

灰色理论在预测混凝土性能参数长期值中的应用*

王向东 朱为玄 徐道远

(河海大学土木工程学院 南京 210098)

摘 要 混凝土材料的性能参数(如弹性模量、徐变度) 的长期值对于结构的应力分析、强度设计、开裂分析、仿真分析都有很重要的作用 , 而这些性能参数的长期值通过试验测定需要很长时间 , 往往不能满足工程设计和计算的需要 . 本文用灰色理论预测混凝土材料性能参数的长期值 , 使得长期值的预测过程建立在严格的数学基础上 , 且预测值的精度能够满足工程需要 .

关键词 混凝土 ; 性能参数 ; 长期值 ; 灰色理论 ; 徐变 ; 弹性模量

中图号 TU528

工程实际中有许多材料性能参数都是随着时间的变化而变化的 , 如混凝土的弹性模量和徐变度等 , 它们的长期值对于工程结构的应力分析、强度计算、开裂分析和仿真分析都有很重要的意义 , 而这些值用试验的方法测定都需要很长的时间 , 以往对这些长期值的计算均采用经验公式进行预测 , 具有很大的经验性 . 灰色理论^[1]是我国学者邓聚龙教授 1982 年 3 月在国际上首先提出的 , 发展至今主要研究内容包括系统分析、信息处理(生成) 灰色建模、灰色预测、灰色决策和灰色控制等 . 对少量的数据进行处理 , 建立数学关系构成灰色模型 , 并通过模型对系统未来发展作定量预测称为灰色预测 . 灰色预测是需要原始数据少且可以预测任何时间值的一种数学方法 . 本文用灰色理论中这一数学方法 , 使所预测的混凝土材料性能参数长期值更具有理论依据 , 预测结果更加可信 , 且预测结果的精度可以满足工程设计和计算的需要 .

1 灰色理论及预测模型

控制论学者艾什比用黑箱(Black Box) 形容内部信息缺乏的对象和系统 . 为此 , 可用“ 黑 ” 表示信息的缺乏 ; “ 白 ” 表示信息的完全 . 信息不完全、不充分称为“ 灰 ” . 信息不完全的系统称为灰色系统(Grey System) .

1.1 灰色生成

将原始数列 $\{x^{(0)}\}$ 中的数据 $x^{(0)}(k)$ 按某种要求作数据处理 , 称为生成 . 灰色理论对灰量、灰过程的处理 , 目的是求得随机性弱化、规律性强化后的新数列 , 此数列的数据称为生成数 . 利用生成数建模是灰色理论的重要特点之一 . 生成可分为累加生成、累减生成、初值化生成、均值化生成、归一化生成等 . 下面介绍最常用的两种生成 .

1.1.1 累加生成

令 $\{x^{(0)}\}=(x^{(0)}(1), x^{(0)}(2), \dots, x^{(0)}(n))$ 为原始数列 ,
记生成数列为 $\{x^{(1)}\}$, $\{x^{(1)}\}=(x^{(1)}(1), x^{(1)}(2), \dots, x^{(1)}(n))$, 如果 $\{x^{(1)}\}$ 与 $\{x^{(0)}\}$ 之间满足

$$x^{(1)}(k)=\sum_{m=1}^k x^{(0)}(m)$$

则称 $\{x^{(1)}\}$ 为 $\{x^{(0)}\}$ 的一次累加生成数列 , 记为 1 - AGO(Accumulated Generating Operation) .

r 次累加生成有 :

$$x^{(r)}(k)=\sum_{m=1}^k x^{(r-1)}(m)=\sum_{m=1}^k(\sum_{i=1}^m x^{(r-2)}(i))$$

收稿日期 :1999-04-24
第一作者简介 :王向东 , 女 , 副教授 , 在职博士生 , 固体力学专业 , 主要从事混凝土的断裂与损伤方面的研究 .
* 国家自然科学基金资助项目(编号 59739180) .

1.1.2 累减生成

将原始数列中前后相邻的两个数据相减,构成新的数列,这种生成为累减生成,所得的数据为累减生成值,记为 IAGQ(Inverse Accumulated Generating Operation).

1.2 灰色建模

1.2.1 基本定理

对给定时间数列 $\{x_i^{(0)}(t)\} \ (i = 1, 2, \dots, h, t = 1, 2, \dots, N)$,
有相应的一阶累加序列 $\{x_i^{(1)}(t)\} \ (i = 1, 2, \dots, h, t = 1, 2, \dots, N)$.

