

水电机组线性最优调节器加权矩阵的确定方法

李建文, 沈祖诒

(河海大学水利水电工程学院, 江苏 南京 210098)

摘要 给出一种适合于水电机组线性最优调节器的加权矩阵的确定方法——基于次时间最优控制的加权矩阵的确定方法. 仿真表明, 这种方法有助于设计者快速、准确地得到合适的加权矩阵, 避免了盲目试验. 在此基础上, 针对目前使用较多的对角加权矩阵, 给出了相应于机组转速、导叶开度、桨叶开度、水头以及转速的积分等状态变量的权系数之间的相互关系.

关键词 线性最优调节器 加权矩阵 水电机组

中图分类号 :TV734.4 文献标识码 :A 文章编号 :1000-1980(2000)04-0045-05

设受控系统的状态方程为

$$\dot{x} = Ax + Bu \tag{1}$$

则由最优控制理论可知, 使二次型性能指标函数

$$J = \frac{1}{2} \int_0^{\infty} [x^T(t)Qx(t) + u^T(t)Ru(t)]dt \tag{2}$$

最小的最优控制规律为^[1,2]

$$u^* = -Kx \tag{3}$$

$$K = R^{-1}B^TP \tag{4}$$

其中 P 是代数 Riccati 矩阵方程

$$A^TP + PA - PBR^{-1}B^TP + Q = 0 \tag{5}$$

的对称正定解.

从以上可以看出, 水电机组最优状态反馈控制系统的设计原理是非常简单的, 但是, 在进行水电机组最优状态反馈控制系统的设计之前, 必须知道加权矩阵 Q, R . 在以往的设计中, 我们常常取加权矩阵为对角阵, 再根据经验试凑对角加权矩阵中相应于水电机组受控系统中各状态变量的权系数的大小, 取得一组自己认为满意的加权矩阵, 据此求得最优控制规律. 因此, 使用这种方法, 加权矩阵选取的好坏就完全取决于设计者个人的设计经验, 如果经验不足, 有可能根本就得不到最佳加权矩阵, 或者, 即使得到了一个自己认为满意的加权矩阵, 但是由于事先已经将其限制为对角阵, 从而严重地削弱了加权矩阵在线性最优控制器中的作用. 本文将基于次时间最优控制得到的加权矩阵应用于水电机组二次型最优控制器的设计中, 使得加权矩阵的选择既快速又准确, 避免了盲目试验, 同时还对目前使用较多的对角加权矩阵中相应于各个状态变量的权系数之间的相互关系进行了初步探讨.

1 加权矩阵的选择

由公式 (1) 及 (3) 可知, 加入状态反馈之后调节系统的状态方程为

$$\dot{x} = (A - BK)x \tag{6}$$

$$E = A - BK = A - BR^{-1}B^TP \tag{7}$$

令

$$\dot{x} = Ex \tag{8}$$

式中 E 为闭环控制系统的状态矩阵. 对于稳定的闭环控制系统而言, E 是渐近稳定的, 即

$$\operatorname{Re} \lambda_i(E) < 0 \quad (i = 0, 1, 2, \dots, n)$$

设 Q 为系统的加权矩阵, 取系统 $\dot{x} = Ex$ 的一个李亚普诺夫函数为

$$V(x) = x^T(t)Qx(t)$$

则 $V(x) > 0 \quad \dot{V}(x) < 0 \quad Q > 0$

因此, 李亚普诺夫函数的衰减速度为

$$\dot{V}(x) = [\dot{x}(t)]^T Qx(t) + [x(t)]^T Q\dot{x}(t) = [x(t)]^T (E^T Q + QE)x(t)$$

令 $-S = E^T Q + QE$

则

$$\dot{V}(x) = [x(t)]^T Sx(t) < 0$$

故 S 也为对称正定阵, 它与加权矩阵 Q 一起满足李亚普诺夫方程

$$E^T Q + QE = -S \quad (9)$$

根据线性最优控制理论, 对于时间最优控制系统, $\dot{V}(x) < 0$ 且取极小值. 但是, 时间最优控制应用于工程中比较复杂, 为简单起见, 本文用次时间最优控制系统代替时间最优控制系统. 次时间最优控制系统的指标函数如下:

$$J = \operatorname{tr}(S^{-1}) + \operatorname{tr}(Q) \quad (10)$$

为使 J 最小, 可令 $\frac{\partial J}{\partial Q} = 0$ 则有

$$ES^{-2} + S^{-2}E^T = -I_{n \times n} \quad (11)$$

综上所述, 基于线性二次型最优状态反馈和次时间最优控制系统的参数矩阵必满足如下四个方程^[3,4]:

$$A^T P + PA - PBR^{-1}B^T P + Q = 0$$

$$E = A - BR^{-1}B^T P$$

$$E^T Q + QE = -S$$

$$ES^{-2} + S^{-2}E^T = -I$$

由以上四式, 可以确定线性控制系统的加权矩阵 Q , 其中, R 事先确定, 不影响本文的研究. R 确定以后, Q 的求取可用递推法进行, 程序框图如图 1.

