确定问题 ,故当定性评价因素较多、隶属函数的建立较难把握时 ,本法有其方便、实用之处 .文中还对水运项目若干方案进行了优选 ,取得了理想的结果 .

关键词 模糊一致矩阵 ;多层次 ;优选

中图号 O232

文 [1]介绍了有关模糊一致矩阵的概念和运算性质 ,由于模糊一致矩阵的中分传递性符合人们决策思维过程中的心理特点 ,因而能在决策分析中得到有效的应用 .

在现实中 ,由于决策方案的优选 (如水运投资项目若干方案的优选等)往往牵涉到很多因素 ,而因素之间通常还有不同的类别和层次 ,是一个复杂的大系统问题 ,因而利用传统的动态规划等方法难以解决的 .

本文在文 [1]的基础上 ,建立了多层次、多因素决策方案优选的具体方法 ,并将它应用于水运投资项目若干方案的优选 .

1 模糊一致矩阵的概念及有关运算性质

所谓模糊一致矩阵 $R=(r_{ij})_{n \times n}$ 是指 对 $\forall i,j=1,2,\dots,n$ 均有

$$r_{ij} = r_{il} + r_{jl} - 0.5 \quad i,j=1,2,\dots,n$$

文 [1]中虽已详细阐述了模糊一致矩阵的中分传递性以及其它一些性质 ,但考虑到模糊矩阵作为一种特殊的模糊关系的合成运算 ,已在模糊数学的理论中作出了严格的定义 ,故本文将以下运算称为模糊矩阵的综合 .

定义 1 设有 m 个模糊矩阵 $R^k=(r_{ij}^k)_{n \times n} (k=1,2,\dots,m)$ 取 $r_{ij} = \sum_{k=1}^m \omega_k \cdot r_{ij}^k$ 其中 $\sum_{k=1}^m \omega_k = 1$,则称 $R=(r_{ij})_{n \times n}$ 为 m 个矩阵 R^k 的综合 ,记为 $R=R^1 \oplus R^2 \oplus \dots \oplus R^m$.

模糊一致矩阵作为一类特殊的模糊矩阵 ,具有以下结论 :

定理 1 m 个模糊一致矩阵 $R^k=(r_{ij}^k)_{n \times n} (k=1,2,\dots,m)$ 的综合 R 仍然是模糊一致矩阵 .

其意义在于 :它可以将多因素 (或多个分系统)的决策结果 ,即多个模糊一致矩阵有效地综合起来 ,从而形成模型一致的综合决策矩阵 .这正是建立以下多层次、多因素决策方案优选方法的理论基础 .

2 多层次、多因素决策方案优选方法

2.1 多因素决策方案优选方法

设已拟定了 n 个决策方案 $A_i (i=1,2,\dots,n)$ 构成优选方案集 ,又有 m 个因素 $u_k (k=1,2,\dots,m)$ 构成因

素集,各因素相应的权重为 $\omega_k(k = 1, 2, \dots, m)$,且满足 $\sum_{k=1}^m \omega_k = 1$,则基于模糊一致矩阵的多因素决策方案优选过程如下:

a. 建立优先关系矩阵

考虑到这是 n 个方案在 m 个因素下的优选问题,故可以建立 m 个单因素模糊优先关系矩阵 $B_k = (b_{ij}^k)_{n \times n} (k = 1, 2, \dots, m)$,其中 b_{ij}^k 称为在因素 u_k 下, A_i 对 A_j 的优先关系系数,其值为:

$$b_{ij}^k = \begin{cases} 0 & \text{如果在因素 } u_k \text{ 下, } A_j \text{ 优于 } A_i \\ 0.5 & \text{如果在因素 } u_k \text{ 下, } A_i \text{ 与 } A_j \text{ 等优} \\ 1 & \text{如果在因素 } u_k \text{ 下, } A_i \text{ 优于 } A_j \end{cases}$$

b. 将 $B_k(k = 1, 2, \dots, m)$ 改造成矩阵

$$R_k = (r_{ij}^k)_{n \times n}$$

其中: $r_{ij}^k = \frac{r_i^k - r_j^k}{2n} + 0.5$; $r_i^k = \sum_{l=1}^n b_{il}^k$.

