

模拟夹层的大变形有限元等厚节理单元模型

曹文贵, 速宝玉

(河海大学水利水电工程学院, 江苏南京 210098)

摘要 利用大变形有限元基本理论, 提出了模拟夹层的大变形有限元等厚节理单元模型, 并推导了其相关的大变形有限元计算公式, 解决了夹层的大变形有限元模拟计算问题.

关键词 等厚节理单元 有限元方法 大变形

中图分类号 O242.21

文献标识码 A

文章编号 1000-1980(2000)03-0026-04

E. L. Wilson^[1]提出的模拟夹层的等厚节理单元模型对于小变形有限元模拟含充填物不连续结构面的变形计算起了关键作用, 但是, 还存在两个方面的问题. 首先, 要把它用于大变形有限元模拟计算还存在计算方法上的问题, 这给节理单元大变形有限元分析形成了障碍; 其次, 从 E. L. Wilson 建立的等厚节理单元模型可以看出, 等厚节理单元应变中一个分量仅与节理单元中的两个节点位移有关, 这显然是不合理的, 单元应变应该与单元四个节点的位移都相关. 本文从夹层的变形特点出发, 建立模拟夹层变形力学机理的大变形有限元等厚节理单元模型, 成功地解决了这两个方面的问题.

1 单元应变与节点位移关系的建立

如图 1 所示, 设在局部坐标系 $s-t$ 下单元应变表示为 $\epsilon = [\epsilon_{ss}, \epsilon_{tt}, \epsilon_{st}]^T$, 单元节点位移 $\Delta q = [u_1, v_1, u_2, v_2, u_3, v_3, u_4, v_4]^T$, E. L. Wilson^[1]建立的模拟夹层的等厚节理单元模型的应变与节点位移的关系可表述如下:

$$\begin{aligned}\epsilon_{ss} &= \frac{1}{L}(u_2 - u_1) \\ \epsilon_{tt} &= \frac{1}{h} \left[- \left(1 - \frac{s}{L} \right) v_1 - \frac{s}{L} v_2 + \frac{s}{L} v_3 + \left(1 - \frac{s}{L} \right) v_4 \right] \\ \epsilon_{st} &= \frac{1}{h} \left[- \left(1 - \frac{s}{L} \right) u_1 - \frac{s}{L} u_2 + \frac{s}{L} u_3 + \left(1 - \frac{s}{L} \right) u_4 \right] + \frac{1}{L} v_2 - \frac{1}{L} v_1\end{aligned}$$

由此可以看出: ϵ_{ss} 只与节点 1 和 2 的 s 方向位移相关, 这显然是不合理的, 单元应变应该与单元所有节点的位移相关, 为此, 将根据夹层变形特点建立模拟夹层变形机理的等厚节理单元的应变与节点位移的关系.

等厚节理单元有一个明显的特点就是长和宽相差很大, 而且, 宽的实际尺寸也很小, 这样, 可以认为沿 t 的方向的应变为一常量, 并设位移沿 s 方向线性变化, 则单元沿 s 方向的正应变可以用下式计算:

$$\begin{aligned}\epsilon_{ss} &= \frac{1}{2} \left(\frac{u_2 - u_1}{L} + \frac{u_3 - u_4}{L} \right) = \\ &= -\frac{1}{2L} u_1 + \frac{1}{2L} u_2 + \frac{1}{2L} u_3 - \frac{1}{2L} u_4 = \\ &= -Hu_1 + Hu_2 + Hu_3 - Hu_4\end{aligned}\tag{1}$$

式中: $H = \frac{1}{2L}$, L 为单元长度. 1-2 及 4-3 边上任意一点 t 方向位移分别为

$$v_i = v_1 + (v_2 - v_1) \frac{s}{L} \quad v_j = v_4 + (v_3 - v_4) \frac{s}{L}$$

于是 $\epsilon_u = \frac{v_j - v_i}{h} =$

$$\frac{1}{h} \left[- \left(1 - \frac{s}{L} \right) v_1 - \frac{s}{L} v_2 + \frac{s}{L} v_3 + \left(1 - \frac{s}{L} \right) v_4 \right] =$$

$$\frac{1}{h} (-L_1 v_1 - L_2 v_2 + L_2 v_3 + L_1 v_4) \quad (2)$$

式中 h 为单元厚度. 1-2 和 4-3 边上任意一点 s 方向位移分别为

$$u_i = u_1 + (u_2 - u_1) \frac{s}{L} \quad u_j = u_4 + (u_3 - u_4) \frac{s}{L}$$

