

动力系统最优化的能量模型

谢能刚¹,王德信²,邱支振¹

(1. 华东冶金学院机械系,安徽马鞍山 243100;2. 河海大学土木工程学院,江苏南京 210098)

摘要 在动力系统的优化中,传统的以经济指标为目标函数的数学模型,有一定的局限性.本文用最
优控制理论建立能量模型,用有限元法求解系统的动力反应,模型综合考虑系统的安全性、经济性和
稳定性.计算实例验证了模型的合理性与可行性.
关键词 动力优化,最优控制,能量模型
中图分类号 :O316 **文献标识码** :A **文章编号** :1000-1980(2000)03-0030-04

由于动力系统最优化的复杂性,传统的做法是将系统的技术特性作为衡量设计方案好坏的指标,已不能
适应实际工程的需要.分析系统的动力反应时,更关心系统在动力过程中运行的安全性和稳定性.当系统遭
受激振时,系统耗散的能量越多,自身吸收的能量就越少,其安全性和稳定性越好.具有好的综合运行质量的
动力系统,总是“不为外界所动或者少动”.因此,需要建立一个能综合反映动力系统的安全性、经济性和稳定
性的质量指标作为衡量标准.

1 动力系统的最优化

1.1 一般描述

用动态最优控制理论中状态空间的概念,考虑具有 n 自由度的线性振动系统,其受控方程为

$$\frac{d\dot{q}(t,s)}{dt} = f(q(t,s),u(t),\varphi(s)) \tag{1}$$

其中,状态变量

$$q = \{q_1, q_2, \dots, q_n\}^T \in R^n$$

外控制变量

$$u = \{u_1, u_2, \dots, u_r\}^T \in R^r$$

内控制变量即系统参变量

$$\varphi = \{\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_k\}^T \in R^k$$

系统设计变量

$$s = \{s_1, s_2, \dots, s_m\}^T \in S^m$$

S^m 为 m 维设计变量空间.

状态速度 $f(q(t,s),u(t),\varphi(s)) = \{f_1(q,u,\varphi), f_2(q,u,\varphi), \dots, f_n(q,u,\varphi)\}^T \in R^n$

设 Φ 是内控制变量的空间 R^k 中的一个给定集合,它是控制变量 φ 容许值的集.定义函数类

$$\Phi_{ad} = \{\varphi(s) | \varphi(\cdot) : S^m \rightarrow R^k \text{ 是有界可测函数}, \varphi(s) \in \Phi, s \in S^m\}$$

称函数类 Φ_{ad} 为允许控制类, Φ_{ad} 中的每一个函数 $\varphi(s)$ 称为容许控制.

1.2 动力系统最优化

动力系统最优化指在容许控制类 Φ_{ad} 中寻求一个最优控制 $\varphi^*(s)$,使得相应于最优控制 $\varphi^*(s)$ 的解 $q^*(t,s)$ 为最优解.

图 1 所示的两个多自由度线性动力系统,基本方程为

$$M_1 \ddot{q}_1(t) + C_1 \dot{q}_1(t) + K_1 q_1(t) = u(t) \tag{2}$$

$$M_2 \ddot{q}_2(t) + C_2 \dot{q}_2(t) + K_2 q_2(t) = u(t) \tag{3}$$

式中: M ——质量矩阵; C ——阻尼矩阵; K ——劲度矩阵.

收稿日期:1999-01-06
基金项目:九五“攻关项目(06-221-04-02-01),高地震区高拱坝合理体型研究的一部分.
作者简介:谢能刚(1971—),男,安徽当涂人,博士研究生,水工结构专业.



图 1 动力系统

Fig.1 Dynamic system

在外荷载相同的条件下,系统的动力反应受控于模态参数 M 、 C 和 K ,它们共同构成控制变量空间.动力系统最优化就是在控制变量空间中寻找一个具有最优 M 、 C 和 K 的系统.

2 目标函数的能量模型

从众多的容许控制中找到所需的最优控制,必须有一个衡量系统本身性能好坏的指标,也就是目标函数,它应该综合反应动力系统的安全性、经济性、稳定性.