因为,对 $\forall l = 1, 2, \dots, n$,

$$r_{il}^k - r_{jl}^k + 0.5 = \frac{r_i^k - r_l^k}{2n} + 0.5 - (\frac{r_j^k - r_l^k}{2n} + 0.5) + 0.5 = \frac{r_i^k - r_j^k}{2n} + 0.5 = r_{ij}^k$$

故经过改造得到的 $R_k(k = 1, 2, \dots, m)$ 为模糊一致矩阵.

c. 单因素计算优度值

运用方根法计算方案 A_i 在因素 u_k 下的优度值 s_i^k ,

$$s_i^k = \frac{\bar{s}_i}{\sum_{l=1}^n s_l}$$

其中 $\bar{s}_i = (\prod_{l=1}^n r_{il}^k)^{\frac{1}{n}}$.

d. 多因素排序

计算各方案的综合优度值 S_i :

$$S_i = \sum_{k=1}^m \omega_k \cdot s_i^k \quad i = 1, 2, \dots, n$$

按 $S_i(i = 1, 2, \dots, n)$ 由大到小可得到 n 个方案在综合 m 个因素影响下的优劣次序.

2.2 多层次、多因素决策方案优选方法

在实际进行若干决策方案优选时,由于牵涉到很多因素,因素之间通常有不同的类别和层次,往往必须根据实际情况将各评价因素分成若干类.

根据系统可分性原理,将方案优选所需考虑的因素根据其属性分为若干个分系统,对每一分系统,根据多因素决策方案优选方法 2.1 分别得到各方案的优度值,然后在高一层上,视每一分系统为一因素将各方案优度值加以综合,从而可得到高一层上各方案的总体优度值,进而得出优劣次序.这便是两个层次、多因素决策方案优选方法的思想.

设有待优选的 n 个方案 $A_i(i = 1, 2, \dots, n)$,有 M 个因素构成优选因素集.按因素的不同属性,将 M 个因素分为 m 个分系统,每一分系统分别有 $m_1, m_2, \dots, m_m(m_i$ 同时也表示第 i 个分系统的因素集)个评价因素,满足

$$\begin{cases} M = \sum_{i=1}^m m_i \\ m_i \cap m_j = \emptyset \quad i \neq j \end{cases}$$

则基于模糊一致矩阵的两个层次、多因素决策方案优选过程如下:

a. 对第 k 个分系统,假设 m_k 个因素的权重分别为 $\omega_{k1}, \omega_{k2}, \dots, \omega_{km_k}$,满足 $\sum_{i=1}^{m_k} \omega_i = 1$,利用 2.1 的方法可

得到 n 个方案在第 k 个分系统下的综合优度值为 $_kS_i(i = 1 \ 2 \ \dots \ n ,k = 1 \ 2 \ \dots \ m)$;

b. 在高一层次上 ,假设 m 个分系统的权重分别为 $\omega_1 \ ,\omega_2 \ \dots \ ,\omega_m$,其中 $\sum_{i=1}^m \omega_i = 1$,视每一分系统为一因素 ,分别求出 n 个方案在高一层次上的总体优度值 T_i :

$$T_i = \sum_{k=1}^m \omega_k \cdot _kS_i \qquad i = 1 \ 2 \ \dots \ n$$

按 T_i 由大到小确定出 n 个方案的优劣次序 ,为决策方案优选提供理论依据.

对于具有两个层次结构以上的系统 ,可仿照类推 ,建立 3 个(或 3 个以上)层次、多因素的决策方案优选方法 ,将不会有实质性的困难.

3 应用实例

参照文[2],对水运投资项目若干方案的优选 ,通常可以从 13 个因素来进行评价 ,并将 13 个因素分为 4 个方面 ,即 4 个分系统 ,具体内容如表 1 所示.

现有申张线、苏申外港线、锡北线、苏申内港线、苏浏线、盐河、串场河等 7 个水运工程 ,各工程方案评价因素指标值如表 2 所示.

