

用边界元法计算双曲线缺口圆柱的弯曲中心^{*}

汤昕燕

(南京农业大学农业工程学院 南京 210032)

摘 要 使用 Saint-Venant 弯曲理论及调和函数的基本解,将任意截面柱体的 Saint-Venant 弯曲问题归为解两个非耦合的以弯曲函数 $\Psi(x, y)$ 和扭转函数 $\varphi(x, y)$ 为未知函数的边界积分方程. 基于上述结果并通过对横截面上扭矩的计算,导出了用于计算柱体弯曲中心的理论公式. 可以指出,若横向力作用于弯曲中心,则柱体只产生单一的弯曲而无附加的扭转. 以双曲线缺口圆柱的 Saint-Venant 弯曲为例,通过对边界积分方程的离散,用边界元法对其作了计算,最后求得了柱体的扭转刚度、弯曲中心及应力分布等数值结果,其中有些结果与理论值符合很好.

关键词 边界元方法 Saint-Venant 弯曲 弯曲中心

中图分类号 O302

双曲线缺口圆柱的横截面 Ω 如图 1 所示,其中 R 为圆柱的半径, O 为圆心,边界 Γ 上的 $\widehat{ABC}$ 线段为双曲线缺口,它在 $O\xi\eta$ 直角坐标系中的方程为

$$\frac{\eta^2}{a^2} - \frac{\xi^2}{b^2} = 1 \quad (1)$$

其中参数 $a = \eta_B$, 决定了缺口的深度,参数 b 则决定了缺口张开口径 ξ_A 的大小,即 $b = a\xi_A/\sqrt{R^2 - a^2 - \xi_A^2}$. 图中 $\bar{C}$ 为双曲线缺口圆柱横截面 Ω 的形心,其上放置的直角坐标轴 $\bar{C}xy$ 为 Ω 的形心主轴,形心 $\bar{C}$ 与圆心 O 的距离为 Δ ,它由双曲线的参数 (a, b) 及圆柱半径 R 决定. 设图 1 圆柱的长度为 l ,它的一端用适当方式固定,另一端在形心 $\bar{C}$ 上沿形心主轴 $\bar{C}x$ 作用一横向力 P ,圆柱的侧面自由,由于 $\bar{C}$ 不是截面的弯曲中心,因而圆柱在横向力 P 作用下除产生弯曲外,还将引起附加扭转. 这种问题在弹性力学中称为 Saint-Venant (圣文南) 弯曲^[1]. 当缺口深度较大,但张开口径不是很大时(如缺口接近于一根深裂纹时),则图 1 圆柱截面 Ω 的形心与弯曲中心离得较远. 因而当 P 作用于形心时便会产生较大的附加扭转. 只有当作用于截面弯曲中心时才能消除附加的扭转,从而使柱体处于较安全的状态. 因而对于这类带缺口的柱体,寻找弯曲中心,以便将横向力移至该处,这是十分有意义的. 本文的目的是使用 Saint-Venant 弯曲理论^[1],然后使用边界元数值法,计算这类柱体的弯曲中心.

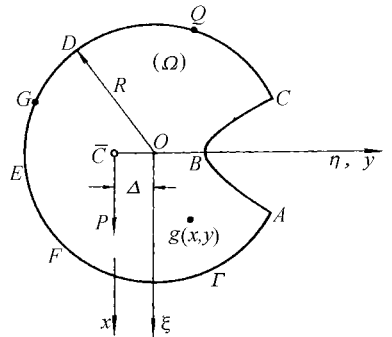


图 1 双曲线缺口圆柱
Fig. 1 Circular cylinder with a hyperbolic notch

1 弯 曲 中 心

对于图 1 柱体,若柱的左端适当固定,而其右端在截面 Ω 的形心 $\bar{C}$ 上沿形心主轴 $\bar{C}x$ 作用一横向力 P ,则由于 $\bar{C}$ 不是截面的弯曲中心,因而柱体除产生弯曲外,还要产生附加扭转,这种 Saint-Venant 弯曲问题在理论上早已解决^[1],此时任一 z 截面上各点 (x, y, z) 的剪应力 (τ_{zx}, τ_{zy}) 由以下公式计算:

$$\tau_{zx}(x, y, z) = -\frac{P}{2(1+\nu)I} \left[\frac{\partial \Psi}{\partial x} + \frac{1}{2} \nu x^2 + \left(1 - \frac{\nu}{2}\right) y^2 \right] + \alpha \mu \left(\frac{\partial \varphi}{\partial x} - y \right) \quad (2)$$

$$\tau_{zy}(x,y,z) = -\frac{P}{2(1+\nu)I}\left[\frac{\partial \Psi}{\partial y} + 2(1+\nu)xy\right] + \alpha\mu\left(\frac{\partial \varphi}{\partial y} + x\right) \tag{3}$$

