

渐变曲面管道 CAD 的建模与分析

栾 蓉, 高 旭

(扬州大学水利与建筑工程学院, 江苏 扬州 225009)

摘要: 应用微分几何、空间解析几何以及画法几何的原理, 提出了构成两种典型的直纹渐变曲面管道几何模型的简易方法, 并以这两种管道为例, 对其横断面的变化及其函数方程进行了详尽的讨论和分析, 并为这类管道的计算机辅助设计提供了方便实用的数学模型.

关键词: 直纹渐变曲面; 管道; 横断面; 函数方程

中图分类号: TB21 **文献标识码:** A **文章编号:** 1000-1980(2000)04-0107-05

直纹曲面簇包括可展曲面与不可展曲面两类. 不可展的直纹渐变曲面在造型和制作方面均比可展直纹曲面复杂. 直纹渐变曲面在工业和工程方面的应用非常广泛, 许多空气流动系统常采用直纹渐变曲面管道来连接它们的部件. 例如空调设备、加热和制冷系统等. 在航空航天工业方面, 飞机的空调设计、涡旋管、喷气式飞机和火箭进气口的设计, 均采用直纹渐变曲面管道. 其它如船及潜水艇的外形设计、声学建筑物的设计, 也常采用直纹渐变曲面片.

设计师们在进行空气流动系统、供热通风系统或其它设计时, 须考虑直纹渐变曲面管道的几何特性及其断面形状. 这是设计师们感到比较麻烦和困难的一个问题, 如中央空调系统中空调箱与管道的方圆接头, 见参考文献[1]. 为此, 本文提出构成两种直纹渐变管道(如本文图 4 和图 6 所示)的几何模型的简易方法, 以此建立这两类管道的函数方程, 并对其进行分析和讨论, 为解决这类曲面管道或曲面的计算机辅助设计提供几何和数学方法.

1 “子午面”管道的几何分析

由解析几何及画法几何可知, 在分析回转曲面时, 将通过回转轴的平面称为子午面. 如图 1 所示, 我们建立一空间直角坐标系, 设通过直纹渐变曲面两端几何中心的轴线为 z 轴, 则包含 z 轴的平面为子午面.

在图 2 所示的直纹渐变曲面的 V 投影中, 子午面 P_i 交管道一端的圆于点 F , 交另一端的矩形于点 6, 用直线连接 $F6$, 则该线为渐变曲面上的一根素线.

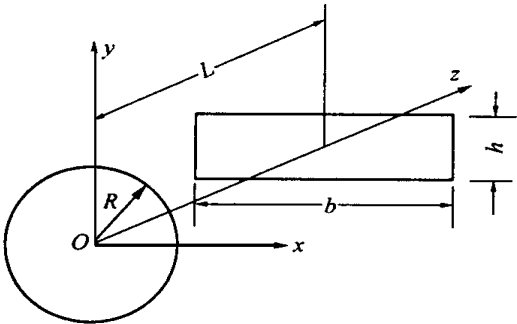


图 1 “圆变方”直纹曲面管道的空间坐标和几何参数

Fig.1 Spatial orientation and geometric parameters used for round to rectangular transition ducts

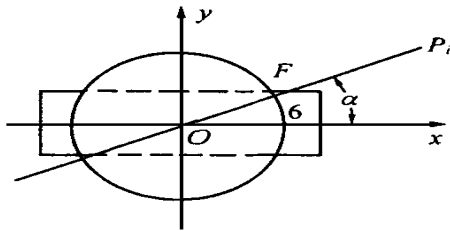


图 2 直纹渐变曲面管道 V 投影

Fig.2 V view of a ruled surface transition duct

收稿日期: 1999-04-21

作者简介: 栾蓉(1964—), 女, 江苏泰兴人, 讲师, 工程图学专业, 主要从事计算机图形学、建筑 CAD 方面的研究工作.

由微分几何定理可知, 若有无数的子午面, 它们与 x 轴的倾角为 0 至 2π , 它们与管道两端的圆和矩形相交, 则可产生无限多的直线曲面素线, 从而构成了如图 3 所示的“子午面”直纹渐变曲面. 若沿子午面管道纵向采用 6 个等间距的横断面剖切管道, 可得到 6 个断面图. 显然断面 1 为圆, 断面 6 为矩形(未画出), 断面 2 至断面 5 的形状如图 4 所示. 图中还给出了该渐变曲面的四个数值. 这里采用 24 个子午面来产生渐变曲面上的直纹素线. 设该段管道长为 L , 对于沿管道纵向任意给定的位置 z , 其横断面的面积为 $A(z)$, 则

$$\lambda_z = z/L \qquad \lambda_A = A(z)/A_{\text{cir}}$$

式中: λ_z, λ_A ——无单位比值; A_{cir} ——圆端面的面积, $A_{\text{cir}} = \pi R^2$. 显然, $A(z)$ 为变量 z 的函数, 该函数在本文后面进行分析.

