

Rosser 公式对偶形的存在及推导

邹姝稚¹, 唐立中²

(1. 扬州大学工学院计算机科学与工程系, 江苏扬州 225009; 2. 东南大学计算机科学与工程系, 江苏南京 210096)

摘要: Gödel 定理是数理逻辑发展中的一个里程碑, 但其最初表述并不完善. Rosser 公式克服了 Gödel 定理之不足, 从而最终解决了形式数论系统的完备性. 本文深入分析了 Gödel 提出“ ω 无矛盾”的初衷和 Rosser 公式的构造思路, 运用 Rosser 公式构造与证明中所疏漏的信息, 推导出了 Rosser 公式的对偶形式, 并给出了与此相关的定理. 通过这一研究将深化人们对数学系统相容性、完备性的认识.

关键词: 数理逻辑; 元数学; 相容性; 完备性

中图分类号: TP301 文献标识码: A 文章编号: 1000-1980(2000)03-0099-04

Gödel 定理意指下述命题: 在足以包括数论的任一形式系统中, 一定存在一个不可判定的公式(即一个公式和它的否定都是不可证的)^[1]. 此定理也称作哥德尔第一定理. 作为数理逻辑史上一个重要标志, Gödel 定理揭示出数学是不能在一个系统内完全地和协调地形式化的.

Gödel 定理的形式表述为: 若数论形式系统是简单无矛盾的, 则没有 $\vdash \forall b \neg A(P, b)$; 若该系统是 ω 无矛盾的, 则没有 $\vdash \neg \forall b \neg A(P, b)$. 因此若该系统是 ω 无矛盾的, 则它是简单不完备的, 而 $\forall b \neg A(P, b)$ 便是不可判定的公式的一例. 无疑, Gödel 定理的精华在于其“有穷性”地构造了公式 $\forall b \neg A(a, b)$. 但从严格意义上讲该定理未最终解决形式数论的完备性. 因从定理的原来形式只能得到: 如果数论形式系统是 ω 无矛盾的, 则该系统是不完备的. 显然系统的 ω 无矛盾性要强于系统的简单无矛盾性. 这就产生出一个疑问: 如果数论形式系统只是简单无矛盾的, 那么该系统是否是完备的? Rosser 经研究发现如果将 Gödel 公式取得较为复杂一些, 则 ω 无矛盾性的假设可以除去, 只由简单无矛盾性即可推出不完备性了. 具体而言, Rosser 构造了

$$\forall b [\neg A(a, b) \vee \exists c (c \leq b \wedge B(a, c))]$$

此即数理逻辑文献中常被引用的 Rosser 公式, 从而最终解决了数论形式系统的完备性问题.

基于对 Rosser 公式的分析与研究, 我们发现公式

$$\exists b \neg [\neg B(a, b) \vee \exists c (c \leq b \wedge A(a, c))]$$

具有与 Rosser 公式等价的功能, 即借助该公式也可由简单无矛盾性推出系统的不完备性.

1 对 Gödel 证明的解析

为了证明形式数论系统的不完备性, Gödel 首先引入了“数字地表示”的概念.

定义 1 设 $P(x_1, \dots, x_n)$ 为一直觉数论谓词, 如有一个公式 $P(x_1, \dots, x_n)$ 除却不同变元 $x_1, \dots, x_n$ 外没有其它的自由变元, 且对于每一个特殊的自然数 n 元序组 $x_1, \dots, x_n$ 都有

(a) 如果 $P(x_1, \dots, x_n)$ 为真, 则 $\vdash P(x_1, \dots, x_n)$;

(b) 如果 $P(x_1, \dots, x_n)$ 为假, 则 $\vdash \neg P(x_1, \dots, x_n)$.

那么我们就说 $P(x_1, \dots, x_n)$ 可在形式系统中数字地表示, 而公式 $P(x_1, \dots, x_n)$ 数字地表示了谓词 $P(x_1, \dots, x_n)$.

为在系统中导出矛盾, Gödel 定义了一个直觉数论的谓词:

收稿日期: 1999-01-29

作者简介: 邹姝稚 (1964—), 女 (汉族), 江苏扬州人, 讲师, 主要从事形式化与程序设计方法学研究.