式中： ν, μ ——柱体材料的泊松比及剪切弹性模量； I ——截面 Ω 绕 $\bar{C}_y$ 轴的惯性矩； $\Psi(x, y)$ 和 $\varphi(x, y)$ ——待求的弯曲函数和扭转函数； α ——柱体附加扭转的扭率，由以下公式决定：

$$\alpha = \frac{\mu P \int_{\Omega} \left[y \frac{\partial \Psi}{\partial x} - x \frac{\partial \Psi}{\partial y} + \left(1 - \frac{\nu}{2}\right)y^3 - \left(2 + \frac{\nu}{2}\right)x^2 y \right] d\Omega}{EDI} \tag{4}$$

式中： E ——杨氏模量； D ——扭转刚度。

式(2)和(3)中，以 α 为系数的剪应力使柱体在横截面上产生内力扭矩 M_k 。这一内力扭矩使柱体在弯曲时同时产生附加扭转。因此，若要消除这一附加扭转，使柱体只产生单一的弯曲，则可根据柱的 Saint-Venant 扭转理论^[1]，在柱体的右端附加一与以上内力扭矩 M_k 大小相等方向相反的外力扭矩即可。这可使用将原来作用于柱右端截面形心 $\bar{C}$ 上的横向力 P 平行地向 $\bar{C}_y$ 轴方向移动一距离 e 至弯曲中心，从而达到目的。因此，横截面 Ω 的弯曲中心在 $\bar{C}_y$ 轴上离形心 $\bar{C}$ 的距离由下式决定：

$$e = \frac{M_k}{P} = \frac{\int_{\Omega} \left[y \frac{\partial \Psi}{\partial x} - x \frac{\partial \Psi}{\partial y} + \left(1 - \frac{\nu}{2}\right)y^3 - \left(2 + \frac{\nu}{2}\right)x^2 y \right] d\Omega}{2(1+\nu)I} \tag{5}$$

根据以上分析，当图 1 中的横向力 P 作用于弯曲中心时，则柱体只产生单一的弯曲。此时，柱体中的应力只有弯曲应力，它们仍由式(2)，(3)计算，但其中以 α 为系数的项略去。

2 函数 $\Psi(x, y)$ 和 $\varphi(x, y)$ 的确定

根据 Saint-Venant 弯曲理论^[1]，函数 $\Psi(x, y)$ 和 $\varphi(x, y)$ 均为图 1 柱体横截面 Ω 上的平面调和函数，它们在边界 Γ 上的法向导数满足以下边界条件：

$$\frac{\partial \Psi(x, y)}{\partial n_Q} = -\left[\frac{\nu}{2}x^2 + \left(1 - \frac{\nu}{2}\right)y^2\right]\cos(n, x) - (2 + \nu)xy\cos(n, y) \tag{6}$$

$$\frac{\partial \varphi(x, y)}{\partial n_Q} = y\cos(n, x) - x\cos(n, y) \tag{7}$$

式中： n_Q ——边界 Γ 上 Q 点的单位外法线； (x, y) —— Q 点的坐标。因此由上可知，求解函数 $\Psi(x, y)$ 和 $\varphi(x, y)$ 则是调和函数论中的两个 Neumann 问题^[2]，因而它们归为求以下两个非耦合的边界积分方程^[3,4]：

$$\int_{\Gamma} \Psi(Q) \frac{\partial \ln r_{CQ}}{\partial n_Q} d\Gamma - \pi \Psi(G) = \int_{\Gamma} \frac{\partial \Psi(Q)}{\partial n_Q} \ln r_{CQ} d\Gamma \tag{8}$$

$$\int_{\Gamma} \varphi(Q) \frac{\partial \ln r_{CQ}}{\partial n_Q} d\Gamma - \pi \varphi(G) = \int_{\Gamma} \frac{\partial \varphi(Q)}{\partial n_Q} \ln r_{CQ} d\Gamma \tag{9}$$

式中： G 和 Q ——边界 Γ 上的边界点； r_{CQ} ——边界点 G 和 Q 间的距离。

现在只需求解以上两个边界积分方程，便求得函数 $\Psi(x, y)$ 和 $\varphi(x, y)$ 在边界 Γ 上的边界值 $\Psi(Q)$ 和 $\varphi(Q)$ ，再使用已知的法向导数式(6)，(7)，则由调和函数的性质^[2,3]便得图 1 柱体在区域 Ω 上任意内点 $g(x, y)$ 的弯曲函数 $\Psi(x, y)$ 和扭转函数 $\varphi(x, y)$ ，于是问题解决。本文采用作者前一论文^[3]介绍的边界元法对其进行数值求解。

