

无网格伽辽金法(EFGM)求解接触问题

庞作会, 朱岳明

(淮海大学水利水电工程学院, 江苏 南京 210098)

摘要 本文考虑到无网格伽辽金法只需节点信息,不需将节点连成单元,并具有精度高、后处理方便等优点,从而用它求解接触问题.这里采用的方法是将 Katona 界面单元引入 EFGM,迭代求得两物体间的接触状态.算例表明,本文方法基本可行.

关键词 移动的最小二乘法 无网格伽辽金法 界面单元

中图分类号 O241 **文献标识码** A **文章编号** 1000-1980(2000)04-0054-05

移动的最小二乘法(Moving Least Square,简记为 MLS)可通过几个互不相关节点上的数据,拟合出一个函数,该函数的光滑性好且导数连续^[1,2].B Nayroles 等^[1]在求解边值问题偏微分方程数值解时,用 MLS 构造位移函数,这样位移函数的形成及区域积分的实现都可以脱离单元的概念.B Nayroles 等称这一方法为 Diffuse Element Method(简记为 DEM).T Belytschko 等^[3,4]对此作了进一步改进,使得 DEM 求解精度更高,更具有发展前途.T Belytschko 等^[3~5]称改进后的 DEM 为 Element Free Galerlin Method (EFGM).

关于 EFGM 的基本原理、实现过程及该法的优越性,此处不再赘述,详见文献[2,4,6,7,8].

目前,EFGM 主要用于模拟裂纹扩展,当然在岩土工程中也有一定的应用前景^[5,9].

互相接触的两物体接触面之间的粘结、滑移、张开是常见的工程现象,这类问题泛称为接触(摩擦)问题.求解这类问题,人们常用的数值方法是 FEM.考虑到 EFGM 的优点,本文探索用 EFGM 求解接触问题的可行性.

FEM 求解接触问题,大致有三种途径:(a)引入界面单元^[10];(b)采用拉氏乘子或罚函数法^[11];(c)采用前两种途径的混合形式.考虑到基于虚功原理的 Katona 界面单元(以下简称界面单元)物理概念明确,不需额外参数,且实施容易,本文将界面单元引入 EFGM,从而求解摩擦问题.

在 EFGM 中引入界面单元,与 FEM 中引入界面单元的总原理一致,具体过程有所不同.就是说,在总刚及荷载矩阵中修改某节点数据时,该节点影响域内节点的数据也要修改.造成这些不同的原因在于 EFGM 与 FEM 的形函数不同.

1 在 EFGM 中引入界面单元

1.1 界面单元用于 FEM 的一般计算过程

界面单元由三个点组成,两端的点位于不同的物体内,称为“点对”,中间的点称为哑节点.哑节点的使用,是为了将点对的约束条件方便地反映到控制方程中.求解控制方程得到的哑节点“位移”,实际是该点对之间的接触力.

用界面单元求解接触问题,可将全部荷载分成几个荷载步,通过点对在 $k-1$ 步的解答,即点对的接触状态、相对位移 Δ_n^{k-1} , Δ_s^{k-1} 、接触力 λ_n^{k-1} , λ_s^{k-1} ,求得点对在 k 步的解答.第 k 步解答的获得通过迭代计算实现,即:

- (a)形成荷载矩阵;
- (b)假设点对的接触状态与 $k-1$ 步结束时相同;
- (c)根据表 1 确定修正荷载矩阵时需用的参数 a, b, N, T ;
- (d)按表 2 修正总刚矩阵和荷载矩阵;

(e)求解控制方程,得到点对的接触力及相对位移 ;

(f)由表 3 确定点对新的接触状态 ;

(g)若接触状态与假设相同,则解答已获得,对荷载步 k 的计算结束 ,否则,假设点对的接触状态为(f)中确定的状态,并重复 (c)→(g) .

每一荷载步首次迭代时,取点对的接触力为 0,在第一个荷载步的首次计算时,可假设点对的接触状态为连续状态.