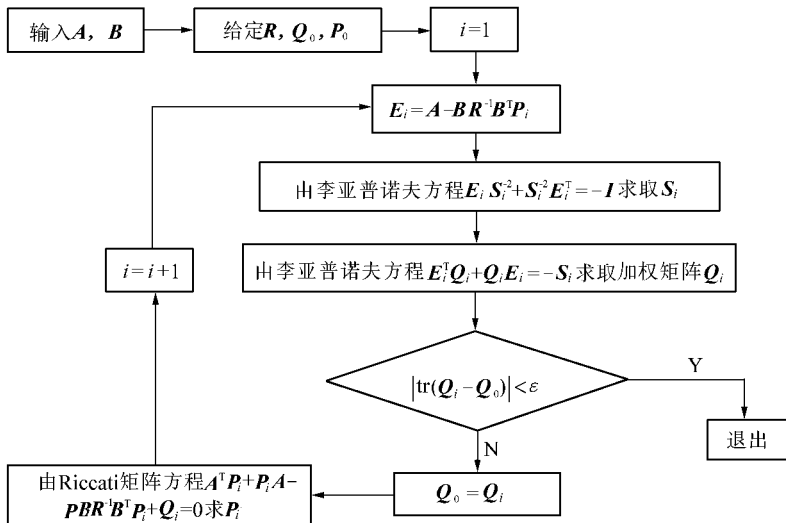


图 1 二次型最优反馈控制加权矩阵 Q 计算流程

Fig.1 Flow chart for calculating quadratic optimal weighted matrix Q

2 示 例

2.1 考虑某轴流转桨式机组最优状态反馈控制系统的设计^[5 6]

取水电机组受控系统中状态变量 $x=(y\ h\ x\ z\ m)^T$,其中 y,h,x,z,m 分别为相应于导叶开度、水头、转速、桨叶开度及转速的积分变量. 系统状态方程为

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} -1.25 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 2.507 & -1.794 & 0.279 & 0.358 & 0 \\ 0.080 & 0.156 & -0.179 & 0.050 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -0.333 & 0 \\ 0 & 0 & 1.0 & 0 & 0 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 1.25 \\ -3.033 \\ 0 \\ 0.306 \\ 0 \end{bmatrix} u + \begin{bmatrix} 0 \\ 0.136 \\ -0.087 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} v$$

根据次时间最优控制得到加权矩阵为

$$Q = \begin{bmatrix} 1.215 & 0.470 & 3.472 & 0.323 & 0.781 \\ 0.470 & 0.248 & 1.497 & 0.207 & 0.354 \\ 3.472 & 1.497 & 1.511 & 2.128 & 3.554 \\ 0.323 & 0.207 & 2.128 & 1.259 & 0.666 \\ 0.781 & 0.354 & 3.554 & 0.666 & 1.239 \end{bmatrix}$$

相应的最优控制系统的状态反馈系数矩阵为

$$K = [1.309\ 0.455\ 5.353\ 1.094\ 1.113]^T$$

调节时间 $t_p = 15.5\text{ s}$,仿真曲线如图 2 (a)所示.

为使根据次时间最优控制得到的加权矩阵具有可比较性,笔者经多次试验,得到了一组相对最佳的对角加权矩阵 $\hat{Q} = \text{diag}\{0\ 1\ 10\ 0\ 1\}$,相应的最优控制系统的状态反馈系数矩阵为

$$K = [1.345\ 0.108\ 5.330\ 1.068\ 1.0]^T$$

调节时间 $t_p = 16.9\text{ s}$,仿真曲线如图 2 (b)所示.

