

非对称井问题的一个解析解

詹美礼, 速宝玉, 刘俊勇

(河海大学水利水电工程学院, 江苏南京 210098)

摘要 运用保角变换方法寻求了一个半无限渗流域中非对称井流问题的解析解, 分析了非对称井流水头势的分布规律. 在此基础上, 又利用井群工作时降深的叠加原理, 进一步研究了非对称井群协同工作情况, 获得了非对称井群共同作用下的水头场解析关系. 如将该解析解与数值解(有限单元法或差分法) 相结合, 将可实现对含有复杂密集排水系统的渗流控制问题进行快速求解, 对复杂的工程渗流防渗排水设计进行优化分析研究.

关键词 保角变换; 非对称井流; 解析理论

中图分类号: TV139.14

文献标识码: A

文章编号: 1000-1980(2000)01-0036-04

在工农业生产中, 为了供水及排水的需要, 广泛采用井来抽取地下水, 而在水利工程中也常采用井进行排渗. 因而经常遇到和井有关的水文地质计算及渗流分析, 以给出生产井的类型、数量、布置方案、井的抽水量及降深等. 为此, 需要研究地下水向井中运动的规律. 然而, 在井流分析中, 现有的解析理论仅在完全对称情况下才是有效的. 而在实现问题中常常遇到的大多是非对称井, 如在半无限渗流域中的井流问题, 传统的单井计算解析理论就显得无能为力. 如采用有限元或差分方法进行数值求解, 则计算工作量将非常之大. 因此, 本文将应用保角变换方法建立半无限渗流域中非对称井的解析理论.

1 非对称单井解析解

和对称井分析时的假定一样, 对于非对称井, 本文仍假定在垂直方向上的渗流影响可忽略不计. 非对称井的稳定渗流, 其控制方程仍是二维 Laplace 方程. 本文待求解的非对称单井其渗流域如图 1 所示.

该问题归结为如下定解问题:

$$\frac{\partial^2 H}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 H}{\partial y^2} = 0 \quad (-\infty < x < +\infty, y < 0) \quad (1)$$

$$\begin{cases} H(x, y)|_{y=0} = H_1 & (\text{常水头边界}) \\ H(x, y)|_{x^2+(y+s)^2=r^2} = H_0 & (\text{常水头边界}) \end{cases} \quad (2)$$

式中: $H(x, y)$ ——水头势函数; s ——井中心至边界 L 的距离; r ——井半径; H_0, H_1 ——边界水头, 且为常数.

为了求解定解问题(1)(2), 须先作一保角变换. 取映射函数为^[1]

$$w = \frac{Z + ia}{Z - ia} \quad (3)$$

可将图 1 所示的渗流域映射到 w 平面(图 2)上的同心圆环域 s , 且边界 L 被映射为半径为 1 的单位圆 C_1 , 边界 Γ 被映射为半径为 R 的圆 C_2 . 令 $w = \xi + i\eta$ 时, 便有

$$a = \sqrt{s^2 - r^2} \quad R = \frac{s - \sqrt{s^2 - r^2}}{r} \quad (4)$$

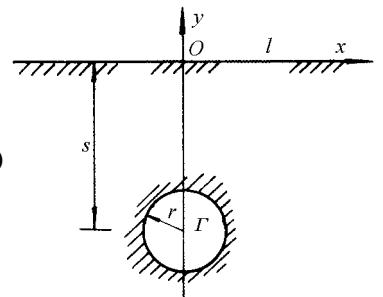


图 1 原区域

Fig.1 Original region

$$x = \frac{2a\eta}{(1-\xi)^2 + \eta^2} \qquad y = \frac{a(\xi^2 + \eta^2 - 1)}{(1-\xi)^2 + \eta^2} \tag{5}$$

$$\xi = \frac{x^2 + y^2 - a^2}{x^2 + (y-a)^2} \qquad \eta = \frac{2ax}{x^2 + (y-a)^2} \tag{6}$$