2.1 能量模型

根据动力系统最优控制理论^[1],利用 Pontryagin 最大值原理,令受控系统的目标函数为

$$F(\varphi(\cdot)) = \sup_{t \in [0, T]} H(x(t, s)) \quad (4)$$

式中 $H(x(t, s))$ 为哈密顿函数.

则动力系统优化问题变为寻求一个容许控制 $\varphi^*(\cdot) \in \Phi_{ad}$,使

$$F(\varphi^*(\cdot)) = \min_{\varphi(\cdot) \in \Phi_{ad}} F(\varphi(\cdot)) \quad (5)$$

从能量耗散的观点取哈密顿函数作为目标函数也是合理的,系统的哈密顿函数为

$$H(x(t, s)) = E_{\text{系统}}(t) = E_{\text{动}}(t) + E_{\text{势}}(t) = E_{\text{外}}(t) - Q_{\text{阻}}(t) \quad (6)$$

式中: $E_{\text{系统}}(t)$ ——系统在动力反应过程中 t 时刻的总能量; $E_{\text{动}}(t)$ ——系统在 t 时刻的动能; $E_{\text{势}}(t)$ ——系统在 t 时刻的势能; $E_{\text{外}}(t)$ ——从 $0 \rightarrow t$ 时刻外界传给系统的总能量; $Q_{\text{阻}}(t)$ ——从 $0 \rightarrow t$ 时刻系统耗散的能量.

因此,动力系统的目标函数实质是系统的能量,由于能量为标量,因此目标函数具有良好的可比性.

动力系统的拉格朗日函数为

$$\xi(q, \dot{q}) \text{ 或 } \xi(q_1, q_2, \dots, q_n, \dot{q}_1, \dot{q}_2, \dots, \dot{q}_n)$$

引入广义动量 $p = \frac{\partial \xi}{\partial \dot{q}}$, 哈密顿函数为^[2]

$$H(q, p) = p^T \cdot \dot{q} - \xi(q, \dot{q}) \quad (7)$$

2.2 动力反应求解

用有限单元法求解系统的动力反应,哈密顿函数的有限元表达式如下:

单元体的动能

$$T = \iiint_{V^e} \frac{\rho}{2} \dot{f}^T \dot{f} dv \quad (8)$$

式中: ρ ——单元密度; $\dot{f}$ ——位移列向量对时间的导数,即速度向量; V^e ——单元的体积.

单元体的形变势能

$$U = \iiint_{V^e} \frac{1}{2} \boldsymbol{\varepsilon}^T \boldsymbol{\sigma} dv \quad (9)$$

单元位移向量 f 采用位移模式

$$f = Nq^e$$

则有 $\dot{f} = N\dot{q}^e$ $\boldsymbol{\varepsilon} = Bq^e$ $\boldsymbol{\sigma} = DBq^e$

式中: q^e ——单元结点位移向量; N ——形函数; B ——应变转换矩阵; $\boldsymbol{\sigma}$ ——应力矩阵.

单元体的拉格朗日函数

$$\xi^e = T - U = \iiint_{V^e} \frac{\rho}{2} \dot{q}^{eT} N^T N \dot{q}^e dv - \iiint_{V^e} \frac{1}{2} q^{eT} B^T DB q^e dv \quad (10)$$

广义动量

$$\boldsymbol{p}^e = \frac{\partial \xi^e}{\partial \dot{\boldsymbol{q}}^e} = \iiint_{V^e} \rho \boldsymbol{N}^T \boldsymbol{N} \dot{\boldsymbol{q}}^e \mathrm{d}v$$

(11)