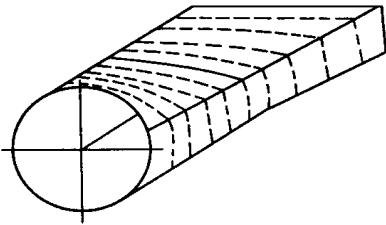


图 3 “子午面”管道的斜轴测投影
Fig. 3 Oblique view of a typical meridian plane transition duct

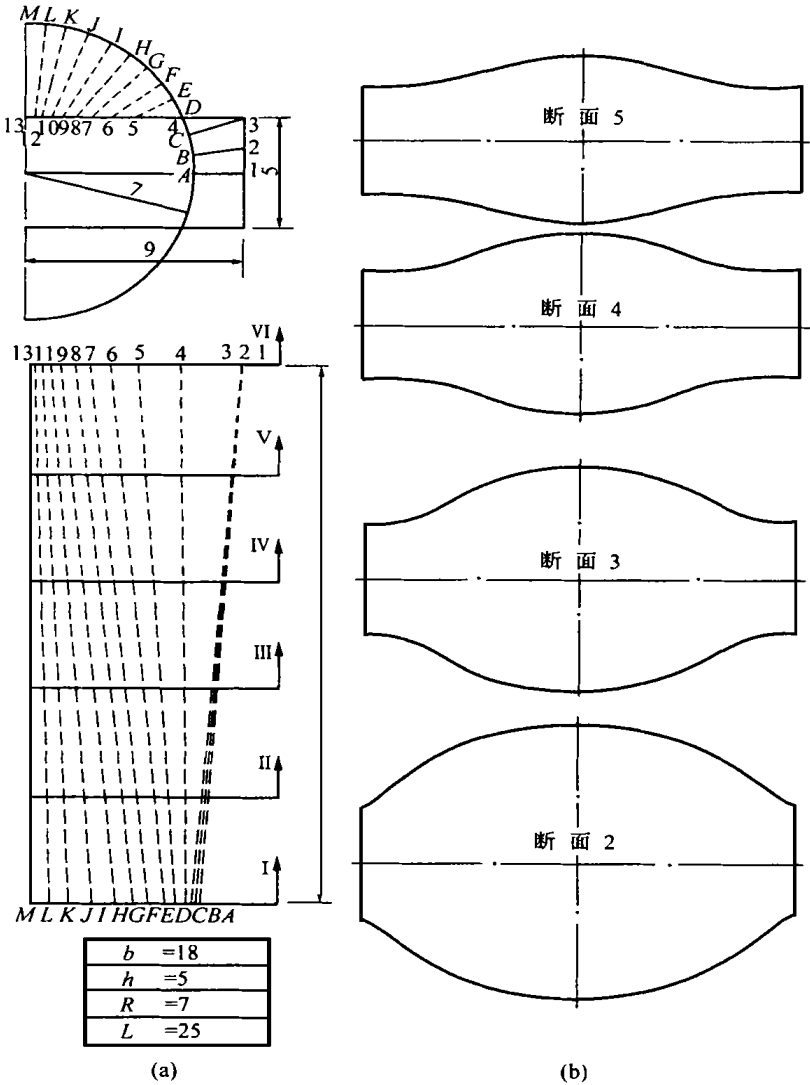


图 4 子午面管道的 V, H 面投影及断面
Fig. 4 V & H view and cross sectional area of a meridian plane transition duct

2 “成比例间距”管道的几何分析

第二种直纹渐变曲面管道是由这样一种直纹母线产生的: 该线一端为圆周上某一等分点, 另一端为与圆周上某等分点对应的、在矩形上成一定比例间距的点, 如图 5 所示. 设圆周上某等分点与圆周和 x 轴(正向)的交点之间的弧长为 $R\theta$, 矩形周边上与其对应的某段长度为 S , 则存在下列关系:

$$S_r = KR\theta \tag{1}$$

这里 K 为矩形的周长 C_{rec} 与圆的周长 C_{cir} 之比, 即

$$K = C_{\text{rec}}/C_{\text{cir}} = (B + H)/\pi \tag{2}$$

其中 $B = b/R$ $H = h/R$
式中: b ——矩形的长; h ——矩形的高; R ——圆的半径.

这种管道的 V, H 面投影如图 6(a) 所示. 其中的四个参数(b, h, R, L) 值与第一种管道的相同.