1-4 和 2-3 边任意一点 t 方向位移为

$$v_k = \frac{v_1 + v_4}{2} \quad v_n = \frac{v_2 + v_3}{2}$$

则

$$\epsilon_{st} = \frac{u_j - u_i}{h} + \frac{v_n - v_k}{L} =$$

$$\frac{1}{h} (-L_1 u_1 - L_2 u_2 + L_2 u_3 + L_1 u_4) + (-H v_1 + H v_2 + H v_3 - H v_4) \quad (3)$$

则由式(1)(2)和(3)可得

$$\epsilon = \begin{bmatrix} -H & 0 & H & 0 & H & 0 & -H & 0 \\ 0 & -\frac{L_1}{h} & 0 & -\frac{L_2}{h} & 0 & \frac{L_2}{h} & 0 & \frac{L_1}{h} \\ -\frac{L_1}{h} & -H & -\frac{L_2}{h} & H & \frac{L_2}{h} & H & \frac{L_1}{h} & -H \end{bmatrix} q = Bq \quad (4)$$

式中 B 为几何矩阵. 这样, 等厚节理单元应变与位移之间的关系就建立起来了, 从上式可以看出: 单元应变与单元 4 个节点的位移都相关, 这是合理的.

2 等厚节理单元大变形有限元分析的方法

对于大变形增量问题, 采用不同参考坐标系建立的有限元基本方程是不同的, 主要方法有欧拉列式法、全拉格朗日列式法及修正的拉格朗日列式法. 这里仅介绍利用修正的拉格朗日列式法建立的大变形有限元基本方程. 大变形增量问题有限元基本方程可表述为^[2,3]

$$(K_L + K_N) \Delta q = \Delta F \quad (5)$$

式中: K_N —— t 时刻几何刚度矩阵, 它表示 t 时刻真实应力 σ 在 Δt 时间间隔内由于变形产生的对结构刚度的影响; K_L —— t 时刻常规有限元刚度矩阵; Δq ——节点位移增量矩阵; ΔF ——节点载荷增量矩阵. 由此可以看出: 利用等厚节理单元模型对夹层进行大变形有限元分析的关键在于解决 K_L 及 K_N 的计算方法.

根据一般有限元基本理论^[2,3], 由式(4)可以很容易得到形函数 N_i 对 s 或 t 的导数

$$\begin{cases} N_{1,1} = \frac{\partial N_1}{\partial s} = -H \\ N_{1,2} = \frac{\partial N_1}{\partial t} = -\frac{L_1}{h} \end{cases} \quad \text{及} \quad \begin{cases} N_{2,1} = \frac{\partial N_2}{\partial s} = H \\ N_{2,2} = \frac{\partial N_2}{\partial t} = -\frac{L_2}{h} \end{cases} \quad (6)$$

$$\begin{cases} N_{3,1} = \frac{\partial N_3}{\partial s} = H \\ N_{3,2} = \frac{\partial N_3}{\partial t} = -\frac{L_2}{h} \end{cases} \quad \text{及} \quad \begin{cases} N_{4,1} = \frac{\partial N_4}{\partial s} = -H \\ N_{4,2} = \frac{\partial N_4}{\partial t} = \frac{L_1}{h} \end{cases} \quad (7)$$

于是, 等厚节理单元大变形有限元分析的有关计算公式可表述如下:

$$K_L = \int_{t_v} B^T C B dv = h \int_0^L B^T C B ds$$

$$K_N = \int_{t_v} (\tilde{G}^T \tilde{M} \tilde{G} - 2 \tilde{B}^T \tilde{M} \tilde{B}) dv = h \int_0^L (\tilde{G}^T \tilde{M} \tilde{G} - 2 \tilde{B}^T \tilde{M} \tilde{B}) ds$$

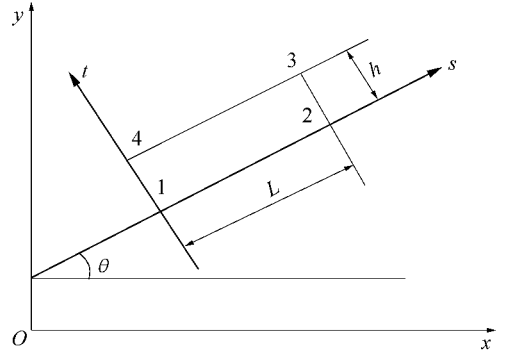


图 1 等厚节理单元计算

Fig.1 Computation of equithickness joint element

$$B = \begin{bmatrix} -H & 0 & H & 0 & H & 0 & -H & 0 \\ 0 & -\frac{L_1}{h} & 0 & -\frac{L_2}{h} & 0 & \frac{L_2}{h} & 0 & \frac{L_1}{h} \\ -\frac{L_1}{h} & -H & -\frac{L_2}{h} & H & \frac{L_2}{h} & H & \frac{L_1}{h} & -H \end{bmatrix}$$