哈密顿函数

$$\begin{aligned} H^e &= \boldsymbol{p}^{e\mathrm{T}} \dot{\boldsymbol{q}}^e - \xi^e = \\ &= \left(\iiint_{V^e} \rho \boldsymbol{N}^T \boldsymbol{N} \dot{\boldsymbol{q}}^e \mathrm{d}v \right)^{\mathrm{T}} \dot{\boldsymbol{q}}^e - \iiint_{V^e} \frac{\rho}{2} \dot{\boldsymbol{q}}^{e\mathrm{T}} \boldsymbol{N}^T \boldsymbol{N} \dot{\boldsymbol{q}}^e \mathrm{d}v + \iiint_{V^e} \frac{1}{2} \boldsymbol{q}^{e\mathrm{T}} \boldsymbol{B}^T \boldsymbol{D} \boldsymbol{B} \boldsymbol{q}^e \mathrm{d}v = \\ &= \iiint_{V^e} \frac{\rho}{2} \dot{\boldsymbol{q}}^{e\mathrm{T}} \boldsymbol{N}^T \boldsymbol{N} \dot{\boldsymbol{q}}^e \mathrm{d}v + \iiint_{V^e} \frac{1}{2} \boldsymbol{q}^{e\mathrm{T}} \boldsymbol{B}^T \boldsymbol{D} \boldsymbol{B} \boldsymbol{q}^e \mathrm{d}v \end{aligned}$$

(12)

令

$$\boldsymbol{m}^e = \iiint_{V^e} \rho \boldsymbol{N}^T \boldsymbol{N} \mathrm{d}v \qquad \boldsymbol{k}^e = \iiint_{V^e} \boldsymbol{B}^T \boldsymbol{D} \boldsymbol{B} \mathrm{d}v$$

代入式(12)得

$$H^e = \frac{1}{2} \dot{\boldsymbol{q}}^{e\mathrm{T}} \boldsymbol{m}^e \dot{\boldsymbol{q}}^e + \frac{1}{2} \boldsymbol{q}^{e\mathrm{T}} \boldsymbol{k}^e \boldsymbol{q}^e$$

(13)

按单元集合在一起,可得整体哈密顿函数

$$H = \frac{1}{2} \dot{\boldsymbol{q}}^{\mathrm{T}} \boldsymbol{M} \dot{\boldsymbol{q}} + \frac{1}{2} \boldsymbol{q}^{\mathrm{T}} \boldsymbol{K} \boldsymbol{q}$$

(14)

式中: $\boldsymbol{M}$ ——整体质量矩阵; $\boldsymbol{K}$ ——整体劲度矩阵.

3 算 例

地震输入采用人工生成地震波.

例1 柱的横截面优化(图2).

柱高 $H=6\text{ m}$, 密度 2.0 kg/m^3 , 动弹性模量 $E=2\times 10^4\text{ MPa}$, 泊松比 $\mu=0.18$, 动应力允许值取 0.6 MPa , 截面积一定, 设计变量为 L, B . 地震峰值加速度取 $0.308g$. 优化结果见表1. 从表1可见, 在保持横截面积基本不变的情况下, 优化方案比初始方案降低了动应力与动位移.

表1 柱的计算结果

Table 1 Computation results for column

方案	设计变量		系统能量 / 10^3 J	横截面积 / m^2	最大动应力 / MPa	最大动位移 / cm
	L/m	B/m				
初 始	1.600	1.250	0.3088	2.0000	0.6583	0.2890
优 化	1.800	1.111	0.1456	1.9998	0.4918	0.1676

例2 重力坝断面优化(图3).

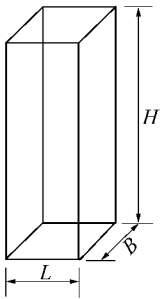


图2 柱
Fig.2 Column

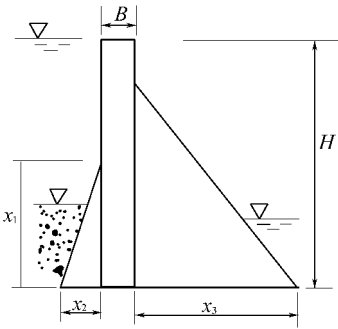


图3 重力坝基本断面示意
Fig.3 Section of gravity dam

某重力坝 坝高 $H=120.0\text{ m}$, 坝顶宽 $B=8.0\text{ m}$, 下游起坡点高 $H_1=100.0\text{ m}$, 动弹模 $E=2.73\times 10^4\text{ MPa}$, 泊松比为 0.18 , 密度 2.4 kg/m^3 , 动应力允许值取 4.0 MPa , 设计变量为 X_1, X_2, X_3 . 地震峰值加速度取 $0.308g$.