由于 Laplace 方程经保角变换后仍为 Laplace 方程 故有

$$\frac{\partial^2 H}{\partial \xi^2} + \frac{\partial^2 H}{\partial \eta^2} = 0 \tag{7}$$

相应的边界条件式 (2) 则变为

$$H(\xi, \eta)|_{\xi^2 + \eta^2 = 1} = H_1 \qquad H(\xi, \eta)|_{\xi^2 + \eta^2 = R^2} = H_0 \tag{8}$$

若引进极坐标 ,令 $\omega = \xi + i\eta = \rho(\cos\theta + i\sin\theta)$,则定解问题转化为

$$\frac{\partial^2 H}{\partial \rho^2} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial H}{\partial \rho} + \frac{1}{\rho^2} \frac{\partial^2 H}{\partial \theta^2} = 0 \tag{9}$$

$$H(\rho, \theta)|_{\rho=1} = H_1 \qquad H(\rho, \theta)|_{\rho=R} = H_0 \qquad H(\rho, \theta + 2\pi) = H(\rho, \theta) \tag{10}$$

根据数理方程理论 ,方程 (9) 的通解为^[2]

$$H(\rho, \theta) = \frac{1}{2}(a_0 + b_0 \ln \rho) + \sum_{n=1}^{\infty} \{ (a_n \rho^n + b_n \rho^{-n}) \cos n\theta + (c_n \rho^n + d_n \rho^{-n}) \sin n\theta \} \tag{11}$$

式中 $a_0, b_0, a_n, b_n, c_n, d_n$ 均为待定系数 ,可根据边界条件确定 .将边界条件式 (10) 代入式 (11) 便得

$$\begin{cases} \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \{ (a_n + b_n) \cos n\theta + (c_n + d_n) \sin n\theta \} = H_1 \\ \frac{1}{2}(a_0 + b_0 \ln R) + \sum_{n=1}^{\infty} \{ (a_n R^n + b_n R^{-n}) \cos n\theta + (c_n R^n + d_n R^{-n}) \sin n\theta \} = H_0 \end{cases} \tag{12}$$

对式 (12) 应用富里叶展开定理 ,不难推得

$$\begin{cases} a_0 = 2H_1 & b_0 = 2 \frac{H_0 - H_1}{\ln R} \\ a_n = b_n = c_n = d_n = 0 \end{cases} \tag{13}$$

再将式 (13) 代入式 (11) ,得

$$H(\rho, \theta) = H_1 + (H_0 - H_1) \frac{\ln \rho}{\ln R} \tag{14}$$

上式即为非对称单井解答 .

2 非对称井群的叠加求解方法

前面分析的是单个非对称井单独工作的情形 .然而 ,在水利工程排渗或其他方面的实际应用中 ,遇到的是若干口井同时工作的情况 ,井之间要发生干扰 .干扰程度除取决于水文地质条件的差异外 ,还受井数、井距、井的结构等的影响 .

井的干扰作用对生产有利也有弊 ,这就需要运用干扰井的理论去进行兴利防弊的工作 .考虑井之间干扰影响时求得的水量 Q 一定小于不考虑相互干扰时抽出的水量 Q .因此利用本文方法求地下水资源的供水量时 ,要注意到它的安全性 ,作适当的修正 .

地下水向干扰井群流动的稳态计算公式 ,是以单个非对称井公式 (14) 为基础 ,根据叠加原理来建立的 .叠加原理可简述为 :干扰井群工作时 ,于任一点处产生的降深值等于各井单独工作时于该点处产生降深值的代数和^[3] .