定义2 如果自然数 a 是公式 $A(a)$ 的 Gödel 数,而自然数 b 是公式 $A(a)$ 的证明的 Gödel 数,那么这个直觉的数论谓词就记为 $A(a, b)$.

Gödel 又证明了以下的引理:

引理3 谓词 $A(a, b)$ 在数论形式系统中是可由公式 $A(a, b)$ 来数字地表示的.

据此 Gödel 巧妙地构造出公式 $\forall b \neg A(a, b)$, 用其观点来解释此公式, 将推断出在形式系统中任一公式均是不可证明的, 这显然矛盾. 为最终在系统中导出形式上的矛盾, Gödel 在两个方向上展开演绎. 若公式 $\forall b \neg A(P, b)$ 在系统中可证, 则谓词 $A(p, k)$ 真, 从而系统中 $\vdash A(P, K)$. 这样 Gödel 完成了从元数学断言到直觉数论谓词, 再到形式数论中公式的一个“超系统演绎”. 接着 Gödel 由元数学的断言: $\forall b \neg A(P, b)$ 可证, 在系统内依据谓词演算规则推演出 $\vdash \neg A(P, K)$. 据此只要系统是简单无矛盾的, 就可能构造出一个形式的矛盾, 从而否证了上述断言, 即 $\forall b \neg A(P, b)$ 在系统中不可证.

2 Rosser 公式的构造

为了说明 $\neg \forall b \neg A(P, b)$ 是不可证的, Gödel 不得不引入 ω 无矛盾定义:

定义4 一个形式系统叫做 ω 无矛盾的, 若没有变元 x 及公式 $A(x)$ 使得下列各命题全真:

$$\vdash A(0), \vdash A(1), \vdash A(2), \dots, \vdash \neg \forall x A(x)$$

正是凭借 ω 无矛盾, Gödel 证明了 $\neg \forall b \neg A(P, b)$ 也不可证. 为什么必须引入 ω 无矛盾呢? 尽管对 $\neg \forall b \neg A(P, b)$ 的判断仍可进行超系统的演绎, 但与 $\neg \forall b \neg A(P, b)$ 相等价的公式 $\exists b A(P, b)$ 似乎力量太弱, 已很难在系统中再推演出什么. 据此只能求助于 ω 无矛盾了. 众所周知, 一个系统是 ω 无矛盾的, 那么该系统必定是简单无矛盾的, 如前所述 $\forall b \neg A(P, b)$ 是不可证的, 也就是

$$\vdash \neg A(P, 0), \vdash \neg A(P, 1), \dots, \text{且 } \vdash \forall b \neg A(P, b)$$

此时, 使用 ω 无矛盾条件, 等价于使用了 $\neg \forall b \neg A(P, b)$ 也是不可证的, 这种由 $\neg \forall b \neg A(P, b)$ 不可证之条件推出 $\neg \forall b \neg A(P, b)$ 是不可证之结论的证明方式是不能令人满意的.

Rosser 分析了 Gödel 证明的全过程, 肯定了构造公式的 $\forall b \neg A(a, b)$ 思路及相应的超系统演绎方法, 更注意到这个公式的局限性. Gödel 在构造公式时, 似乎太注意它自身的不可证性, 而忽视了 $\neg \forall b \neg A(P, b)$ 的不可证. 这就意味着必须改造 Gödel 公式, 使改造后的公式能兼顾自身及其否定均不可证的要求.

Rosser 首先明确了元数学判断: “一个否定公式在系统中是不可证的” 含义, 也就是如果按照 Gödel 的观点, 这个判断将对应着怎样的一个直觉数论谓词, 进而这个谓词又该由系统中一个怎样的公式来数字地表示? 当然, 对这个元数学判断, 可以对应着多个数论谓词, 但为了便于构造出公式, Rosser 定义了下述的谓词.

定义5 如果自然数 a 是公式 $A(a)$ 的 Gödel 数, 而自然数 b 是公式 $\neg A(a)$ 的证明的 Gödel 数, 那么这个直觉的数论谓词记为 $B(a, b)$.