表 2 各方案评价因素指标值

Table 2 Evaluating Indicators for individual schemes

方 案	种 类												
	经济评价			技术评价		环境影响评价			社会评价				
	经济净现值率	敏感性分析	投资回收期/a	项目前期工作基础	建设标准(航道等级)	项目对环境影响的程度	项目对区域水运的影响/%	项目提高水运网的效率/%	项目区域对项目需求	项目水资源综合利用能力	项目类型	征地、拆迁规模 /%	项目对改善综合交通作用
申张线	0.570	较强	10	可行性	五级	很好影响	14.4	36.7	非常需求	一般	重点项目	6.1	较大
苏申外港线	0.435	一般	9	可行性	四级	好的影响	9.8	56.6	一般需求	较高	一般项目	10.3	一般
锡北线	1.414	较弱	11	可行性	五级	较好影响	7.6	55.4	需求	一般	一般项目	12.4	一般
苏申内港线	2.350	强	10	可行性	五级	好的影响	11.3	44.2	非常需求	很高	重点项目	3.5	很大
苏浏线	0.780	较强	6	可行性	五级	较好影响	3	29.7	较为需求	一般	一般项目	5.1	一般
盐河	0.510	一般	12	预可行性	四级	少量不良影响	5.4	14.5	非常需求	较低	维护项目	10.4	很大
串场河	0.465	一般	14	规划报告	五级	无不良影响	1.4	4.2	一般需求	一般	一般项目	5.2	较大

有些评价因素为越大越优型(如经济净现值率、项目水资源综合利用能力等) ,另外有些评价因素为越小越优型(如投资回收期及征地、拆迁规模等) ,在建立优先关系矩阵时 ,应注意区别对待.

以第一个分系统(即经济评价) 的 3 个评价指标为例 ,利用本文所述方法对上述 7 个工程项目方案进行优选 ,计算过程如下 :

a. 经济净现值率

按 2.1 中第 a 步方法建立优先关系矩阵

$$B_1^1 = \begin{bmatrix} 0.5 & 1.0 & 0.0 & 0.0 & 0.0 & 1.0 & 1.0 \\ 0.0 & 0.5 & 0.0 & 0.0 & 0.0 & 0.0 & 0.0 \\ 1.0 & 1.0 & 0.5 & 0.0 & 1.0 & 1.0 & 1.0 \\ 1.0 & 1.0 & 1.0 & 0.5 & 1.0 & 1.0 & 1.0 \\ 1.0 & 1.0 & 0.0 & 0.0 & 0.5 & 1.0 & 1.0 \\ 0.0 & 1.0 & 0.0 & 0.0 & 0.0 & 0.5 & 1.0 \\ 0.0 & 1.0 & 0.0 & 0.0 & 0.0 & 0.0 & 0.5 \end{bmatrix}$$

按 2.1 中第 b 步方法将 B_1^1 改造得模糊一致矩阵

$$R_1^1 = \begin{bmatrix} 0.500 & 0.714 & 0.357 & 0.286 & 0.429 & 0.571 & 0.643 \\ 0.286 & 0.500 & 0.143 & 0.071 & 0.214 & 0.357 & 0.429 \\ 0.643 & 0.857 & 0.500 & 0.429 & 0.571 & 0.714 & 0.786 \\ 0.714 & 0.929 & 0.571 & 0.500 & 0.643 & 0.786 & 0.857 \\ 0.571 & 0.786 & 0.429 & 0.357 & 0.500 & 0.643 & 0.714 \\ 0.429 & 0.643 & 0.286 & 0.214 & 0.357 & 0.500 & 0.571 \\ 0.357 & 0.571 & 0.214 & 0.143 & 0.286 & 0.429 & 0.500 \end{bmatrix}$$

按 2.1 中第 c 步方法计算单因素优度值得

$$s_1^1 = 0.144 \quad s_2^1 = 0.072 \quad s_3^1 = 0.188 \quad s_4^1 = 0.211 \quad s_5^1 = 0.166 \quad s_6^1 = 0.121 \quad s_7^1 = 0.098$$

b. 敏感性分析

优先关系矩阵为

$$B_2^2 = \begin{bmatrix} 0.5 & 1.0 & 1.0 & 0.0 & 0.5 & 1.0 & 1.0 \\ 0.0 & 0.5 & 1.0 & 0.0 & 0.0 & 0.5 & 0.5 \\ 0.0 & 0.0 & 0.5 & 0.0 & 0.0 & 0.0 & 0.0 \\ 1.0 & 1.0 & 1.0 & 0.5 & 1.0 & 1.0 & 1.0 \\ 0.5 & 1.0 & 1.0 & 0.0 & 0.5 & 1.0 & 1.0 \\ 0.0 & 0.5 & 1.0 & 0.0 & 0.0 & 0.5 & 0.5 \\ 0.0 & 0.5 & 1.0 & 0.0 & 0.0 & 0.5 & 0.5 \end{bmatrix}$$