$$\tilde{B} = \begin{bmatrix} -H & 0 & H & 0 & H & 0 & -H & 0 \\ -\frac{L_1}{2h} & -\frac{H}{2} & -\frac{L_2}{2h} & \frac{H}{2} & \frac{L_2}{2h} & \frac{H}{2} & \frac{L_1}{2h} & -\frac{H}{2} \\ -\frac{L_1}{2h} & -\frac{H}{2} & -\frac{L_2}{2h} & \frac{H}{2} & \frac{L_2}{2h} & \frac{H}{2} & \frac{L_1}{2h} & -\frac{H}{2} \\ 0 & -\frac{L_1}{h} & 0 & -\frac{L_2}{h} & 0 & \frac{L_2}{h} & 0 & \frac{L_1}{h} \end{bmatrix}$$

$$\tilde{G} = \begin{bmatrix} -H & 0 & H & 0 & H & 0 & -H & 0 \\ -\frac{L_1}{h} & 0 & -\frac{L_2}{h} & 0 & \frac{L_2}{h} & 0 & \frac{L_1}{h} & 0 \\ 0 & -H & 0 & H & 0 & H & 0 & -H \\ 0 & -\frac{L_1}{h} & 0 & -\frac{L_2}{h} & 0 & \frac{L_2}{h} & 0 & \frac{L_1}{h} \end{bmatrix}$$

$\tilde{M}$ 为柯西应力张量. 求解大变形有限元基本方程式(5)可得节点位移增量 Δq . 由单元节点位移进行插值, 得到单元内任意一点位移增量

$$\Delta u = \sum_{i=1}^4 N_i \Delta u_i \quad \Delta v = \sum_{i=1}^4 N_i \Delta v_i$$

由此并注意到式(6)(7)可得

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial \Delta u}{\partial s} \\ \frac{\partial \Delta u}{\partial t} \\ \frac{\partial \Delta v}{\partial s} \\ \frac{\partial \Delta v}{\partial t} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -H & 0 & H & 0 & H & 0 & -H & 0 \\ -\frac{L_1}{h} & 0 & -\frac{L_2}{h} & 0 & \frac{L_2}{h} & 0 & \frac{L_1}{h} & 0 \\ 0 & -H & 0 & H & 0 & H & 0 & -H \\ 0 & -\frac{L_1}{h} & 0 & -\frac{L_2}{h} & 0 & \frac{L_2}{h} & 0 & \frac{L_1}{h} \end{bmatrix} \Delta q$$

于是, 可求得单元格林应变增量 ΔE_{ij} 分别为

$$\Delta E_{ss} = \frac{\partial \Delta u}{\partial s} + \frac{1}{2} \left[\left(\frac{\partial \Delta u}{\partial s} \right)^2 + \left(\frac{\partial \Delta v}{\partial s} \right)^2 \right]$$

$$\Delta E_{tt} = \frac{\partial \Delta v}{\partial t} + \frac{1}{2} \left[\left(\frac{\partial \Delta u}{\partial t} \right)^2 + \left(\frac{\partial \Delta v}{\partial t} \right)^2 \right]$$

$$\Delta E_{st} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial \Delta u}{\partial t} + \frac{\partial \Delta v}{\partial s} \right) + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial \Delta u}{\partial s} \frac{\partial \Delta u}{\partial t} + \frac{\partial \Delta v}{\partial s} \frac{\partial \Delta v}{\partial t} \right)$$

最后由大变形本构关系可求得第二皮奥拉—克西荷夫应力增量 ΔS_{ij} .

为了求柯西应力增量 $\Delta \sigma_{ji}$, 必须对 ΔS_{ij} 进行转换, 利用下式可得到柯西应力增量

$$\Delta \sigma_{ji} = \Delta S_{ji} + \left(\delta_{jm} \frac{\partial \Delta u_i}{\partial x_l} + \delta_{il} \frac{\partial \Delta u_j}{\partial x_m} + \frac{\partial \Delta u_i}{\partial x_l} \frac{\partial \Delta u_j}{\partial x_m} \right) \cdot \Delta S_{lm}$$

式中: δ_{ij} 为克罗克常数, 当 $i = j$ 时, $\delta_{ij} = 1$; 当 $i \neq j$ 时, $\delta_{ij} = 0$; $i, j = 1, 2$. 以上所述, 解决了利用修正的拉格朗日列式法求解夹层大变形有限元问题的方法.

