

最大信息熵原理在波高分布中的应用

徐福敏

(河海大学港口航道及海岸工程学院,江苏南京 210098)

摘要 简要介绍最大信息熵原理及其概率估计方法,推导出二阶矩意义下的最大熵概率密度分布表达式.由最大熵法得到了深水充分发展波波高概率分布及风浪槽试验中不同水深时的波高概率分布.以最大熵法得到连云港波高概率分布,并对计算结果进行了验证.

关键词 最大信息熵 概率估计 波高概率分布

中图分类号 O236 ;TV139.2⁺1 **文献标识码** A **文章编号** 1000-1980(2000)01-0067-05

热力学第二定律表达为熵增加原理.某一系统经绝热过程由初态至终态,它的熵不减少,熵在可逆绝热过程中不变,在不可逆绝热过程中增加.由熵增加原理可作出一个重要推论:孤立系统的熵永不减少.孤立系统中发生的任何不可逆过程,包括趋向平衡的过程,都是朝着使系统的熵增加的方向进行的.若一个孤立系统达到熵为最大状态,此系统就达到平衡态,利用熵函数的这一性质判定孤立系统是否处于平衡态,称为熵判据.

1 最大信息熵原理^[1]

信息量是信息论的中心概念.信息论量度信息的基本出发点是把获得的信息看作用以消除不确定性的东西.因此,信息数量的大小,可以用被消除的不确定性的多少来表示,而随机事件不确定性的多少可以用几率分布函数来描述.

设一个几率实验 A (随机事件)有 n 个可能的结局: $a_1, a_2, \dots, a_n$, 每一个结局出现的几率分别是 $P_1, P_2, \dots, P_n$, 并满足如下条件:

$$0 \leq P_i \leq 1 \quad (i = 1, 2, \dots, n)$$

以及

$$\sum_{i=1}^n P_i = 1$$

为了量度几率实验 A 先验地含有的不确定性,申农引入熵函数 G :

$$G_n = G(P_1, P_2, \dots, P_n) = -K \sum_{i=1}^n P_i \ln P_i$$

作为几率实验 A 实验结果不确定性的量度,式中 $K > 0$, 为恒量,因此 $G_n \geq 0$, G_n 称为信息熵或申农熵 (Shannon). 在实验中,如任何一结局几率 $P_i = 1$, 则其余几率都将为零,那么 $G_n = 0$, 即实验结局可得出决定性的预测,不存在任何不确定性.反之,如事先对实验结局一无所知,则只能假定 P_i 都相等 ($P_i = \frac{1}{n}, i = 1, 2, \dots, n$) 时 G_n 达到最大值.很明显,在此极限情形下,实验结局具有最大的不确定性.

熵增加原理可应用于风浪发展过程.将风与海洋视为一孤立系统,一定风速场条件下,海浪参数(水深、风区)不变,历经足够风时后,风浪便达到定常状态,称之为稳定波,即为平衡态.在此过程中只能是风能转化为波能和热能,而波能、热能不会转化为风能.因此,这是一不可逆过程.熵值在风浪的发生、成长至平衡态过程中不断增加,直至平衡态,熵值达到最大.此时风浪在既定的约束条件(风速、水深、风区)下呈现最大自由度(最复杂、弥散程度最大).在无限水深情况下,若风区、风时足够大,则海浪理论中“充分发展状态”这一概

念即无限深开敞海洋中海浪最复杂、弥散程度最大的状态。

2 最大信息熵概率估计

假设一随机波动信号 $X(t)$ 为各态历过程, 用其一个样本函数计算出各阶矩, 然后借助概率统计中的最大熵方法可以得到一个解析形式的密度函数 $P(x)$, 其熵函数 G_x 可写为

$$G_x = - \int_R P(x) \ln[P(x)] dx \quad (1)$$

约束条件为

$$\int_R P(x) dx = 1 \quad \int_R x^i P(x) dx = m_i \quad i = 1, 2, \dots, n$$

式中: m_i ——第 i 阶原点矩; n ——所用矩的最高阶数; R —— x 的取值区间或边界。引用拉格朗日乘子 $\lambda_0, \lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ 组成目标函数

$$\int_R J[P(x)] dx = G_x + (\lambda_0 + 1) \left[\int_R P(x) dx - 1 \right] + \sum_{j=1}^n \lambda_j \left[\int_R x^j P(x) dx - m_j \right]$$