改造得模糊一致矩阵

$$R_2^2 = \begin{bmatrix} 0.500 & 0.679 & 0.821 & 0.393 & 0.500 & 0.679 & 0.679 \\ 0.321 & 0.500 & 0.643 & 0.214 & 0.321 & 0.500 & 0.500 \\ 0.179 & 0.357 & 0.500 & 0.071 & 0.179 & 0.357 & 0.357 \\ 0.607 & 0.786 & 0.929 & 0.500 & 0.607 & 0.786 & 0.786 \\ 0.500 & 0.679 & 0.821 & 0.393 & 0.500 & 0.679 & 0.679 \\ 0.321 & 0.500 & 0.643 & 0.214 & 0.321 & 0.500 & 0.500 \\ 0.321 & 0.500 & 0.643 & 0.214 & 0.321 & 0.500 & 0.500 \end{bmatrix}$$

计算得各工程方案单因素优度值分别为

$$s_1^2 = 0.177 \quad s_2^2 = 0.121 \quad s_3^2 = 0.073 \quad s_4^2 = 0.210 \quad s_5^2 = 0.177 \quad s_6^2 = 0.121 \quad s_7^2 = 0.121$$

c. 投资回收期

优先关系矩阵为

$$B_3^3 = \begin{bmatrix} 0.5 & 0.0 & 1.0 & 0.5 & 0.0 & 1.0 & 1.0 \\ 1.0 & 0.5 & 1.0 & 1.0 & 0.0 & 1.0 & 1.0 \\ 0.0 & 0.0 & 0.5 & 0.0 & 0.0 & 1.0 & 1.0 \\ 0.5 & 0.0 & 1.0 & 0.5 & 0.0 & 1.0 & 1.0 \\ 1.0 & 1.0 & 1.0 & 1.0 & 0.5 & 1.0 & 1.0 \\ 0.0 & 0.0 & 0.0 & 0.0 & 0.0 & 0.5 & 1.0 \\ 0.0 & 0.0 & 0.0 & 0.0 & 0.0 & 0.0 & 0.5 \end{bmatrix}$$

改造得模糊一致矩阵

$$R_3^3 = \begin{bmatrix} 0.500 & 0.393 & 0.607 & 0.500 & 0.321 & 0.679 & 0.750 \\ 0.607 & 0.500 & 0.714 & 0.607 & 0.429 & 0.786 & 0.857 \\ 0.393 & 0.286 & 0.500 & 0.393 & 0.214 & 0.571 & 0.643 \\ 0.500 & 0.393 & 0.607 & 0.500 & 0.321 & 0.679 & 0.750 \\ 0.679 & 0.571 & 0.786 & 0.679 & 0.500 & 0.857 & 0.929 \\ 0.321 & 0.214 & 0.429 & 0.321 & 0.143 & 0.500 & 0.571 \\ 0.250 & 0.143 & 0.357 & 0.250 & 0.071 & 0.429 & 0.500 \end{bmatrix}$$

计算得各工程方案单因素优度值分别为

$$s_1^3 = 0.155 \quad s_2^3 = 0.188 \quad s_3^3 = 0.121 \quad s_4^3 = 0.155 \quad s_5^3 = 0.210 \quad s_6^3 = 0.098 \quad s_7^3 = 0.073$$

综合以上 3 个因素的单因素优度值 ,可得到第 1 个分系统的综合评价优度值 ,即经济评价指标优度值 (表 3).

表 3 各工程方案经济评价结果

Table 3 Economic evaluation results of individual projects

方案	经济净现值率优度值	敏感性分析优度值	投资回收期优度值	经济评价指标优度值
权重	0.50	0.30	0.20	
申张线	0.144	0.177	0.155	0.156
苏申外港线	0.072	0.121	0.188	0.110
锡北线	0.188	0.073	0.121	0.140
苏申内港线	0.211	0.210	0.155	0.200
苏浏线	0.166	0.177	0.210	0.178
盐河	0.121	0.121	0.098	0.116
串场河	0.098	0.121	0.073	0.100

类似地 ,可计算出其它 3 个分系统的优度值.限于篇幅 ,这 3 个分系统的具体计算过程省略.最后根据 2.2 中两个层次、多因素决策方案优选过程的第 b 步 ,计算出综合评价总体优度值 ,从而得出评价名次(表 4).