表 1 修正荷载矩阵时用到的参数

Table 1 Parameters needed to adjust load matrix

荷载步 $k-1$	荷载步 k		
	连续	滑移	自由
连续	$a=0$	$a=0$	$N=-\lambda_n^{k-1}$
	$b=0$	$T=F^k-\lambda_s^{k-1}$	$T=-\lambda_s^{k-1}$
滑移	$a=0$	$a=0$	$N=-\lambda_n^{k-1}$
	$b=0$	$T=F^k-\lambda_s^{k-1}$	$T=-\lambda_s^{k-1}$
自由	$a=-\Delta_n^{k-1}$	$a=-\Delta_n^{k-1}$	$N=0$
	$b=\Delta_s a/\Delta_n $	$T=F^k$	$T=0$

表中 F^k 是最大摩擦力,按库仑摩擦定律 :

$$F^k=\mu\left|\lambda_n^k\right|\operatorname{sgn}\left(\lambda_s^k\right) \tag{1}$$

式中 : μ ——摩擦系数 ;

$$\operatorname{sgn}\left(\lambda_s^k\right)=\left\{\begin{array}{ll}+1 & \lambda_s^k>0 \\-1 & \lambda_s^k<0\end{array}\right. \tag{2}$$

表 2 界面单元的刚度矩阵及荷载矩阵

Table 2 Stiff and load matrices for interface element

状态	刚度						荷载
连续	0	0	0	0	$-c$	s	0
	0	0	0	0	$-s$	$-c$	0
	0	0	0	0	c	$-s$	0
	0	0	0	0	c	s	0
	$-c$	$-s$	c	s	0	0	a
	s	c	$-s$	c	0	0	b
滑移	0	0	0	0	$-c$	0	$-sT$
	0	0	0	0	$-s$	0	cT
	0	0	0	0	c	0	sT
	0	0	0	0	s	0	$-cT$
	$-c$	$-s$	c	s	0	0	a
	0	0	0	0	0	1	T
自由	0	0	0	0	0	0	$cN-sT$
	0	0	0	0	0	0	$-sN-cT$
	0	0	0	0	0	0	$-cN+sT$
	0	0	0	0	0	0	$-sN-cT$
	0	0	0	0	1	0	N
	0	0	0	0	0	1	T

表中

$$c=\cos \varphi \tag{3}$$
$$s=\sin \varphi \tag{4}$$

φ 是界面法向与 x 轴正向的夹角.

表 3 确定接触状态
Table 3 Definition of contact state

迭代步 i	迭代步 $i-1$		
	连续	滑移	自由
连续	$\lambda_n^k < 0$ 且 $ \lambda_s^k < F^k $	$\lambda_n^k < 0$ 且 $ \lambda_s^k < F^k $	$\lambda_n^k > 0$
滑移	$\lambda_n^k < 0$ 且 $\Delta_s \cdot F^k < 0$	$\lambda_n^k < 0$ 且 $\Delta_s \cdot F^k > 0$	$\lambda_n^k > 0$
自由	$\Delta_n^k < 0$		$\Delta_n^k > 0$

如何根据虚功原理将界面单元的约束条件引入控制方程,即如何得到表 2,文献[10]中有详尽的论述,在此不赘述.下面讨论如何在 EFGM 控制方程中反映界面单元的约束.

1.2 在 EFGM 控制方程中反映界面约束

表 2 是按位移 u 对界面单元施加约束.而 EFGM 控制方程中的未知量是 u^* ,由于 u 是 u^* 按 MLS 拟合得到的, $u \neq u^*$ [8].所以,欲在 EFGM 控制方程中反映界面约束,必须把对 u 的约束转化为对 u^* 的约束.

以固定状态为例,将表 2 中的第一部分写成如下形式:

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & K_5 \\ 0 & 0 & K_4 \\ K_1 & K_2 & K_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \lambda \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{bmatrix}$$

(5)

其中

$$u_1 = \begin{bmatrix} u_1 \\ v_1 \end{bmatrix} \quad u_2 = \begin{bmatrix} u_2 \\ v_2 \end{bmatrix} \quad \lambda = \begin{bmatrix} \lambda_n \\ \lambda_s \end{bmatrix}$$

(6)

$$a_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad a_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad a_3 = \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix}$$

(7)

$$K_1 = \begin{bmatrix} -c & -s \\ s & -c \end{bmatrix} \quad K_2 = \begin{bmatrix} c & -s \\ -s & c \end{bmatrix} \quad K_3 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

(8)

$$K_4 = \begin{bmatrix} c & -s \\ s & c \end{bmatrix} \quad K_5 = \begin{bmatrix} -c & s \\ -s & c \end{bmatrix}$$

(9)

从式(5)右边荷载来看,实际上,是在点对的第一节点上作用集中力 a_1 ,在点对的第二节点上作用集中力 a_2 ,在哑节点上作用 a_3 .由于节点 1 和 2 不仅影响其本身,还对其影响域内其它节点有作用,所以将 a_1 和 a_2 加入总荷载矩阵时,影响域内其它节点上也要作用一定的力,详见文献[8]中关于 EFGM 求解集中力的论述. a_3 可全部作用在哑节点上.