其中
$$x_i^{(1)}(t) = \sum_{k=1}^t x_i^{(0)}(k) \tag{1}$$

并有相应的多次累差序列

$$\{\alpha^{(j)}(x_i^{(1)}, t)\} \ (i = 1, 2, \dots, h, j = 1, 2, \dots, m, t = 1, 2, \dots, N)$$

其中
$$\begin{aligned} \text{当 } j = 1 \text{ 时 } \quad & \alpha^{(1)}(x_i^{(1)}, t) = x_i^{(1)}(t+1) - x_i^{(1)}(t) = x_i^{(0)}(t) \\ \text{当 } j = 2 \text{ 时 } \quad & \alpha^{(2)}(x_i^{(1)}, t) = x_i^{(0)}(t) - x_i^{(0)}(t-1) \\ \text{当 } j = n \text{ 时 } \quad & \alpha^{(n)}(x_i^{(1)}, t) = \alpha^{(n-1)}(x_i^{(1)}, t) - \alpha^{(n-1)}(x_i^{(1)}, t-1) \end{aligned}$$

再构造累差矩阵 A 、累加矩阵 B 及常数向量 y_N :

$$\begin{aligned} A &= \begin{bmatrix} -\alpha^{(n-1)}(x_1^{(1)}, 2) - \alpha^{(n-2)}(x_1^{(1)}, 2) \dots - \alpha^{(1)}(x_1^{(1)}, 2) \\ -\alpha^{(n-1)}(x_1^{(1)}, 3) - \alpha^{(n-2)}(x_1^{(1)}, 3) \dots - \alpha^{(1)}(x_1^{(1)}, 3) \\ \vdots \\ -\alpha^{(n-1)}(x_1^{(1)}, N) - \alpha^{(n-2)}(x_1^{(1)}, N) \dots - \alpha^{(1)}(x_1^{(1)}, N) \end{bmatrix} \\ B &= \begin{bmatrix} -0.5(x_1^{(1)}(2) + x_1^{(1)}(1))x_2^{(1)}(2) \dots x_n^{(1)}(2) \\ -0.5(x_1^{(1)}(3) + x_1^{(1)}(2))x_2^{(1)}(3) \dots x_n^{(1)}(3) \\ \vdots \\ -0.5(x_1^{(1)}(N) + x_1^{(1)}(N-1))x_2^{(1)}(N) \dots x_n^{(1)}(N) \end{bmatrix} \end{aligned} \tag{2}$$

$$y_N = [\alpha^{(n)}(x_1^{(1)}, 2), \alpha^{(n)}(x_1^{(1)}, 3), \dots, \alpha^{(n)}(x_1^{(1)}, N)] \tag{3}$$

若记 h 个序列 n 阶微分方程所表达的动态模型 $GM(n, h)$ 为

$$\frac{d^n(x_1^{(1)})}{dt^n} + a_1 \frac{d^{n-1}(x_1^{(1)})}{dt^{n-1}} + \dots + a_n x_1^{(1)} = b_1 x_2^{(1)} + b_2 x_3^{(1)} + \dots + b_{n-1} x_n^{(1)}$$

则微分方程的系数向量 $\hat{a} = [a_1, a_2, \dots, a_n, b_1, b_2, \dots, b_{n-1}]^T$

可以通过最小二乘法求解
$$\hat{a} = ([A \ B]^T [A \ B])^{-1} [A \ B]^T y_N \tag{4}$$

式中 $[A \ B]$ 为由 A, B 组成的分块矩阵.

1.2.2 建模步骤

1.2.2.1 模型类型选择

$GM(n, h)$ 模型为 n 阶 h 个变量的微分方程,常用模型为 $GM(1, 1)$,其中 $h = 1$ 即只有一个变量的 GM 模型.这是因为在研究某变量的发展变化时,一般只突出一个变量.至于阶数 n 一般不超过 3 阶,为了计算简单,可取 $n = 1$,因此预测建模,一般选用最简单的 $GM(1, 1)$ 模型.