如图 3 所示 ,设有任意分布的 n 个非对称井 ,各井点的水头均是定值 ,分别为 $H_{01}, H_{02}, \dots, H_{0n}$,各井的半径分别为 $r_1, r_2, \dots, r_n$,至直线边界的距离分别为 $b_1, b_2, \dots, b_n$.现计算

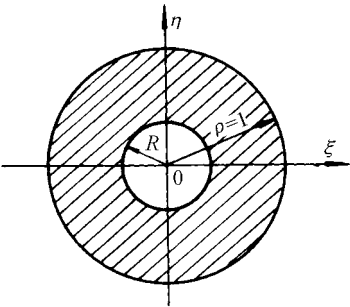


图 2 像区域
Fig.2 Mapping region

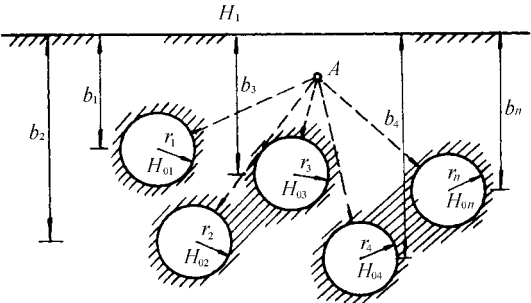


图 3 井群分析示意图
Fig.3 Schematic diagram for well-group analysis

在 n 个井共同作用下,任一点 A 处的水头.由式(14)知,井点 i 在 A 点处引起的降深为

$$S_{Ai} = (H_1 - H_{0i}) \frac{\ln \rho_i}{\ln R_i}$$

(15)

根据叠加原理,在 n 个井点的共同作用下,在 A 点处的降深为

$$S_A = \sum_{i=1}^n (H_1 - H_{0i}) \frac{\ln \rho_i}{\ln R_i}$$

(16)

故任意点 A 处的水头即为

$$H_A = H_1 - \sum_{i=1}^n (H_1 - H_{0i}) \frac{\ln \rho_i}{\ln R_i}$$

(17)

3 算 例

设某一江心洲地区,其地形如图4所示,该地区地下水位可近似视之与江中水位(枯水期)平齐.因工程施工需要,地下水位仍需降低.根据需要,计划在江边打一井抽取地下水以降低地下水位.设井径30 cm,江中水位20 m,井中稳定水位要求维持在16 m(由抽水保证),且井离岸边50 m.试确定此情形的地下水位的分布.

该问题可简化为图1所示的分析图式.应用本文式(4)(5)(6)和(14),便可很容易计算出渗流域中任意一点的水位.为节约篇幅,仅将分析结果点绘于图5.从图5可以看出,约在直径小于50倍的井径范围内,其地下水位非对称性并不是很明显,而直径大于50倍的井径区域内,非对称性则表现尤为突出.然而,对于实际工程问题,多属非对称性,且所需考察的区域,更多的是在50倍的井径以外部分.因此,本文的解析方法是解决非对称井流的有效方法之一,公式简单,应用方便.