从式(5)左边的刚度来看, K_3, K_4, K_5 可原封不动地加入总刚矩阵中, K_1 和 K_2 则不然.将式(5)中第三行展开有

$$K_1 u_1 + K_2 u_2 + K_3 \lambda = a_3$$

(10)

由于 u_1, u_2 通过 MLS 拟合得到,故

$$u_1 = \Phi_1 u_1^*, u_2 = \Phi_2 u_2^*$$

(11)

将式(11)代入式(10)中,得

$$K_1 \Phi_1 u_1^* + K_2 \Phi_2 u_2^* + K_3 \lambda = a_3$$

(12)

即

$$K_k u_k^* + K_3 \lambda = a_3$$

(13)

其中

$$K_k = \begin{bmatrix} K_1 \Phi_1 & 0 \\ 0 & K_2 \Phi_2 \end{bmatrix}$$

(14)

$$u_k^* = \begin{bmatrix} u_1^* \\ u_2^* \end{bmatrix}$$

(15)

就是说 K_k 是 $2 \times 2N$ 的矩阵,由 K_1, K_2 及点对两个节点上的形函数 ϕ_1, ϕ_2 组成; u_k^* 是 $2N \times 1$ 矩阵,由界面单元两个节点影响域内节点上的 u^* 组成,该影响域内的节点共有 N 个. 因此,将 K_1, K_2 加入总刚矩阵中时,上述影响域内节点上的数据都要修改,即按 u_k^* , 将 K_k 加入总刚矩阵中.

2 算 例

本算例取自文献[11],如图 1 所示,是刚体上置一弹性滑块. 滑块尺寸为 $4\text{ m} \times 2\text{ m}$,垂直荷载 $P_y = -200\text{ Pa}$,作用范围 3.6 m ,水平荷载 $P_x = 60\text{ Pa}$. 取弹性模量 $E = 1\,000\text{ Pa}$,泊松比 $\nu = 0.3$,摩擦系数 $\mu = 0.5$.

对该问题,文献[11]采用罚函数方法进行了 FEM 计算. FEM 计算中设 231 个均匀节点,划分 200 个四边形单元,并且约束滑块下面左右端的两个节点.

为对照结果,本文在 EFGM 计算中采用与上面相同的节点及约束,即约束接触面左右端两个节点的 x, y 向位移,中间节点初始状态取为连续. 区域积分时整个区域划分成 20×10 个 cell,每个 cell 中采用 4×4 高斯积分. 权函数中取 $d_m = 0.9\text{ m}$, $c = 0.2\text{ m}$. 采用线性基计算形函数. EFGM 计算的变形图见图 2,界面应力见图 3 和图 4.

从图 2~4 可看出, EFGM 计算的变形情况合理,界面法向应力与文献[11]的结果吻合得非常好,界面切向应力与文献[11]的结果稍有差别.

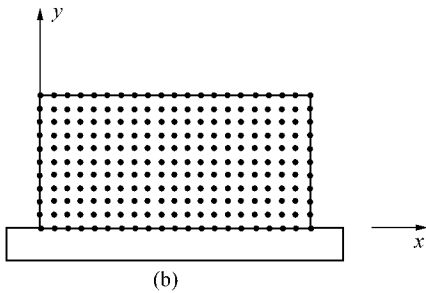
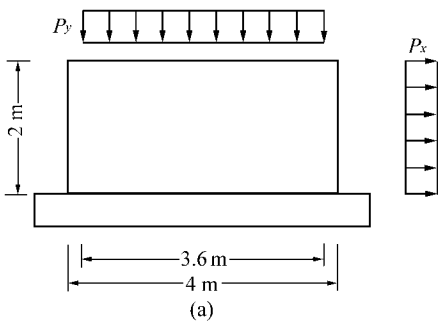


