

# 厚、薄板稳定分析的干扰能量法

邵国建, 卓家寿

(河海大学土木工程学院, 江苏南京 210098)

**摘要** 采用由 Mindilin 板理论建立的四结点通用板单元, 提出了利用干扰能量法确定板失稳时的临界载荷, 建立了板失稳的能量准则. 算例结果表明本文方法的合理性和通用性.

**关键词** 板单元 稳定分析 干扰能量准则 临界载荷

**中图分类号** :TU311.2

**文献标识码** :A

**文章编号** :1000-1980(2000)01-0091-05

物体的平衡可能是稳定的、不稳定的或者是随遇的. 为判别稳定性, 由 Dirichlet 和 Kelvin 所提出的经典定义认为<sup>[1]</sup> 如由任一种瞬间的扰动作用所造成的物体附加位移, 在扰动本身任意小时, 其幅度总可以任意小, 则物体处于稳定状态; 反之, 若任意小的某一扰动会导致有限幅度变化, 则为不稳定的. 显然, 要论证某一平衡位形是稳定的, 必须考察所有可能的偏离, 只有当它们均能回复到原位时才能作出该平衡位形是稳定的结论, 而要证明某一平衡位形是不稳定的或临界的, 则只要有一种偏离使其不能恢复原位或在新位形保证平衡, 就可肯定地作出结论——它是不稳定的或临界的. 针对这些问题, 本文采用由 Mindilin 板理论建立的四结点通用板单元, 从防止剪切闭锁的机理出发, 板挠度采用分级插值, 转角采用双线性插值, 强加剪应变采用双线性插值, 此种单元经文献[2]中应用表明能适用于厚、薄板弯曲问题分析. 在板的稳定分析时, 从能量观点出发, 用具有待定系数的振型叠加法确定最不利干扰位移, 求出相应的最小干扰能量值, 由干扰能量准则来确定板失稳时的临界载荷.

## 1 基于 Mindilin 板理论的四结点通用板单元

### 1.1 Mindilin 板理论的势能泛函

$$\Pi_b = \frac{1}{2} \iint_A \mathbf{k}^T \mathbf{D}_b \mathbf{k} dA + \frac{1}{2} \iint_A \boldsymbol{\gamma}^T \mathbf{D}_s \boldsymbol{\gamma} dA - \iint_A w q dA - \int_{s_g} (\overline{M}_n \theta_n + \overline{M}_{ns} \theta_s + \overline{Q}_n w) ds \quad (1)$$

式中:  $w$ ——板的挠度;  $\theta_n, \theta_s$ ——法向和切向转角;  $\mathbf{D}_b$ ——弯曲弹性矩阵;  $\mathbf{D}_s$ ——剪切弹性矩阵;  $\mathbf{k}$ ——板之曲率;  $\boldsymbol{\gamma}$ ——剪切应变.

### 1.2 四结点通用板单元的位移插值和剪应变插值

坐标采用双线性插值, 为

$$x = \sum_{i=1}^4 N_i x_i \quad y = \sum_{i=1}^4 N_i y_i \quad (2)$$

其中

$$N_i = \frac{1}{4} (1 + \xi \xi_i) (1 + \eta \eta_i) \quad (3)$$

位移插值考虑转角的影响, 采用分级插值, 取为

$$\left. \begin{aligned} w &= \sum_{i=1}^4 N_i w_i + \sum_{i=1}^4 N_{xi} \theta_{xi} + \sum_{i=1}^4 N_{yi} \theta_{yi} \\ \theta_x &= \sum_{i=1}^4 N_i \theta_{xi} \quad \theta_y = \sum_{i=1}^4 N_i \theta_{yi} \end{aligned} \right\} \quad (4)$$

其中

$$N_{xi} = \frac{1}{8} (x_{ki} P_{ki} - x_{ij} P_{ij}) \quad N_{yi} = \frac{1}{8} (y_{ki} P_{ki} - y_{ij} P_{ij}) \quad (5)$$

而

$$\left. \begin{aligned} P_{jk}(\xi, \eta) &= \frac{1}{2}(1 - \xi^2)(1 + \eta\eta_j) & (j = 1, 3; \eta_j = \mp 1) \\ P_{jk}(\xi, \eta) &= \frac{1}{2}(1 - \eta^2)(1 + \xi\xi_j) & (j = 2, 4; \xi_j = \pm 1) \end{aligned} \right\} \quad (6)$$

脚标用 FORTRAN 表述为  $i = 1, 2, 3, 4$ ;  $j = \text{MODE}(i, 4) + 1$ ;  $k = i - 1 + \text{INT}(1/i)$ .