进一步还可证明谓词 $B(a, b)$ 在形式系统中是可由公式 $B(a, b)$ 来数字地表示的.

Rosser 还注意到, 由公式 $\forall b \neg A(P, b)$ 的不可证, 将导出:

$$\vdash \neg A(P, 0), \vdash \neg A(P, 1), \dots, \vdash \forall b \neg A(P, b)$$

这一演绎结果似乎与人的直觉相悖. 这或许暗示着形式系统中在数字项上成立的公式与量词之间还有某些未曾为人们所研究过的规律. 仔细研究这些关系, Rosser 得出了下面一些结果:

- $A(0), A(1), \dots, A(k-1) \vdash \forall x (x < k \supset A(x))$,
- $A(t) \vdash \forall x [x \geq t \supset \exists y (y \leq x \wedge A(y))]$,
- $\forall x [x < t \supset A(x)], \forall x [x \geq t \supset B(x)] \vdash \forall x [A(x) \vee B(x)]$.

为便于构造对偶形的 Rosser 公式, 再增加一条推演规则:

- $\neg A(0), \neg A(1), \dots, \neg A(k) \vdash \neg \exists x (x \leq k \wedge A(x))$.

至此形式系统中公式 $F \neg F$ 是可证的, 能提供哪些信息呢? 若公式 F 的 Gödel 数为 P , 其证明的 Gödel 数为 k . 那么由系统是简单无矛盾的可得出 $F \neg F$ 不可能同时可证, 故有

$$\vdash A(P, K) \\ \vdash \neg B(P, 0), \vdash \neg B(P, 1), \dots, \vdash \neg B(P, k), \dots \quad (1)$$

对偶的,如 $\neg F$ 可证且 J 为其证明的 Gödel 数,将有

$$\begin{aligned} & \vdash B(P, J) \\ & \vdash \neg A(P, 0), \vdash \neg A(P, 1), \dots, \vdash \neg A(P, J), \dots \end{aligned} \quad (2)$$

显然,这些均是在构造 Gödel 公式时未曾使用的信息.正是这一疏忽致使 Gödel 定理的原来形式不尽如人意.而 Rosser 恰恰成功地运用了这些信息,即依据这些结果,构造出一个公式 F ,使 $F, \neg F$ 在系统中均为不可证的.当然,这次要特别关注 $\neg F$ 的不可证性. Rosser 依据(2)式中的 $\vdash B(P, J)$,得出

$$\vdash \forall b [b \geq J \supset \exists c (c \leq b \wedge B(P, c))] \quad (3)$$

仍由(2)式中的 $\vdash \neg A(P, 0), \dots, \vdash \neg A(P, J-1)$,可得

$$\vdash \forall b [b < J \supset \neg A(P, b)] \quad (4)$$

合并(3)(4)可得

$$\vdash \forall b [\neg A(P, b) \vee \exists c (c \leq b \wedge B(P, c))] \quad (5)$$

这就是 Rosser 公式的构造过程.在此再次强调, Rosser 在构造公式时,较为注重 $\neg F$ 形公式的不可证性.其主要思路如下:设 $\neg F$ 形公式可证,则式(2)成立,这样将有式(3)(4)(5)成立.因而如果令

$$F \equiv \forall b [\neg A(a, b) \vee \exists c (c \leq b \wedge B(a, c))]$$

则立即产生矛盾.当然, Rosser 并未忽略对公式 F 的不可证性的考虑,而对该点的考虑充分体现在 Rosser 的导出规则 a, b, c 之中,这是无须赘言的.

3 对偶形的 Rosser 公式

在本文第 2 节的分析中, Rosser 充分运用式(2)提供的信息,从而成功地构造了 Rosser 公式.至此,如果一个数论形式系统是简单无矛盾的,那么以下公式均不可证:

$$\forall b [\neg A(P, b) \vee \exists c (c \leq b \wedge B(P, c))] \quad \exists b \neg [\neg A(P, b) \vee \exists c (c \leq b \wedge B(P, c))]$$

Rosser 在构造公式及证明中,均未利用式(1),而式(1)(2)是对偶的.这种对偶性启示我们,只要从式(1)出发,按照 Rosser 类似的思考过程,可得:

$$\forall b [\neg B(P, b) \vee \exists c (c \leq b \wedge A(P, c))] \quad \exists b \neg [\neg B(P, b) \vee \exists c (c \leq b \wedge A(P, c))]$$

为更加突出对偶性,可以称

$$\exists b \neg [\neg B(a, b) \vee \exists c (c \leq b \wedge A(a, c))] \quad (6)$$

为 Rosser 公式的对偶形,进而有下面的定理.