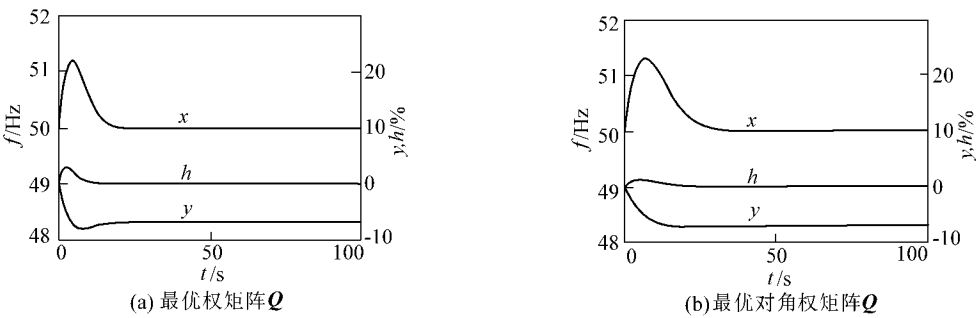


图 2 轴流转桨式水轮机调节系统阶跃响应

Fig.2 Step response of Kaplan turbine governing system

从图 2 可见,使用本文所用的方法能够快速、准确地确定加权矩阵,由此而得到的最优控制系统相比于根据经验确定的加权矩阵得到的最优控制系统而言,其动态品质明显要好.

2.2 考虑某贯流式机组最优状态反馈控制系统的设计

系统状态方程为

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} -1.25 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 4.454 & -4.448 & 1.058 & 0.705 & 0 \\ 0.336 & 0.380 & -0.372 & 0.147 & 0 \\ 0 & 0.476 & 0 & -0.333 & 0 \\ 0 & 0 & 1.0 & 0 & 0 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 1.25 \\ -8.489 \\ 0 \\ 0.914 \\ 0 \end{bmatrix} u + \begin{bmatrix} 0 \\ 0.789 \\ -0.277 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} v$$

根据次时间最优控制得到加权矩阵为

$$Q = \begin{bmatrix} 1.101 & 0.246 & 2.709 & 0.684 & 0.727 \\ 0.246 & 0.098 & 0.746 & 0.261 & 0.227 \\ 2.709 & 0.746 & 10.525 & 2.996 & 3.101 \\ 0.684 & 0.261 & 2.996 & 1.681 & 1.054 \\ 0.727 & 0.227 & 3.101 & 1.054 & 1.389 \end{bmatrix}$$

相应的最优控制系统的状态反馈系数矩阵为

$$K = [1.274 \quad 0.288 \quad 4.468 \quad 1.838 \quad 1.179]^T$$

调节时间 $t_p = 11.85 \text{ s}$, 仿真曲线如图 3(a) 所示。

为使根据次时间最优控制得到的加权矩阵具有可比较性, 笔者经多次试验, 得到了一组相对最佳的对角加权矩阵 $\hat{Q} = \text{diag}\{0 \quad 0.1 \quad 1 \quad 0 \quad 1\}$, 相应的最优控制系统的状态反馈系数矩阵为

$$K = [1.148 \quad 0.221 \quad 4.114 \quad 1.612 \quad 1.0]^T$$

调节时间 $t_p = 12.9 \text{ s}$, 仿真曲线如图 3(b) 所示。

从图 3 可见, 使用本文所用方法对于贯流式机组也是有效的。

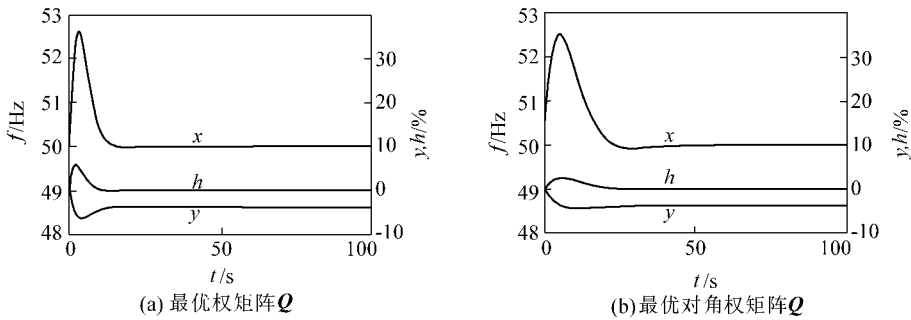


图 3 贯流式水轮机调节系统阶跃响应

Fig.3 Step response of Bulb turbine governing system

3 对角加权矩阵中权系数关系初探

由式(1)(3)(4)水电机组最优闭环反馈控制系统的状态方程为

$$\dot{x} = (A - BR^{-1}B^TP)x$$

令 $A_c = A - BR^{-1}B^TP$, 设待选的对角加权矩阵为 $\hat{Q}$, 则根据式(5)有

$$\begin{aligned} BR^{-1}B^T\hat{Q} &= BR^{-1}B^TA^TP - BR^{-1}B^TPA_c = \\ &= BR^{-1}B^TA^TP - (A - A_c)A_c = \\ &= A_c^2 - A(A - BR^{-1}B^TP) - BR^{-1}B^TA^TP = \\ &= A_c^2 - A^2 + ABR^{-1}B^TP - BR^{-1}B^TA^TP \end{aligned} \quad (12)$$