剪应变采用双线性插值,为

$$\gamma = \begin{Bmatrix} \gamma_{xz} \\ \gamma_{yz} \end{Bmatrix} = \sum_{i=1}^4 \begin{bmatrix} N_i & 0 \\ 0 & N_i \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \gamma_{xi}^{DI} \\ \gamma_{yi}^{DI} \end{Bmatrix} \quad (7)$$

式中:  $\gamma_{xi}^{DI}, \gamma_{yi}^{DI}$ ——四边形四个角结点上的剪应变值,而上标  $DI$  表示它们的值直接由 Mindlin 板理论求得,可表示成

$$\begin{Bmatrix} \gamma_{xi}^{DI} \\ \gamma_{yi}^{DI} \end{Bmatrix} = \sum_{j=1}^4 \begin{bmatrix} N_{j,x}^{(i)} & (N_{xj,x} + N_j)^{(i)} & N_{yj,x}^{(i)} \\ N_{j,y}^{(i)} & N_{xj,y}^{(i)} & (N_{yj,y} + N_j)^{(i)} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} w_j \\ \theta_{xj} \\ \theta_{yj} \end{Bmatrix} \quad (8)$$

上标  $(i)$  表示在第  $i$  结点取值.

## 2 判别弹性系统平衡稳定性的能量准则与干扰能量法

Lagrange 体系下的势能泛函可表示为

$$\Pi = \int_{\Omega} A(e_{ij}) d\Omega - \int_{\Omega} f_i u_i d\Omega - \int_{s_{\sigma}} \bar{P}_i u_i ds = U - W \quad (9)$$

其中

$$U = \int_{\Omega} A(e_{ij}) d\Omega \quad W = \int_{\Omega} f_i u_i d\Omega + \int_{s_{\sigma}} \bar{P}_i u_i ds$$

式中:  $U$ ——体系的势能;  $W$ ——外力所作的功.

根据 Dirichlet 定理,物体在平衡位形上的势能  $\Pi$  具有极小值或极大值,若  $\Pi$  为极小值,该平衡位形是稳定的,其数学表达式为  $\delta\Pi = 0, \delta^2\Pi > 0$ ; 若  $\Pi$  为极大值,则该平衡是不稳定的,其数学表达式为  $\delta^2\Pi < 0$ ; 当  $\delta^2\Pi = 0$ ,表明物体在微小偏离前后势能不变,平衡是随遇的.

在数值分析时,  $\delta^2\Pi$  值可用考察体受扰动后势能的增量  $\Delta\Pi$  来表示,若设基本平衡位形的位移  $u_i^0$  和干扰位移  $\delta u_i$ ,这样,对扰动前后势能增量  $\Delta\Pi$ ,基于台劳级数展开为

$$\Delta\Pi = \Pi(u_i^0 + \delta u_i) - \Pi(u_i^0) = \delta\Pi + \frac{1}{2!}\delta^2\Pi + \dots \quad (10)$$

式中:  $\Pi(u_i^0)$ ——考察体在原有平衡位置的总势能;  $\Pi(u_i^0 + \delta u_i)$ ——考察体受到干扰位移  $\delta u_i$  后的总势能;  $\Delta\Pi$ ——相对于干扰位移  $\delta u_i$  引起的干扰能量.

由于扰动前的总势能具有驻值,即  $\delta\Pi = 0$ ,故近似有

$$\Delta\Pi = \frac{1}{2}\delta^2\Pi \quad (11)$$

显而易见,用  $\Delta\Pi$  值与  $\delta^2\Pi$  值一样可以判断考察体的稳定与否,而  $\Delta\Pi$  值可以通过数值计算方法得到.

在初始稳定性问题中,原先的平衡位置是处于小变形状态,经扰动失稳后应当考虑转角的影响,即应计入非线性效应.当分析初始稳定问题(求最小临界载荷)时,基于它相应小转角小应变及应变与转角同阶的平衡位形转变为小转角小应变及应变与转角平方项同阶的临界状态,经由文献[3]推导干扰能量的计算公式可表示为

$$\Delta\Pi = \sum_{e=1}^{Ne} \left[ \frac{1}{2} \Delta\delta^e \mathbf{k}^e \Delta\delta^e + \frac{1}{2} \Delta\delta^e \mathbf{k}_{\sigma}^e \Delta\delta^e + \int_{\Omega^e} \Delta\delta^e \mathbf{T} \mathbf{B} \sigma^0 d\Omega - \Delta\delta^e \mathbf{T} \mathbf{R}_e^0 \right] \quad (12)$$