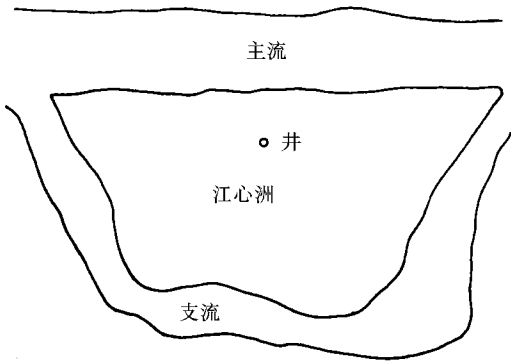


图4 渗流域地形示意图
Fig.4 Schematic diagram of topography of seepage field

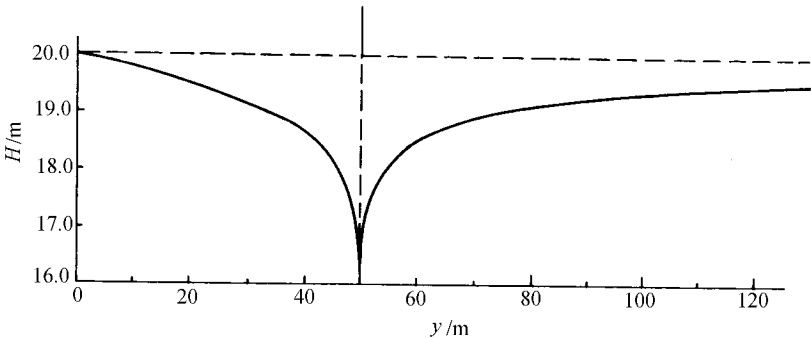


图5 非对称单井水头场分布
Fig.5 Hydraulic head distribution of unsymmetrical well flow

4 结 束 语

本文借助保角变换通过严密的数学推导,建立了一个非对称井流分析的方法,提出了相应的计算公式.在单个非对称井解析解的基础上,运用叠加原理,建立了非对称干扰井群的渗流计算公式.通过算例,初步分析了非对称性影响的强弱范围.由于本文计算公式简单,应用方便,因此在渗控分析中具有推广前景.

参考文献：

[1] 詹美礼 , 钱家欢 , 陈绪禄 . 粘弹性地基中洞周土体固结问题的解析解 [J]. 河海大学学报 , 1993 , 21 (2) : 54 ~ 60 .
[2] 杨曙 , 杨应辰 . 工程数学题解 [M]. 北京 : 国防工业出版社 , 1983 . 508 ~ 509 .
[3] 李俊亭 , 王愈吉 . 地下水动力学 [M]. 北京 : 地质出版社 , 1987 . 47 ~ 51 .

Analytical Solution to Unsymmetrical Well Flow Problem

ZHAN Mei-li , SU Bao-yu , LIU Jun-yong

(College of Water Conservancy of Hydropower Engineering , Hohai Univ . , Nanjing 210098 , China)

Abstract The conformal transformation method is used to find an analytical solution to unsymmetrical well flow problems of the semi-infinite seepage field ,and the hydraulic head distribution law of unsymmetrical well flow is also analyzed. Based on this ,the superposition principle of drop depth is used to gain the head field analytical relationship under the action of unsymmetrical well group. If the present analytical theory is combined with a numerical method (finite element method or finite difference method) ,it can be applied to rapid solution to seepage control problems with a complicated close drainage system and the optimization design of seepage control and drainage system of complicated engineering projects .

Key words conformal transformation ; unsymmetrical well flow ; analytical theory

《河海大学学报(自然科学版)》征订启事

《河海大学学报(自然科学版)》是以水资源开发、利用与保护为重点的综合性学术期刊 ,主要刊登本校在水资源、水文、地质、测量、水利工程、水电工程、水运工程、海洋及海岸工程、水工结构、工程力学、水力学及河流动力学、岩土工程、计算机科学、电力工程、电子技术及自动化工程、工业与民用建筑、管理工程、水利经济、环境工程、机械工程等学科方面的科研成果学术论文、学术讨论、研究动态等学术性文章 ,可供上述有关专业的科技工作者及大专院校师生阅读和参考 .

本刊创办于 1957 年 ,是我国中文核心期刊 ,在国内工程技术界和学术界有较大影响 . 刊载的文章中 ,有不少国家科技攻关 (重点) 项目和各种科学基金资助项目的研究成果 ,部分达到了国内领先和国际先进水平 ,为我国水利、水电、水运工程及其他有关工程建设的规划、设计、施工和管理提供了科学理论、方法和具体建议 ,发挥了较大的社会效益和经济效益 ,深受工程界和科技界赞许 . 本刊每逢单月出版 ,国内外公开发行 ,邮发代号 28 - 63 , 每期定价 8.00 元 ,全年订费 48.00 元 . 欢迎广大读者在全国各地邮局订阅或直接与编辑部联系 . 联系地址 : 南京市西康路 1 号《河海大学学报》编辑部 , 邮政编码 : 210098 .