1.2.2.2 原始数据处理

根据式 (1) 求出
$$x_i^{(1)}(t) = \sum_{k=1}^t x_i^{(0)}(k)$$

1.2.2.3 构造 B 和 y_N

根据具体模型构造,用式 (2) 和式 (3) 构造相应的 B 和 y_N

1.2.2.4 作最小二乘计算

这一步是建模的关键一步,由式 (4) 可知,在 $GM(1, 1)$ 模型中 $\hat{a}$ 的表达式为:

$$\hat{a} = (B^T B)^{-1} B^T y_N$$

其中 B 和 y_N 中的各个分量值随模型的不同而不同, 当然参数列 $\hat{a}$ 对不同的模型代表不同的意义, 参数个数也不相同.

1.2.2.5 建立时间响应函数

建立时间响应函数就是求白化形式微分方程的解. 其方法是将求得的 $\hat{a}$ 的各个分量代入所构造的微分动态模型, 然后按一般微分方程进行求解. 对 GM(1,1) 模型, 其微分方程为

$$\frac{dx^{(1)}}{dt} + ax^{(1)} = u$$

求解得其时间响应函数

$$\bar{x}^{(1)}(t) = (\bar{x}^{(1)}(0) - \frac{u}{a})e^{-at} + \frac{u}{a}$$

1.2.2.6 模型精度检验

上述模型只是个初始模型, 还不能肯定它就一定能反映序列的客观规律, 因此必须要检验模型的合理性, 一般采用残差检验、关联度检验、后验差检验^[1]. 本文采用的残差检验方法是一种逐点检验方法, 以 $\rho(k)$ 记, 即

$$x_i^{(0)}(k) - \bar{x}_i^{(0)}(k) = \rho(k)$$

式中 $\bar{x}_i^{(0)}$ ——模型计算值还原数据; $x_i^{(0)}$ ——实际值原始数据. 当 $\rho(k)$ 满足精度要求时, 则认为模型的精度是足够的.

1.2.2.7 提高 GM(1,1) 模型精度的途径

提高 GM(1,1) 模型精度的途径有很多方法, 本文采用新息模型, 即将已知数列建立的 GM(1,1) 模型所预测得到的新值补充到已知数列之后, 再建立新的 GM(1,1) 模型预测下一个值, 将结果再补充到数列之后, 这样逐个预测, 直至完成预测目标或达到一定精度要求为止.

2 灰色理论在预测混凝土材料性能参数长期值中的应用

在对混凝土结构进行应力分析、强度分析、稳定性分析和开裂分析时, 都必须先确定混凝土材料的一些参数, 如混凝土的弹性模量、强度极限、徐变度等, 这些参数都是随时间而变化的, 由于这些参数的长期值的测试比较困难, 所以一般都由短期实测值来推算长期值, 长期值推算结果的准确与否直接影响整个结构的分析计算结果. 灰色理论可以对一组数据不多(一般至少应有 4 个数据)的数列进行建模, 用于推测这个数列的发展规律, 并预测该数列的长期值. 将灰色理论中的新息模型用于混凝土材料参数长期值的预测, 从而将材料性能参数长期值的预测建立在一个较扎实的数学方法上, 使计算结果更具有科学性且能够满足工程设计和计算的需要.

2.1 灰色理论预测混凝土弹性模量的长期值

混凝土的弹性模量是龄期的函数, 而对长龄期(如 10 年)混凝土的弹性模量的测试需要时间很长, 往往不能满足工程设计的需要, 为此可采用灰色理论的方法进行. 对万家寨大坝的三种混凝土弹性模量进行了长期值的预测. 根据其 90 d、180 d、270 d 和 360 d 四种龄期的实验数据, 建立了 GM(1,1) 新息模型, 并在推测中采用残差检验法对模型加以修正, 得到三种混凝土的 10 年龄期的弹性模量见表 1 所示, 用预测模型计算的 90 d、180 d、270 d 和 360 d 四种龄期的弹性模量值与实测值非常接近, 说明预测方法的可信度较高, 10 年龄期的弹性模量预测值有较高的可信度.

2.2 灰色理论预测混凝土徐变度的长期值

混凝土的徐变度是龄期和持荷时间的函数, 对于同一龄期的混凝土持荷时间越长, 徐变度越大, 而且趋于一个稳定的常数, 为了能够得到这个稳定值, 仍采用灰色理论, 建立 GM(1,1) 新息模型, 同样用残差检验法对模型加以修正, 得到万家寨甲种混凝土各龄期各持荷时间的徐变度. 现将预测模型计算的部分持荷时间的徐变度与相应的试验徐变度列于表 2 中, 可以看出计算结果与实验结果的误差的绝对值均小于 15%, 远小于用目前常用的经验公式的误差^[2], 所以预测模型是可靠的. 持荷时间 10 年的徐变度预测值见表 2 所示, 也具有较高的可信度.