定理 6 如果数论形式系统是简单无矛盾的,则既没有 $\vdash(6)$,又没有 $\vdash \neg(6)$,即如果该系统是无矛盾的,它便是简单不完备的.

证:先证如果该系统是无矛盾的,则没有 $\vdash(6)$.

设 $\vdash(6)$,再设(6)式的 Gödel 数为 q ,其证明的 Gödel 数为 k ,则有 $\vdash A(q, k)$.

由本文第二部分的推演规则,得

$$\vdash \forall b [b \geq k \supset \exists c (c \leq b \wedge A(q, c))] \quad (7)$$

又在无矛盾的假设下,由 $\vdash(1)$ 可得 $\vdash \neg B(q, 0), \dots, \vdash \neg B(q, k-1)$.

并由规则 a, 得

$$\vdash \forall b [b < k \supset \neg B(q, b)] \quad (8)$$

由规则 c 及(7)(8)得

$$\vdash \forall b [\neg B(q, b) \vee \exists c (c \leq b \wedge A(q, c))] \quad (9)$$

又 $\vdash(6)$,即: $\vdash \exists b \neg [\neg B(q, b) \vee \exists c (c \leq b \wedge A(q, c))]$,就是

$$\vdash \neg \forall b [\neg B(q, b) \vee \exists c (c \leq b \wedge A(q, c))] \quad (10)$$

因式(9)与(10)矛盾,故没有 $\vdash(6)$.

再证如果该系统是无矛盾的,则没有 $\vdash \neg(6)$.设 $\vdash \neg(6)$,则有

$$\vdash B(q, k) \quad (11)$$

又在无矛盾的假设下,由式(11)可得: $\vdash \neg A(q, 0), \dots, \vdash \neg A(q, k)$,由规则 d 可得:

$$\vdash \neg \exists c (c \leq k \wedge A(q, c)) \quad (12)$$

又由 $\vdash \neg(6)$,即: $\vdash \neg \exists b \neg [\neg B(q, b) \vee \exists c (c \leq b \wedge A(q, c))]$,就是 $\vdash \forall b [\neg B(q, b) \vee \exists c (c \leq b \wedge A(q, c))]$

$A(q,c))]$,可得 $\vdash \neg B(q,k) \vee \exists c(c \leq k \wedge A(q,c))$. 依据(11)故

$$\vdash \exists c(c \leq k \wedge A(q,c)) \tag{13}$$

因式(12)与式(13)矛盾,故没有 $\vdash \neg(6)$.

总之,由本节的讨论可以看出,无论公式(6)构造的思路,或者定理6的证明过程,均与 Rosser 公式的构造呈对偶的方式进行. 故我们将公式 $\exists b[\neg B(a,b) \vee \exists c(c \leq b \wedge A(a,c))]$ 称之为 Rosser 公式的对偶形.

参考文献：

[1] 林夏水. 数学哲学译文集[C]. 北京: 知识出版社, 1986. 183 ~ 211.
[2] Kleene S C. 元数学导论[M]. 北京: 科学出版社, 1994. 223 ~ 234.

Existence and Development of the Dual Form of Rosser Formula

ZOU Shu-zhi¹, TANG Li-zhong²

(1. College of Engineering, Yangzhou Univ., Yangzhou 225009, China; 2. Southeast Univ., Nanjing 210096, China)

Abstract :In this article analysed are the original intention of ω -consistency theory put forwarded by Gödel and the train of thoughts for the formation of Rosser formula. Based upon the construction of Rosser formula and the oversight, a dual form, as well as the theorem concerned is advanced, so that a better understanding of the consistency and completeness can be achieved that characterizes the mathematical system.

Key words :mathematical logic ; metamathematics ; consistency ; completeness