3 带缺口圆柱的边界元解法

将图 1 圆柱 Ω 的边界 Γ 按文献[3]分为 n 段，各段的节点用带星的编号 $i^* (= 1^*, 2^*, \dots, n^*)$ 表示，各段中点用不带星的编号 $i (= 1, 2, \dots, n)$ 表示。若使用常数边界元，则函数 $\Psi(x, y)$ 和 $\varphi(x, y)$ 在第 j 段上可用该段的中点值 $\Psi(Q_j)$ 和 $\varphi(Q_j)$ 表示，于是边界积分方程(8)和(9)便离散为以下两组非耦合的边界元代数方程

$$\sum_{j=1}^n (a_{ij} - \pi \delta_{ij}) \Psi(Q_j) = \sum_{j=1}^n b_{ij} \frac{\partial \Psi(Q_j)}{\partial n_{Qj}} \quad i = 1, 2, \dots, n \tag{10}$$

$$\sum_{j=1}^n (a_{ij} - \pi \delta_{ij}) \varphi(Q_j) = \sum_{j=1}^n b_{ij} \frac{\partial \varphi(Q_j)}{\partial n_{Qj}} \quad i = 1, 2, \dots, n \tag{11}$$

式中右端的非齐次项由式(6)和(7)给出，而系数 a_{ij} 和 b_{ij} 已由文献[3]列出。

求解以上代数方程组(10)和(11),便得未知函数 $\Psi(Q), \varphi(Q)$ 在边界 Γ 上的各离散值 $\Psi(Q_j)$ 和 $\varphi(Q_j)$, 于是便可近似决定内点 $g(x, y)$ 的弯曲函数 $\Psi(g) = \Psi(x, y)$ 及扭转函数 $\varphi(g) = \varphi(x, y)$, 从而可确定柱的扭转刚度 D 和由式(5)给出的弯曲中心 e . 当横向力 P 作用于弯曲中心时, 柱体的弯曲应力 (τ_{zx}, τ_{zy}) 由式(2), (3)决定. 略去系数为 α 的项, 它们的边界元计算公式由于篇幅限制不再具体列出.

4 数值结果

为了说明本文方法的应用, 这里使用上面获得的结果及无量纲几何参数 $a^* = a/R, x_B^* = x_B/R$, 对图 1 双曲线缺口圆柱的形心位置 Δ 、扭转刚度 D 、弯曲中心 e 及横向力 P 作用于弯曲中心时柱体的弯曲应力 (τ_{zx}, τ_{zy}) 等作了数值计算, 这里取 $\nu = 0.3$. 表 1 是获得的无量纲形心位置 $\Delta^* = \Delta/R$ 、无量纲扭转刚度 $D^* = D/\mu R^4$ 及无量纲弯曲中心 $e^* = e/R$ 随无量纲参数 a^* 的变化.

表 1 Δ^*, D^*, e^* 随参数 a^* 的变化 ($x_B^* = 0.3$)
Table 1 Δ^*, D^*, e^* VS. the parameter a^* for $x_B^* = 0.3$

a^*	0.1	0.3	0.5	0.7	0.9	$\rightarrow 1$
$10\Delta^*$	0.695 66	0.629 48	0.507 89	0.337 22	0.122 52	
D^*	0.808 17	0.987 82	1.181 90	1.370 08	1.519 29	1.59
$-e^*$	0.392 85	0.246 45	0.141 75	0.040 63	0.004 98	

由表 1 看出, 当 $a^* \rightarrow 1$ 时 $D^* \rightarrow 1.59$, 这与理论值 $\tilde{D}^* = \pi/2$ 十分接近. 这说明, 本文的计算结果是有足够精度的. 关于柱体中的应力分布, 由于篇幅限制, 这里不再列出.

参 考 文 献

1 Мусхелишвили Н.И. 数学弹性力学的几个基本问题. 赵惠元译. 北京: 科学出版社, 1958. 421 ~ 448
2 斯米尔诺夫 В.И. 高等数学教程. 孙念增译. 北京: 人民教育出版社, 1979. 561 ~ 588
3 王怡清, 汤昕燕. 用边界元法求解非圆截面转动轴的扭转刚度. 机械设计, 1990, 5(3): 17 ~ 21
4 汤昕燕. 三角形孔圆轴的扭转刚度及应力集中计算. 河海大学学报, 1997, 25(力学专辑): 70 ~ 74

Application of Boundary Element Method to Calculation of Flexural Center of Circular Cylinder with Hyperbolic Notch

Tang Xinyan

(Agricultural Engineering College, Nanjing Agricultural Univ., Nanjing 210032)

Abstract By use of the flexural theorem of Saint – Venant and the fundamental solution of harmonic function, the Saint – Venant flexural problem of a cylinder with an arbitrary cross section is reduced to two uncoupled boundary integral equations with unknown flexural function $\Psi(x, y)$ and unknown torsion function $\varphi(x, y)$. On the basis of these results and through calculation of the torsion moment on the cross section, a theoretical formula of the flexural center is derived for the cylinder. It is shown that if the lateral force is applied at the flexural center, then only the bending but not the additional torsion will occur. In order to explain the use of the method proposed in this paper, an example of the Saint-Venant flexure is calculated for a circular cylinder with a hyperbolic notch through discretion of the boundary integral equations and by use of the boundary element method. Finally, the numerical results of torsion rigidity, flexural center and the distribution of stresses of the cylinder are obtained and some results coincide well with theoretical results. Thus the present method is verified.

Key words boundary element method Saint-Venant flexure flexural center