图 1 弹性滑块
Fig.1 Contact of an elastic block with a rigid foundation

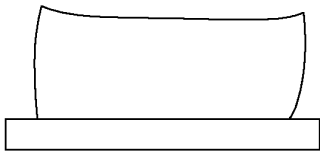


图 2 滑块变形情况
Fig.2 Deformed configuration of the elastic block

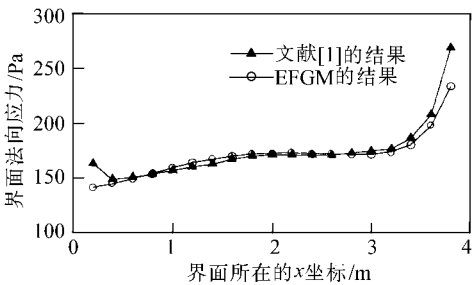


图 3 界面法向应力
Fig.3 Normal stress on contact surface

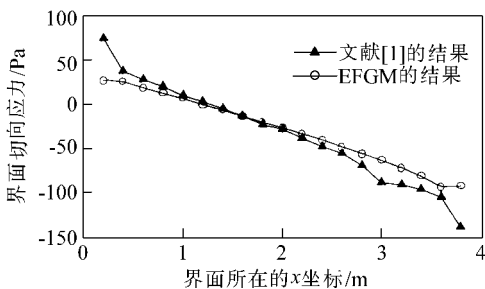


图 4 界面切向应力
Fig.4 Tangential stress on contact surface

3 结 束 语

本文探索如何用一种新的数值方法——EFGM 求解接触问题,作者采用的方法是将 Katona 界面单元引入 EFGM. 在 EFGM 中引入界面单元,总的原则与 FEM 中引入界面单元一样,具体过程有些不同. 即,根据点对状态修改总刚及荷载矩阵时,点对影响域内其它节点上的数据也要修改. 造成这些不同的原因在于 EFGM 通过 MLS 构造出位移函数. 从算例来看,本文方法基本可行.

致谢 特别感谢中国科学院武汉岩土力学研究所葛修润院士和王水林博士的帮助.

参考文献：

- [1] Nayroles B, Touzot G, Villon P. Generalizing the finite element method : diffuse approximation and diffuse elements [J]. Comput Mech, 1992, 10 : 307 ~ 318.
- [2] Lancaster P, Salkauskas K. Surfaces generated by moving least square methods [J]. Math Comput, 1981, 37 : 141 ~ 158.
- [3] Belytschko T, Krongauz Y, Organ D, *et al.* Meshless method : An overview and recent developments [J]. Comput Methods Appl Mech Engrg, 1996, 139(1) : 3 ~ 47.
- [4] Belytschko T, Lu Y Y, Gu L. Element-free Galerkin Methods [J]. Int J Numer Methods Engrg, 1994, 37 : 229 ~ 256.
- [5] Modaressi H, Aubert Ph. Meshless numerical methods in geomechanics [A]. In : Yuan (ed.). Proceedings of the 9th International Conference on Computer Methods and Advances in Geomechanics—Computer Methods and Advances in Geomechanics [C]. Rotterdam : Balkema, 1997. 421 ~ 426.
- [6] Lu Y Y, Belytschko B, Gu L. A new implementation of the element free galerkin method [J]. Comput Methods Appl Mech Engrg, 1994, 113 : 397 ~ 414.
- [7] 庞作会, 葛修润, 郑宏, 等. 一种新的数值方法——无网格伽辽金法(EFGM) [J]. 计算力学学报, 1999, 16(3) : 363 ~ 372.
- [8] 庞作会. 基于节理网络模型的岩体 REV 数值估算与无网格伽辽金法(EFGM) [D]. [学位论文]. 武汉 : 中国科学院武汉岩土力学研究所, 1998.
- [9] 庞作会, 葛修润, 王水林. 无网格伽辽金法(EFGM)在边坡开挖问题中的应用[J]. 岩土力学, 1999, 20(1) : 31 ~ 64.
- [10] Michael G Katona. A simple contact-friction interface element with applications to buried culverts [J]. Int J Num Anal Meth Geomech, 1983, 7 : 371 ~ 384.
- [11] Wriggers P, Vu Van T, Stein E. Finite element formulation of large deformation impact-contact problem with friction [J]. Computer and Structure, 1990, 37 : 319 ~ 331.

Application of Element Free Galerkin Method (EFGM) to Contact Problems

PANG Zuo-hui, ZHU Yue-ming

(College of Water Conservancy and Hydropower Engineering, Hohai Univ., Nanjing 210098, China)

Abstract : Element Free Galerkin Method (EFGM), similar to FEM, is a new numerical method. In EFGM, in order to obtain a numerical solution to a partial differential equation, shape function is constructed by Moving Least Square (MLS), the governing equation is produced from the weak form of variational equation, and Lagrange multipliers are employed to satisfy essential boundary conditions. The merits of EFGM are : (1) only nodal data are necessary, i.e. there is no need to joint nodes into elements ; (2) high accuracy can be achieved ; (3) postprocess is easy. The advantages of EFGM considered, this paper applies EFGM to contact problems. The contact state of two bodies can be obtained iteratively with EFGM, to which the Katona interface element is introduced. The presented example shows that the present idea is basically feasible.

Key words : Moving Least Square (MLS) ; Element Free Galerkin Method (EFGM) ; interface element