对于整个系统,由虚功原理有

$$\sum_{e=1}^{Ne} \int_{\Omega^e} \Delta\delta^e \mathbf{T} \mathbf{B} \sigma^0 d\Omega = \sum_{e=1}^{Ne} \Delta\delta^e \mathbf{T} \mathbf{R}_e^0 \quad (13)$$

这样,系统的干扰能量计算公式为

$$\Delta \Pi = \sum_{e=1}^{Ne} \frac{1}{2} \Delta \delta^e \mathbf{T} \mathbf{k}^e \Delta \delta^e + \sum_{e=1}^{Ne} \frac{1}{2} \Delta \delta^e \mathbf{T} \mathbf{k}_\sigma^e \Delta \delta^e \tag{14}$$

式中： $\mathbf{k}^e$ ——板单元刚度矩阵； $\mathbf{k}_\sigma^e$ ——板单元几何刚度矩阵。

3 板单元的刚度矩阵和几何刚度矩阵

3.1 单元刚度矩阵

将式(4)~(7)代入泛函公式(1)就可建立  $12 \times 12$  阶的板单元刚度矩阵,对应每一子块可写为

$$\mathbf{k}_{ij}^e = \mathbf{k}_{bij}^e + \mathbf{k}_{sij}^e \quad (i, j = 1, 2, 3, 4) \tag{15}$$

其中

$$\mathbf{k}_{bij}^e = \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \mathbf{B}_{bi}^T \mathbf{D}_b \mathbf{B}_{bj} \det J d\xi d\eta$$

$$\mathbf{k}_{sij}^e = \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \mathbf{B}_{si}^T \mathbf{D}_s \mathbf{B}_{sj} \det J d\xi d\eta$$

而  $\mathbf{B}_{bi} = \begin{bmatrix} 0 & N_{i,x} & 0 \\ 0 & 0 & N_{i,y} \\ 0 & N_{i,y} & N_{i,x} \end{bmatrix}$   $\mathbf{B}_{si} = \begin{bmatrix} \sum_{j=1}^4 N_j N_{i,x}^{(j)} & \sum_{j=1}^4 N_j (N_{xi,x} + N_i)^{(j)} & \sum_{j=1}^4 N_j (N_{yi,x})^{(j)} \\ \sum_{j=1}^4 N_j N_{i,y}^{(j)} & \sum_{j=1}^4 N_j (N_{xi,y})^{(j)} & \sum_{j=1}^4 N_j (N_{yi,y} + N_{(i)})^{(j)} \end{bmatrix}$

式中： $\mathbf{k}_{bij}^e$ ——弯曲项； $\mathbf{k}_{sij}^e$ ——剪切项； $\mathbf{B}_{bi}$ 、 $\mathbf{B}_{si}$ ——弯曲应变矩阵和剪切应变矩阵；上标 $(j)$ 在第  $j$  结点取值。

3.2 单元几何刚度矩阵

在 Von Karman 假设下,略去薄膜应变分量的平方项和薄膜应变分量与转角的乘积项后,经由文献[4]推导,对单元几何刚度矩阵中每一小块可写成

$$\mathbf{k}_{\sigma ij}^e = \mathbf{k}_{\sigma bij}^e + \mathbf{k}_{\sigma sij}^e \quad (i, j = 1, 2, 3, 4) \tag{16}$$

其中

$$\mathbf{k}_{\sigma bij}^e = \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \mathbf{G}_{bi}^T \boldsymbol{\sigma} \mathbf{G}_{bj} h \det J d\xi d\eta$$

$$\mathbf{k}_{\sigma sij}^e = \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \mathbf{G}_{s1i}^T \boldsymbol{\sigma} \mathbf{G}_{s1j} \frac{h^3}{12} \det J d\xi d\eta + \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \mathbf{G}_{s2i}^T \boldsymbol{\sigma} \mathbf{G}_{s2j} \frac{h^3}{12} \det J d\xi d\eta$$