表 4 各工程方案评价结果

Table 4 Evaluation results of individual projects

工程名称	经济评价指标优度值	技术评价指标优度值	环境影响评价指标优度值	社会评价指标优度值	综合评价总体优度值	评价名次
申张线	0.156	0.138	0.209	0.167	0.161	2
苏申外港线	0.110	0.186	0.177	0.152	0.145	4
锡北线	0.140	0.138	0.133	0.136	0.138	5
苏申内港线	0.200	0.138	0.177	0.191	0.183	1
苏浏线	0.178	0.138	0.133	0.122	0.148	3
盐河	0.116	0.158	0.073	0.121	0.121	6
串场河	0.100	0.104	0.098	0.111	0.104	7

4 结 论

a. 本文在文[1]的基础上 ,将建立在模糊一致矩阵基础上的决策方案优选方法推广到了多层次的情况 ,使之更具实用性.

b. 文[2]中采用的是模糊综合评判的方法.该方法的好处是 ,通过建立恰当的隶属函数 ,把待优选的若干方案在每一个因素下的优劣一定程度上定量地描述出来.但在进行实际综合评判时 ,隶属函数的建立往往是十分困难的 ,并且不可避免地会融入较强的主观色彩.这一点从文[2]中隶属度的确定便可以看出.这是模糊综合评判方法的缺陷.而本文所介绍的方法只需根据 2.1a 中优先关系系数取值的规则 ,建立优先关系矩阵.通过优先关系系数把待优选的若干方案在每一个因素下的优劣定量地描述出来 ,从而避开了各个等级隶

属度的确定问题,因而具有操作上的方便之处;并且,由于模糊一致矩阵具有中分传递性,模糊一致矩阵的综合得到的仍然是模糊一致矩阵,这就保证了优选结果的合理性.但本文方法显然也有其不足之处,在某一因素下,两个方案之间的优先关系系数确实能够反映出两个方案之间的优劣,但对于定量指标优劣的差异程度却体现不出来.正是由于模糊综合评判方法和本文所述方法各有优点,同时又各有其缺陷,故对文[2]中的实例进行优选时,所得的结果并不完全一致(第3名的结果不一样,其它6个方案的优劣顺序一致).这不能简单地认为孰好孰坏,两种方法评价效果都有其合理性.事实上,方案的优选由于涉及到很多因素,因素之间往往又具有不同的层次,因而是十分复杂的.要找到一种理论上严谨,对任何类型的优选问题又都具有实用价值的方法并非易事.实用中,我们可以利用不同的方法分别进行优选,相互验证,尽可能地为决策部门提供切合实际的优选结果和咨询意见.

c. 特别要强调的是,在定性评价指标较多、隶属函数的建立主观色彩太浓或难以把握时,采用本文所介绍的方法有其优越性.

参 考 文 献

1 姚敏,张森.模糊一致矩阵及其在决策分析中的应用.系统工程理论与实践,1998(5):78~81
2 丰玮,周之豪.水运投资项目综合评价方法的研究.水运工程,1998(7):1~5

Application of Fuzzy Consistent Matrix to Multi-level and Multi-factor
Optimum Selection in Decision-making

Huang Jianyuan

(Dept. of Mathematics and Physics ,Hohai Univ. ,Nanjing 210098)

Abstract On the basis of the concept and the operation properties of fuzzy consistent matrix ,a multi-level and multi-factor optimum selection method for decision-making is established. This method is more practical than the single-level method because the optimum selection in decision-making is related to many factors ,and the factors are usually at different levels. The method describes the advantages and limitations of different schemes by use of prior relation coefficient. The determination of the Membership of Fuzzy Judgement method is not necessary. This method is convenient and practical when qualitative factors are many and the determination of membership is difficult. In this paper some schemes of investment projects for water transportation are selected by means of this method ,and satisfactory results have been obtained.

Key words fuzzy consistent matrix ;multi-level ;optimum selection