表 2 重力坝的计算结果

Table 2 Computation results for gravity dam

方案	设计变量/m			系统能量/ 10^3J	断面面积/ m^2	最大动应力/ MPa	最大动位移/ cm
	X_1	X_2	X_3				
初始	51.700	10.340	72.800	1 213.09	4 825.7	4.839	1.721
优化	53.808	8.389	56.210	1 026.70	3 996.2	3.862	1.009

表 2 给出了优化结果,可以看出优化方案不仅体现了经济性,断面面积比初始方案减小了 17.2%,而且最大动应力与动位移均降低了 15% 以上,充分体现了安全性和稳定性。

例 3 拱坝体型优化.

某拟建拱坝,坝高 292.0 m,坝体混凝土静弹模为 $2.10 \times 10^4 \text{ MPa}$,动弹模取静弹模的 1.3 倍,泊松比为 0.18,密度 2.4 kg/m^3 .上游倒悬度 $K_u \leq 0.30$,下游倒悬度 $K_D \leq 0.25$,最大中心角 $(\varphi_L + \varphi_R)_{\max} < 100^\circ$,允许应力值:正常蓄水位为 3.8~4.2 MPa,运行低水位适当放宽,设计变量 43 个.地震峰值加速度取 $0.308g$.

表 3 拱坝的计算结果

Table 3 Computation results for arch dam

方案	系统能量	混凝土方量	最大动拉应力	最大动位移	上游倒悬度	下游例悬度	最大中心角
	/ 10^6J	/ 10^4m^3	/ MPa	/ cm			/ $^\circ$
初 始	1 319.026	713.64	7.106	2.429	0.181	0.151	91.136
优 化	1 197.758	728.51	5.446	1.581	0.297	0.230	88.554

优化方案与初始方案对比如表 3,可见优化方案的混凝土方量比初始方案增加了 2.08%.最大动应力降低了 23.36%,最大中心角减小了 2.582 度.在增加少量经济投入的同时,大大增加了拱坝的安全性与稳定性.优化方案与初始方案的拱冠梁断面形状比较见图 4.

4 结 论

本文采用的能量模型能够反应出系统的综合特性,在对柱、重力坝、拱坝的动力优化中应用此模型,较大地降低了动应力与动位移,使系统的安全性和稳定性得到提高,弥补了传统的以经济指标为目标函数模型的不足,因此以最优控制理论建立的能量模型不仅可行,而且有效.

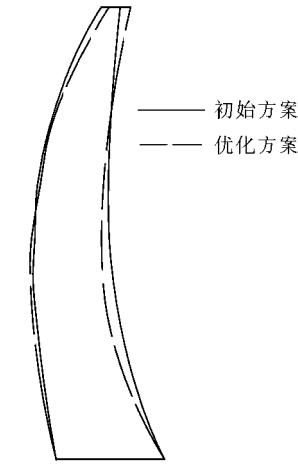


图 4 拱冠梁断面形状比较

Fig.4 Comparison of sectional forms of arch dam

参考文献:

[1] 王康宁.最优控制的数学理论[M].北京:国防工业出版社,1995.2~27.
[2] 钟万勰.弹性力学求解新体系[M].大连:大连理工大学出版社,1995.26~28.

An Energy Model for Dynamic System Optimization

XIE Neng-gang¹,WANG De-xin²,QIU Zhi-zhen¹

(1. East China University of Metallurgy , Ma' anshan 243100 , China ;
2. College of Civil Engineering , Hohai Univ. , Nanjing 210098 , China)

Abstract :In dynamic system optimization mathematical models with economic norms as their objective functions are to some extent of limitations. In this paper an energy model is established on the basis of the optimum control theory. In the model the safety , economy and stability of the dynamic system are all taken into account. The computation results for some cases prove the model to be reasonable and feasible.

Key words :dynamic optimization ;optimum control ;energy model