调整 $P(x)$ 使熵达到极大值, 即令

$$\frac{dJ[P(x)]}{d[P(x)]} = 0$$

可得

$$P(x) = \exp \left[\lambda_0 + \sum_{j=1}^n \lambda_j x^j \right] \quad (2)$$

式(2)即为最大熵概率密度函数的解析表达式。剩下的问题是确定拉格朗日乘子 λ_j , 由约束条件及式(2)联立求得

$$\lambda_0 = - \ln \left\{ \int_R \exp \left[\sum_{j=1}^n \lambda_j x^j \right] dx \right\} \quad (3)$$

及

$$\frac{\partial \lambda_0}{\partial \lambda_j} = - \int_R x^j \exp \left[\lambda_0 + \sum_{j=1}^n \lambda_j x^j \right] dx = m_j$$

可以得到

$$1 - \frac{\int_R x^j \exp \left[\sum_{j=1}^n \lambda_j x^j \right] dx}{m_j \int_R \exp \left[\sum_{j=1}^n \lambda_j x^j \right] dx} = 0 \quad (4)$$

式(3)及(4)为 $n+1$ 个关于 $\lambda_0, \lambda_1, \dots, \lambda_n$ 的联立方程组, 求解后即得拉格朗日乘子 $\lambda_0, \lambda_1, \dots, \lambda_n$ 。

取随机变量 X , 其概率密度函数为 $f(x)$, 则其熵函数为

$$G_x = - \int_R f(x) \ln[f(x)] dx$$

当 $n=2$ 时, 其约束条件为

$$\int_R f(x) dx = 1 \quad \int_R x f(x) dx = m_1 \quad \int_R x^2 f(x) dx = m_2$$

其中

$$R \in (-\infty, \infty)$$

解方程可得

$$\lambda_1 = - \frac{2\lambda_2 m_2 + 1}{m_1} \quad \lambda_2 = - \frac{\lambda_1}{2m_1} \quad e^{\lambda_0 \sqrt{\pi}} \frac{e^{[-\lambda_1^2/(4\lambda_2)]}}{\sqrt{-\lambda_2}} = 1$$

3 二阶矩意义下波高概率分布^[2,3]

在二阶矩意义下, 根据最大熵原理, 可以得到波高概率分布的约束条件为:

a. 归一化条件: $\int_0^\infty f\left(\frac{H}{H}\right) d\left(\frac{H}{H}\right) = 1$;

b. $\int_0^\infty \left(\frac{H}{H}\right) f\left(\frac{H}{H}\right) d\left(\frac{H}{H}\right) = 1$;

c. $\int_0^\infty (\frac{H}{\bar{H}})^2 f(\frac{H}{\bar{H}}) d(\frac{H}{\bar{H}}) = m_2$;

d. $f(\frac{H}{\bar{H}})|_{\frac{H}{\bar{H}}=0} = 0$.

熵函数为

$$G = - \int_0^\infty f(\frac{H}{\bar{H}}) \ln[f(\frac{H}{\bar{H}})] d(\frac{H}{\bar{H}})$$

求 G 的极大值,则方程的解为

$$f(\frac{H}{\bar{H}}) = (\frac{H}{\bar{H}})^n \exp[\lambda_0 + \lambda_1(\frac{H}{\bar{H}}) + \lambda_2(\frac{H}{\bar{H}})^2]$$

$$f(\frac{H}{\bar{H}}) = \exp[\lambda_0 + \lambda_1(\frac{H}{\bar{H}}) + \lambda_2(\frac{H}{\bar{H}})^2 + n\ln(\frac{H}{\bar{H}})]$$

解得波高概率分布为

$$f(\frac{H}{\bar{H}}) = \frac{2a^{1+s}}{\Gamma(1+s)} (\frac{H}{\bar{H}})^{2s+1} \exp[-a(\frac{H}{\bar{H}})^2]$$

(5)

其中

$$s = am_2 - 1 \qquad a = [\frac{\Gamma(1.5+s)}{\Gamma(1+s)}]^2$$

式(5)即为三参数 Γ 分布的特例($b=2$).