3 结 束 语

用灰色理论的新息模型预测混凝土的弹性模量和徐变度的长期值具有以下优点 (a) 计算理论建立在严

格的数学基础上.(b)计算程序简单,原始数据只需 4 个以上即可,内存需求量少.(c)灰色理论预测可以得到任意时刻的参数值,特别是可以得到参数的长期值.灰色理论预测模型可以广泛应用到混凝土力学性质的推测中,因为描述混凝土性质的很多物理力学量均是时间的函数,属于一个动态变化系统.其它动态变化系统也均可以用灰色理论预测其随时间的变化规律.

表 1 万家寨三种混凝土弹性模量实测值与预测值

Table 1 Observed and predicted values of elasticity modulus of 3 concrete materials for Wanjiazai dam		MPa				
混凝土类型		混 凝 土 龄 期				
		90 d	180 d	270 d	360 d	10 年
甲	实测值	35.3	36.5	36.9	37.2	38.9
	计算值	30.4	36.8	38.2	38.5	
乙	实测值	31.2	32.4	33.2	33.9	35.1
	计算值	27.0	33.0	34.3	34.6	
丙	实测值	38.3	39.9	40.0	40.1	42.2
	计算值	33.0	40.0	41.4	41.7	

表 2 万家寨甲种混凝土各龄期混凝土徐变度的实测值与预测值

Table 2 Observed and predicted values of creep of concrete material A for Wanjiazai dam		10 ⁻⁶ MPa						
龄期/d	持荷时间	45 d	60 d	75 d	90 d	105 d	120 d	10 年
3	实测值	32.9	34.3	35.5	37.9	38.2	38.6	47.65
	计算值	29.2	33.9	37.2	39.6	41.3	42.5	
	误差/%	-0.13	-0.01	0.05	0.04	0.08	0.09	
7	实测值	24.7	26.0	26.4	28.2	29.1	29.9	37.96
	计算值	22.6	24.3	27.1	29.2	30.8	31.9	
	误差/%	-0.09	-0.07	0.03	0.03	0.06	0.06	
28	实测值	17.1	19.2	19.4	20.6	21.7	22.1	27.84
	计算值	14.8	17.5	19.8	21.3	22.5	23.5	
	误差/%	-0.15	-0.10	0.02	0.03	0.04	0.06	
90	实测值	8.1	9.5	10.3	10.3	10.6	11.0	14.67
	计算值	7.3	8.7	9.4	10.3	11.0	11.6	
	误差/%	-0.11	-0.09	-0.10	0.00	0.04	0.05	
180	实测值	6.9	8.3	8.9	9.1	9.3	9.4	13.26
	计算值	6.1	7.4	8.0	8.8	9.5	10.1	
	误差/%	-0.13	-0.12	-0.11	-0.03	0.02	0.07	
360	实测值	6.1	7.4	7.9	8.0	8.5	8.6	11.38
	计算值	5.3	6.4	7.3	8.0	8.6	9.0	
	误差/%	-0.15	-0.16	-0.08	0.00	0.01	0.04	

参 考 文 献

1 易德生.灰色理论与方法.北京:石油工业出版社,1992.20~70

2 王向东.混凝土徐变试验数据处理中的几个问题.河海大学学报(计算力学专辑),1997 25 :111~115

3 唐崇钊.混凝土的徐变力学与试验技术.北京:水利电力出版社,1982.165~200

Predicting Long-term Concrete Parameters with Grey System Theory

Wang Xiangdong Zhu Weixuan Xu Daoyuan

(College of Civil Engineering ,Hohai Univ. , Nanjing 210098)

Abstract Long-term concrete parameters , such as modulus of elasticity and creep ,are very important in the analysis of stress ,strength ,fracture and imitation. However , it is time-consuming to test the long-term data. In this paper , the grey system theory is used to predict the long-term data. The predicted data meet engineering requirements.

Key words concrete ; material parameter ; long-term data ;grey system theory ; creep ; modulus of elasticity