考虑到 P 为对称阵, 利用矩阵关系 $\text{tr}(XY) = \text{tr}(YX)$ 则有

$$\text{tr}(ABR^{-1}B^TP) = \text{tr}(BR^{-1}B^TA^TP)$$

因此, 若对上式两边取迹, 则有

$$\text{tr}(ABR^{-1}B^T\hat{Q}) = \text{tr}(A_c^2) - \text{tr}(A^2)$$

这样, 可以得出如下结论

$$\text{tr}(BR^{-1}B^T\hat{Q}) = \sum_{i=1}^n \lambda_{ic}^2 - \sum_{i=1}^n \lambda_{io}^2 \quad (13)$$

其中 λ_{ic} 为闭环系统的极点, λ_{io} 为希望的闭环极点, 也就是说 λ_{ic} 、 λ_{io} 分别为矩阵 A 、 A_c 的特征根。

下面我们借助于上面根据次时间最优控制所得到的最优闭环极点, 以及以上所得结论, 对对角加权矩阵中权系数之间的相互关系进行探讨。

经过大量的计算,笔者发现,不论是
何种机型,等式(13)的右端总是很小,各
个机组的数据如表 1 所示。

假设轴流转桨式机组和贯流式机组
的对角加权矩阵具有如下形式:

$$\hat{Q} = \text{diag}\{q_y \quad q_h \quad q_x \quad q_z \quad q_m\}$$

式中 q_y, q_h, q_x, q_z, q_m 分别为相应于导叶开度、水头、转速、桨叶开度及转速的积分变量的权系数。根据式
(13)且结合表 1 中的数据,经过仿真计算,表明各个权系数间有如下关系时可以得到较好的控制规律。

$$q_y = 0 \qquad q_z = 0 \qquad q_x < q_m \qquad q_h < q_m$$

以上是对于轴流转桨式机组和贯流式机组而言。对于混流式机组,笔者也进行了大量的仿真计算,各个
权系数间也满足上述关系,但是如果水头较高,则相应于水头的权系数也应取得稍大,一般 $q_h < 5q_m$ 。

4 结 束 语

本文以动态品质较差的轴流转桨式机组以及贯流式机组最优状态反馈控制系统的设计为例,给出了水
轮机调节系统最优控制规律的获取过程中加权矩阵的确定方法及一般步骤。可以看出,这种方法对于快速、
准确地选择合适的加权矩阵是行之有效的。本文的最后部分只是对各权系数之间的关系进行了一般性的探
讨,毕竟水轮机调节系统是一个非常复杂的调节系统,影响动态品质的因素很多,不同的调节系统各权系数
之间不可能存在固定不变的相互关系。但本文所得结论对对角加权矩阵中各权系数的估计有一定的指导作
用。

参考文献:

[1] Sage A P. Optimum systems contro[M]. Englewood Cliffs,Cliffs :Prentice Hall ,1968.230 ~ 256.
[2] Howe J C. Predicting the stability of regulator[J]. Water Power , 1981(7) :70 ~ 75.
[3] 王耀青.单输入最优控制系统中 Q 矩阵的解析解[J]. 控制理论与应用 ,1999(3) :21 ~ 24.
[4] 谢宋和,李人厚.一种新的最优极点配置方法[J]. 控制理论与应用 ,1993(1) :48 ~ 51.
[5] 沈祖诒.水轮机调节系统分析[M]. 北京 :水利电力出版社 ,1991.74 ~ 84.
[6] 沈祖诒.水轮机调节.第 2 版[M]. 北京 :水利电力出版社 ,1988.162 ~ 220.

A Method of Weighted Matrix Selection for Hydroturbine
Linear Optimal Regulator

LI Jian-wen , SHEN Zu-yi

(College of Water Conservancy and Hydropower Engineering , Hohai Univ. , Nanjing 210098 ,China)

Abstract: A method is proposed for selecting the weighted matrix for the hydroturbine linear optimal regulator. Simulations show that the designer can obtain the expected weighted matrix rapidly and accurately by use of the present method , and thus unnecessary tests can be avoided. Finally , for the diagonal weighted matrix frequently used currently , the relationship is given among the coefficients of state variables , such as speed ,gate opening ,blade opening ,head and the intergal of the speed in the hydroturbine governing system.

Key words :linear optimal regulator ; weighted martix ; hydroturbine

表 1 计算结果

Table 1 Results of computation

机组类型	$BR^{-1}B^T$	$\sum_{i=1}^n \lambda_{ic}^2 - \sum_{i=1}^n \lambda_{io}^2$
轴流转桨式机组	[1.56 9.2 0 0.9 0]	0.59
贯流式机组	[1.56 72.07 0 0.84 0]	1.64