约束条件 c 为 : $\int_0^\infty (\frac{H}{\bar{H}})^2 f(\frac{H}{\bar{H}}) d(\frac{H}{\bar{H}}) = \frac{H_{rms}^2}{\bar{H}^2}$ (其中 $H_{rms}, \bar{H}$ 分别代表均方根波高、平均波高),亦可写作 $m_2 = 8m_0/\bar{H}^2$ (m_0 为谱的零阶矩). 对于深水充分发展波,有 $m_2 = 4/\pi$,解方程得 : $s=0, a=0.785, m_2=1.274$. 则

$$f(\frac{H}{\bar{H}}) = 1.57(\frac{H}{\bar{H}}) \exp[-0.785(\frac{H}{\bar{H}})^2]$$

(6)

由最大熵法导得深水充分发展波条件下波高概率分布为 Rayleigh 分布,说明了最大熵法在风浪统计性质研究中的实用价值.

4 最大熵法波高分布的试验验证

风浪槽试验的有效风区长度 20 m,水深分别为 0.198 m,0.25 m,0.3 m,0.585 m. 在此条件下采用人工风场,经相应的风时后可得稳定波. 采集波面数据,根据最大熵法按均方根波高和平均波高计算出各水深条件下的波高概率密度分布^[4],见表 1. 为了比较,以 ГЛУХОВСКИЙ 波高概率分布公式计算出各 $\bar{H}/D$ 下的分布^[2,3],结果见表 1 ;以三参数 Γ 分布 $f(\frac{H}{\bar{H}}) = \frac{ba^{1+s}}{\Gamma(1+s)} (\frac{H}{\bar{H}})^{b(1+s)-1} \exp[-a(H/\bar{H})^2]$ 计算出各 $\bar{H}/D$ 下的分布,结果见表 2 ;用观测结果得到上述波高概率密度分布直方图,三种波高概率分布的比较见图 1.

表 1 试验波高分布

Table 1 Experimental wave height distribution

序号	$D/\bar{H}$	$8m_0/\bar{H}^2$	最大熵法结果	Глуховский 公式
1	3.845	1.086	$f(\frac{H}{\bar{H}}) = 19.96(\frac{H}{\bar{H}})^{4.9} \exp[-2.7164(\frac{H}{\bar{H}})^2]$	$f(\frac{H}{\bar{H}}) = 1.923(\frac{H}{\bar{H}})^{1.703} \exp[-0.711(\frac{H}{\bar{H}})^{2.703}]$
2	6.410	1.1045	$f(\frac{H}{\bar{H}}) = 13.69(\frac{H}{\bar{H}})^{4.28} \exp[-2.4(\frac{H}{\bar{H}})^2]$	$f(\frac{H}{\bar{H}}) = 1.752(\frac{H}{\bar{H}})^{1.37} \exp[-0.739(\frac{H}{\bar{H}})^{2.37}]$
3	7.752	1.1217	$f(\frac{H}{\bar{H}}) = 7.9(\frac{H}{\bar{H}})^{3.38} \exp[-1.9524(\frac{H}{\bar{H}})^2]$	$f(\frac{H}{\bar{H}}) = 1.715(\frac{H}{\bar{H}})^{1.296} \exp[-0.747(\frac{H}{\bar{H}})^{2.29}]$
4	10.660	1.221	$f(\frac{H}{\bar{H}}) = 2.188(\frac{H}{\bar{H}})^{1.44} \exp[-0.9992(\frac{H}{\bar{H}})^2]$	$f(\frac{H}{\bar{H}}) = 1.671(\frac{H}{\bar{H}})^{1.208} \exp[-0.757(\frac{H}{\bar{H}})^{2.208}]$

图 1 表明,随水深变浅,波高概率密度分布逐渐向平均波高处集中,三种分布都反映了这一趋势. 但 ГЛУХОВСКИЙ 波高概率分布与直方图差异大,随 $\bar{H}/D$ 的变小,差异愈加明显,反映在峰波高处,概率密度值低于试验结果,而在较小及较大波高处则明显高于试验结果. 最大熵法得到的不同水深波高概率密度分布及三参数 Γ 分布都与直方图分布吻合较好. 采用最小二乘法对三种分布与直方图的拟合

表 2 试验波高三参数 Γ 分布

Table 2 Three parameter Γ distribution of experimental wave height

序号	$D/\bar{H}$	a	b	s
1	3.845	0.8916	3.6496	0.2156
2	6.410	0.3292	4.4292	-0.3680
3	7.752	1.1442	2.8290	0.4377
4	10.660	0.2296	4.2660	-0.4917

优劣进行比较,对四种不同水深时的检验结果见表 3.由 D^2 检验结果可以看出,最大熵分布及三参数 Γ 分布与直方图拟合均很好,而 ГЛУХОВСКИЙ 分布与直方图差异很大.由于三参数 Γ 分布是直接根据试验数据进行拟合的试验分布,所以充分证明最大熵分布在描述波高分布时的适用性.