而

$$\mathbf{G}_{bi} = \begin{bmatrix} \frac{\partial N_i}{\partial x} & \frac{\partial N_{xi}}{\partial x} & \frac{\partial N_{yi}}{\partial x} \\ \frac{\partial N_i}{\partial y} & \frac{\partial N_{xi}}{\partial y} & \frac{\partial N_{yi}}{\partial y} \end{bmatrix} \quad \mathbf{G}_{s1i} = \begin{bmatrix} 0 & \frac{\partial N_i}{\partial x} & 0 \\ 0 & \frac{\partial N_i}{\partial y} & 0 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{G}_{s2i} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \frac{\partial N_i}{\partial x} \\ 0 & 0 & \frac{\partial N_i}{\partial y} \end{bmatrix} \quad \boldsymbol{\sigma} = \begin{bmatrix} \sigma_x & \tau_{xy} \\ \tau_{xy} & \sigma_y \end{bmatrix}$$

式(16)中第二项与剪切应变有关的几何刚度矩阵,在薄板问题中可略去,可是对厚板有影响,应计入此项<sup>[5]</sup>。

4 最不利干扰位移的确定

干扰能量法的实施,首先要寻找最不利干扰位移。最不利干扰位移应使干扰能量  $\Delta \Pi$  出现极值,即要求  $\frac{\partial (\Delta \Pi)}{\partial (\delta u_i)} = 0$ ；其次,干扰位移是微小的,且必须满足位移协调条件的可能位移。基于此观点,干扰位移可由带有待定系数的振型函数叠加得到。单元结点的干扰位移可取下式所示：

$$\Delta \delta^e = u_0^e + \alpha_1 \delta_1^e + \alpha_2 \delta_2^e + \cdots + \alpha_n \delta_n^e \tag{17}$$

式中： $u_0^e$ ——单元结点干扰位移的初始设定项,它只需满足协调条件； $\delta_i^e$ ——第  $i$  阶振型单元结点的振幅； $\alpha_i$ ——不依赖于坐标的待定常数。因最不利干扰位移是使干扰能量值为最小的干扰位移,这样,由式

$$\frac{\partial \Delta \Pi}{\partial \alpha_i} = 0 \tag{18}$$

可得到一组关于求解  $\alpha_i$  的线性方程组,求得  $\alpha_i$  后再代回到式(17)便可得到最不利干扰位移. 计算实践表示,前几阶低频振型是主要项,式(17)中一般取3~5阶振型计算即可.

当然,确定最不利干扰位移的其它途径也是可能的,尤其对板类结构的屈曲问题,例如,可假设结构具有某种类型的初缺陷,而那种在结构变形过程中增长最快的缺陷模态将对应于相应的本征模态(即分叉状态)<sup>[6]</sup>.

5 数值算例

5.1 矩形板的纵向屈曲

图1所示的方板,板面尺寸  $a \times a = 1.0 \times 1.0$ ,弹性模量  $E = 10\,920$ ,泊松比  $\mu = 0.3$ ,质量密度  $\rho = 1.0$ ,临界屈曲因子  $K_c = \frac{a^2 \sigma_{cr} h}{\pi^2 D}$ ,其中  $D = \frac{Eh^3}{12(1-\mu^2)}$ ,  $h$  为板的厚度. 由于对称,取1/4板来进行分析. 采用本文方法,对不同厚度方板在不同约束、不同载荷及不同网格情况下计算的干扰能量值和相应求得的屈曲因子分别列于表1~2.

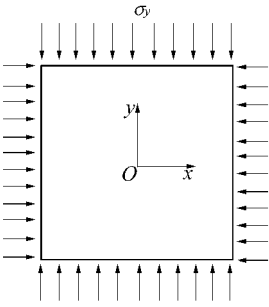


图1 矩阵方板  
Fig.1 Square plate

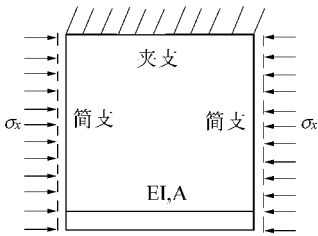


图2 加肋方板  
Fig.2 Square plate added to beam

5.2 加肋矩形板的屈曲

图2所示的加肋矩形方板,两对边简支受均布压力  $\sigma_x$ ,一边夹支,加肋边自由,弹性模量  $E = 10\,920$ ,泊松比  $\mu = 0.3$ ,方板边长  $a = 1.0$ ,厚度  $h = 0.01$ ,  $EI/(aD) = 0.6$ ,  $A/(ah) = 0.063\,5$ ,  $A$  为加肋横截面面积,临界应力  $\sigma_{xcr} = K_c \pi^2 D/(a^2 h)$ ,其中  $K_c$  为屈曲因子,本文分  $4 \times 4, 8 \times 8$  网格分析,计算结果列于表3.