3 算 例

为便于数值解与理论解进行比较, 取两端单向受压并含夹层的岩石试件为计算实例, 进行平面应变问题的弹性大变形有限元分析. 试件高为 20 cm, 宽为 10 cm, 试件受单向压

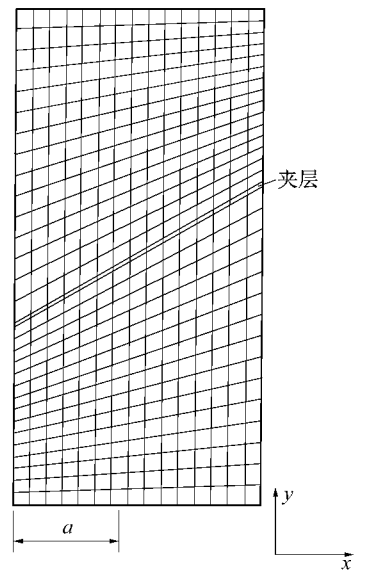


图2 有限元计算网格

Fig.2 The grid of computation for FEM

力为 $q = 160.0 \text{ kN/cm}$, 岩石弹模 $E = 0.7 \times 10^9 \text{ kPa}$ 及泊松比 $\mu = 0.20$, 夹层弹模 $E = 0.7 \times 10^9 \text{ kPa}$ 及泊松比 $\mu = 0.30$, 其有限元计算网格见图 2.

利用前述建立的等厚节理单元模型, 分别就大变形和常规小变形两种情况进行了分析. 对于夹层, 采用不同分析方法所得应力计算结果是一样的, 并且几乎都等于外荷载 (误差在 0.1% 以内), 这显然是合理的, 因为应力不会因为分析方法的改变而改变, 但是, 对于位移计算结果来讲, 采用不同的分析方法, 计算结果存在较大差距, 见表 1. 利用大变形方法计算的位移值较利用小变形方法计算的值要大, 这正反映了结构变形的几何非线性或大变形特性. 由此可见, 建立模拟夹层变形机理的大变形等厚节理单元模型是必要的.

表 1 夹层底面上节点位移计算结果

Table 1 Results of computation for displacement of nodal points on the bottom of joint		cm				
节点号		241	243	245	247	249
a^*		0.0000	1.3333	2.6667	4.0000	5.3333
大变形方法	x 向位移	-0.0020	0.0053	0.0114	0.0167	0.0219
	y 向位移	-0.1789	-0.1879	-0.2008	-0.2121	-0.2224
小变形方法	x 向位移	-0.0012	0.0034	0.0102	0.0113	0.0196
	y 向位移	-0.1601	-0.1792	-0.1892	-0.2070	-0.2151

* 节点至左边界的水平距离 (见图 2).

4 结 论

利用大变形有限元的基本理论, 解决了利用修正的拉格朗日列式法求解岩土工程夹层大变形有限元分析的模拟计算问题, 并就夹层变形的大变形和小变形情况用实例进行了对比分析, 可得到如下几个方面的结论:

- a. 本文建立的等厚节理单元模型之单元应变与节点位移的关系较前人的更为合理;
- b. 提出了模拟夹层力学变形机理的大变形有限元等厚节理单元模型, 并推导出了等厚节理大变形有限元分析的相关计算公式, 具有广泛的理论意义及工程实用价值.

参考文献:

[1] 于学馥, 刘怀恒, 方正昌. 地下工程围岩稳定分析 [M]. 北京: 煤炭工业出版社, 1983. 240 ~ 300.
[2] 何君毅, 林祥都. 工程结构非线性问题的数字解法 [M]. 北京: 国防工业出版社, 1994. 102 ~ 137.
[3] 曹文贵. 多步开挖工程蠕变损伤大变形有限元模拟及工程应用 [D]. [学位论文]. 北京: 北京科技大学, 1998.

A Model of Equithickness Joint Element for Finite Element Method
of Large Deformation in Simulating Joint with Fillings

CAO Wen-gui, SU Bao-yu

(College of Water Conservancy and Hydropower Engineering, Hohai Univ., Nanjing 210098, China)

Abstract Based on the basic theory of finite element method of large deformation, a new model of equithickness joint element is developed for finite element method of large deformation, and related formulas are deduced. The problems in simulation and computation with finite element method for large deformation for rock joints with fillings are successfully solved. The research result is of extensive theoretical significance and practical value to rock and soil engineering.

Key words equithickness joint element; finite element method; large deformation