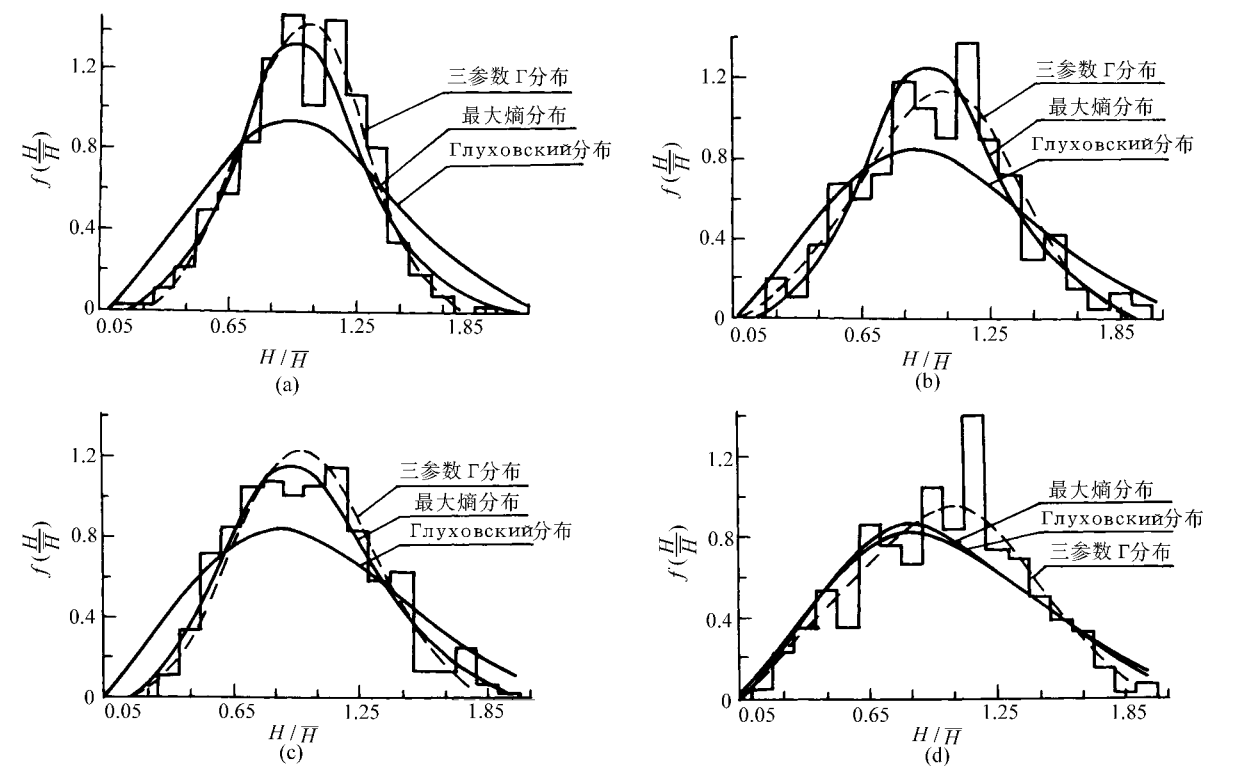


图 1 三种方法拟合波高概率分布及其直方图

Fig.1 Comparison between three wave height probability distributions and the histogram

表 3 最小二乘法检验(D^2 检验)

Table 3 Least square method (D^2 method)

序号	$D/\bar{H}$	最大熵分布	三参数 Γ 分布	ГЛУХОВСКИЙ 分布
1	3.845	0.1132	0.1129	0.6244
2	6.410	0.0731	0.0877	0.5332
3	7.752	0.0803	0.0833	0.4767
4	10.660	0.1324	0.1256	0.1332

5 最大熵法分析连云港波高分布

连云港是我国十大海港之一,为建港的需要,曾在 $34^{\circ}52'48''\text{N}$, $119^{\circ}42'24''\text{E}$ 处投放“波浪骑士”测波仪,进行波浪的连续观测.测点平均水深约为 19 m,观测时间自 1979 年 1 月 1 日至 5 月 6 日,1979 年 11 月 15 日至 1980 年 1 月 28 日,每天记录四次(时间分别为 2:00,8:00,14:00 和 20:00),每次记录 40 min 波面过程线.河海大学葛明达对其波高的统计特性进行了研究,选取样本 132 个,样本长度约 20 min,平均波高 $\bar{H}$ 大于 50 cm,相对水深参数 $\bar{H}/D = 0.03 \sim 0.11$ (D 为水深).获得如下波高概率分布:

$$f\left(\frac{H}{\bar{H}}\right) = 1.712\left(\frac{H}{\bar{H}}\right)^{1.25} \exp\left[-0.761\left(\frac{H}{\bar{H}}\right)^{2.25}\right]$$