表1 四边简支方板单向受压计算成果

Table 1 Simply supported square plate subjected to uniaxial compression

| 厚度         | 网格           | 干扰能量值                     |                            |                            | 屈曲因子 $K_c$         |       |                      |
|------------|--------------|---------------------------|----------------------------|----------------------------|--------------------|-------|----------------------|
|            |              | $\sigma_x = 0.036$        | $\sigma_x = 0.039$         | $\sigma_x = 0.04$          | 级数解 <sup>[5]</sup> | 本文解   | 薄板理论解 <sup>[7]</sup> |
| $h = 0.01$ | $2 \times 2$ | $0.261\,1 \times 10^{-7}$ | $-0.582\,6 \times 10^{-7}$ | $-0.863\,8 \times 10^{-7}$ | 4.0                | 3.742 | 4.0                  |
|            | $4 \times 4$ | $0.857\,2 \times 10^{-7}$ | $-0.563\,4 \times 10^{-8}$ | $-0.360\,8 \times 10^{-7}$ | 4.0                | 3.933 | 4.0                  |
|            | $8 \times 8$ | $0.102\,8 \times 10^{-6}$ | $0.964\,6 \times 10^{-8}$  | $-0.214\,0 \times 10^{-7}$ | 4.0                | 3.983 | 4.0                  |
| 厚度         | 网格           | 干扰能量值                     |                            |                            | 屈曲因子 $K_c$         |       |                      |
|            |              | $\sigma_x = 90.0$         | $\sigma_x = 95.0$          | $\sigma_x = 100.0$         | 级数解 <sup>[5]</sup> | 本文解   | 薄板理论解 <sup>[7]</sup> |
| $h = 0.05$ | $2 \times 2$ | $0.144\,6 \times 10^{-2}$ | $-0.579\,7 \times 10^{-2}$ | $-0.130\,4 \times 10^{-1}$ | 3.944              | 3.688 | 4.0                  |
|            | $4 \times 4$ | $0.864\,3 \times 10^{-2}$ | $0.797\,3 \times 10^{-3}$  | $-0.704\,9 \times 10^{-2}$ | 3.944              | 3.871 | 4.0                  |
|            | $8 \times 8$ | $0.107\,1 \times 10^{-1}$ | $0.270\,9 \times 10^{-2}$  | $-0.529\,2 \times 10^{-2}$ | 3.944              | 3.919 | 4.0                  |
| 厚度         | 网格           | 干扰能量值                     |                            |                            | 屈曲因子 $K_c$         |       |                      |
|            |              | $\sigma_x = 340.0$        | $\sigma_x = 370.0$         | $\sigma_x = 400.0$         | 级数解 <sup>[5]</sup> | 本文解   | 薄板理论解 <sup>[7]</sup> |
| $h = 0.1$  | $2 \times 2$ | $0.286\,3 \times 10^{-1}$ | $-0.661\,3 \times 10^{-1}$ | $-0.160\,9$                | 3.786              | 3.537 | 4.0                  |
|            | $4 \times 4$ | $0.853\,0 \times 10^{-1}$ | $-0.174\,7 \times 10^{-1}$ | $-0.120\,2$                | 3.786              | 3.697 | 4.0                  |
|            | $8 \times 8$ | 0.1015                    | $-0.329\,6 \times 10^{-2}$ | $-0.108\,1$                | 3.786              | 3.739 | 4.0                  |
| 厚度         | 网格           | 干扰能量值                     |                            |                            | 屈曲因子 $K_c$         |       |                      |
|            |              | $\sigma_x = 1\,200.0$     | $\sigma_x = 1\,250.0$      | $\sigma_x = 1\,300.0$      | 级数解 <sup>[5]</sup> | 本文解   | 薄板理论解 <sup>[7]</sup> |
| $h = 0.2$  | $2 \times 2$ | $0.193\,3 \times 10^{-1}$ | -0.4114                    | $-0.842\,1$                | 3.2634             | 3.045 | 4.0                  |
|            | $4 \times 4$ | 0.3920                    | $-0.763\,3 \times 10^{-1}$ | $-0.544\,7$                | 3.2634             | 3.146 | 4.0                  |
|            | $8 \times 8$ | 0.4997                    | $0.215\,3 \times 10^{-1}$  | $-0.456\,7$                | 3.2634             | 3.172 | 4.0                  |

表 2  四边夹支方板单向受压计算成果(厚度  $h = 0.01$ )

| Table 2  Clamped supported square plate subjected to uniaxial compression and biaxial compression ( $h = 0.01$ ) |                         |                          |            |                      |                              |                              |            |                      |
|------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|-------------------------|--------------------------|------------|----------------------|------------------------------|------------------------------|------------|----------------------|
| 网格                                                                                                               | 单向受压                    |                          |            |                      | 双向受压                         |                              |            |                      |
|                                                                                                                  | 干扰能量值                   |                          | 屈曲因子 $K_c$ |                      | 干扰能量值                        |                              | 屈曲因子 $K_c$ |                      |
|                                                                                                                  | $\sigma_x = 340.0$      | $\sigma_x = 370.0$       | 本文解        | 薄板理论解 <sup>[7]</sup> | $\sigma_x = \sigma_y = 10.0$ | $\sigma_x = \sigma_y = 11.0$ | 本文解        | 薄板理论解 <sup>[7]</sup> |
| 4 × 4                                                                                                            | $0.2676 \times 10^{-4}$ | $-0.2554 \times 10^{-4}$ | 5.437      | 5.315                | $0.1915 \times 10^{-3}$      | $-0.6999 \times 10^{-4}$     | 10.873     | 10.07                |
| 8 × 8                                                                                                            | $0.1066 \times 10^{-5}$ | $-0.4805 \times 10^{-4}$ | 5.387      | 5.315                | $0.1558 \times 10^{-4}$      | $-0.2971 \times 10^{-4}$     | 10.480     | 10.07                |

表 3  加肋方板单向受压计算成果  
Table 3  Square plate added to beam subjected to uniaxial compression

| 网格    | 干扰能量值                    |                           | 屈曲因子               |       |         |
|-------|--------------------------|---------------------------|--------------------|-------|---------|
|       | $\sigma_x = 2.6$         | $\sigma_x = 2.8$          | 解析解 <sup>[8]</sup> | 本文解   | 误差      |
| 4 × 4 | $0.10328 \times 10^{-3}$ | $-0.19536 \times 10^{-3}$ | 2.815              | 2.704 | - 3.94% |
| 8 × 8 | $0.19407 \times 10^{-3}$ | $-0.70893 \times 10^{-4}$ | 2.815              | 2.783 | - 1.14% |

6  结    语

采用文中的通用板单元,基于能量观点提出的干扰能量法求解板失稳时的临界载荷,从算例结果可看出:用于薄板情况,本文结果与薄板理论解很接近;用于厚板情况,结果与厚板理论解很接近.由此表明本文方法对厚、薄板失稳分析均实用,并且计算结果稳定,具有较高的精度和较快的收敛性,说明本文方法的合理性和通用性.

参考文献:

[1] Hill R. On uniqueness and stability in the theory of finite elastic strain[J]. J Mech Phys Solids, 1957(5): 229 ~ 241.  
[2] 邵国建,卓家寿. 一种简单有效通用的厚、薄板壳元[J]. 河海大学学报,1997,25(1): 81 ~ 86.  
[3] 卓家寿,邵国建,陈振雷. 工程稳定问题中确定滑塌面、滑向与安全度的干扰能量法[J]. 水利学报,1997(8): 80 ~ 84.  
[4] 邵国建. 一种新的通用板壳元模式及其应用[D]:[学位论文]. 南京: 河海大学,1997.  
[5] Hinton E. Numerical methods software. Swansea, U K: Pineridge Press, 1988. 1 ~ 47.  
[6] 黄筑平. 有限变形弹塑性问题中解的唯一性和稳定性[A]. 见: 中国力学学会办公室,中国科学院力学研究所 LNM 开放实验室编. 材料和结构的不稳定性[C]. 北京: 科学出版社,1993. 7 ~ 19.  
[7] 朱伯芳. 有限单元原理与应用[M]. 北京: 水利电力出版社,1979. 100 ~ 410.  
[8] Timoshenko S P. Theory of elastic stability. 2nd edition[M]. New York: McGraw-Hill,1961. 10 ~ 250.

Disturbing Energy Method for Stability Analysis of Thick and Thin Plates  
SHAO Guo-jian, ZHUO Jia-shou

(College of Civil Engineering, Hohai Univ., Nanjing 210098, China)

**Abstract** :A versatile 4-node plate element of Mindlin plate theory is used in this paper. The disturbing energy method is used to determine the critical loads for plate bucking, and a corresponding energy criterion is presented for plates at loss of stability. The results of numerical examples show that this method is feasible and versatile.  
**Key words** :plate element ; stability analysis ; disturbing energy criterion ; critical load