波高分组统计特征值见表 4, $H_{rms}/\bar{H}$ 的统计平均值为 1.11,主要变化范围 1.08 ~ 1.12,占 89%, $H_{rms}^2/\bar{H}^2 = 1.2321$.

表 4 $H_{rms}/\bar{H}$ 与 $\bar{H}/D$ 的关系

Table 4 Relationship between $H_{rms}/\bar{H}$ and $\bar{H}/D$

$\bar{H}/D$	0.03	0.04	0.05	0.06	0.07	0.08	0.09	0.10	0.11
$H_{rms}/\bar{H}$	1.085	1.091	1.122	1.094	1.097	1.100	1.112	1.108	1.102

用最大熵法求得连云港波高概率密度分布为

$$f(\frac{H}{\bar{H}}) = 2.0221(\frac{H}{\bar{H}})^{1.332}\exp[-0.94635(\frac{H}{\bar{H}})^2]$$

用最大熵法得到的结果与葛明达根据实测资料统计得到的分布和直方图的比较见图 2. 由图可见,最大熵法得到的波高分布与实测直方图吻合很好.

6 小 结

最大信息熵原理应用于波高的统计性质研究,导出了深水充分发展波波高概率分布,根据均方根波高和平均波高推导出相应的波高概率分布表达式.

用最大信息熵原理推求波高概率分布时,对风浪的风速、水深、风区等并无严格限制.风浪槽试验结果和连云港实测资料的验证分析表明:最大熵法推导出的不同水深波高概率分布与实际资料很吻合,和拟合试验分布的三参数 Γ 分布很接近.而 Глуховский 分布与试验分布有很大差异,前者在平均波高处密度值偏低,而在较小或较大波高处密度值偏高,且这种趋势随水深的变浅而增强.

根据最大熵法求波高分布时,只计及波高二阶矩,而波高高阶矩未计及,若要建立更细致准确的波高分布,需计入更高阶矩.

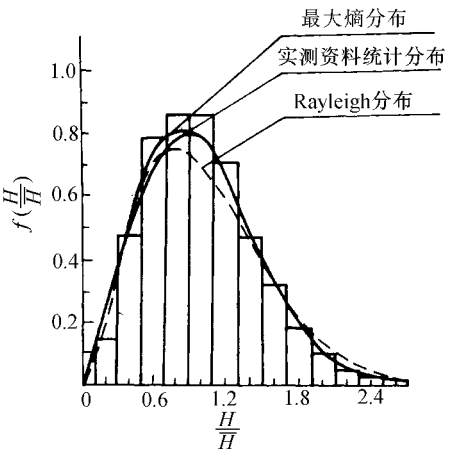


图 2 波高概率密度曲线

Fig.2 Wave height probability density curve

参考文献:

[1] 孟庆生.信息论[M].西安 西安交通大学出版社,1987.21~69.

[2] 洪广文.关于浅水风浪统计性质和统计方法若干问题的探讨[J].华东水利学院学报,1978,6(1) 35~45.

[3] 洪广文.关于浅水风浪统计性质和统计方法若干问题的探讨(续)[J].华东水利学院学报,1978,6(2) 50~71.

[4] 王超,张希农,张景绘.随机振动的信息量及最大熵概率估计[J].应用力学学报,1989,6(2) 76~80.

Application of Maximum Entropy Principle Method in Wave Height Distribution

XU Fu-min

(College of Harbour Waterway and Coastal Engineering, Hohai Univ., Nanjing 210098, China)

Abstract The maximum entropy principle method and the corresponding probability evaluation method are introduced, and the maximum entropy probability distribution expression is deduced in two-degree moment. Fully developed wave height distribution in deep water and that at different depths are obtained by MEP method, furthermore, the wave height distribution for the Lianyung port is also obtained by this method, and the obtained distributions are compared with real distributions.

Key words : maximum entropy principle method (MEP) ;probability evaluation ;wave height distribution