根据关系式(1), 在圆周上选择任一等分点, 即可计算出另一端面矩形上的对应点, 曲面的素线可由此作出. 因该管道曲面上素线的两端点是按一定比例关系间距取得的, 故称为“成比例间距”管道. 与前例相同, 采用 6 个剖切平面剖切管道, 可得到 6 个断面, 断面 1 为圆, 断面 6 为矩形, 其余断面的几何形状如图 6(b) 所示.

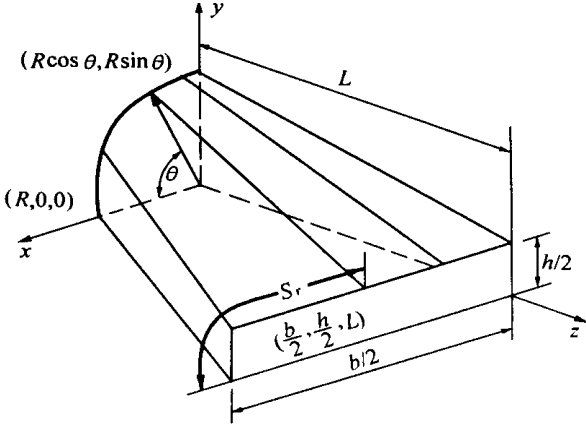


图 5 “成比例间距”管道的直纹母线及几何参数示意图
Fig. 5 Sketch of the proportional-spacing duct's main components & parameters

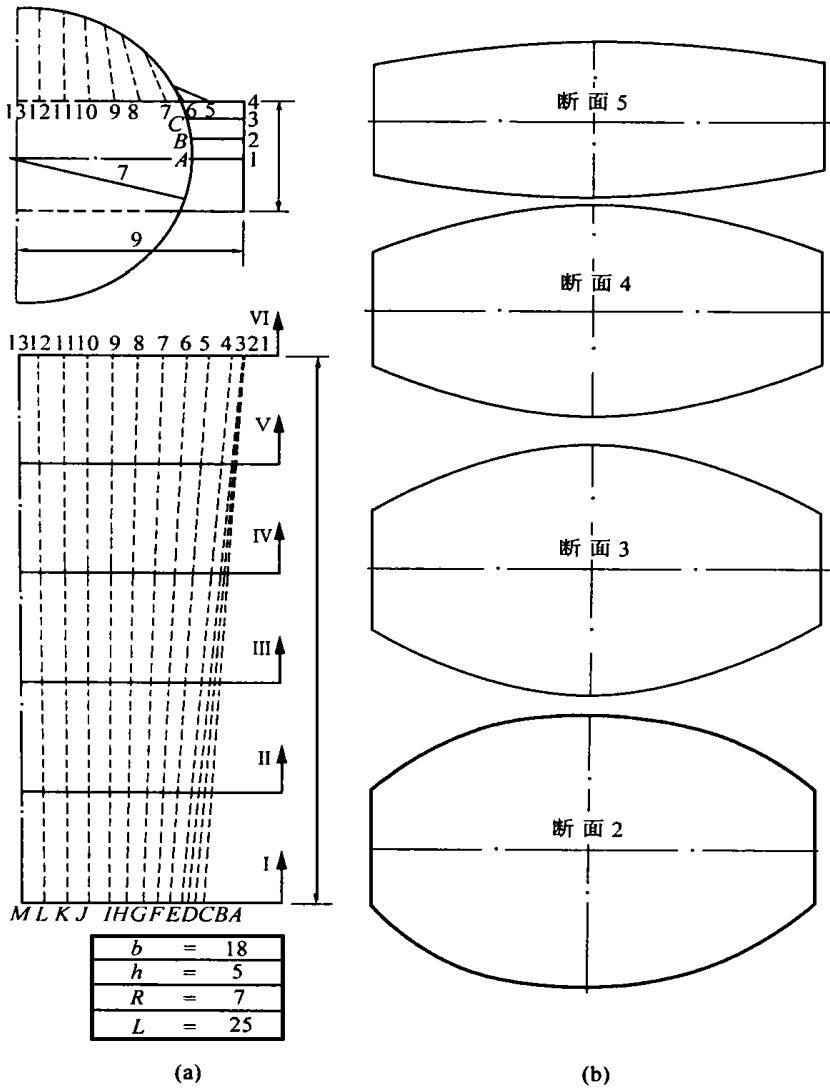


图 6 成比例间距管道的 V, H 面投影及断面
Fig. 6 V & H view and cross sectional area of a proportional-spacing transition duct

3 一般直纹渐变曲面的分析

如图 7 所示, 长为 L , 而两端面的轮廓线为一般平面曲线的直纹渐变曲面上(在第一象限内)的任一素线, 通过空间某点 (x, y, z) , 方程式可表达为

$$\frac{x-x_0}{x_L-x_0} = \frac{y-y_0}{y_L-y_0} = \frac{z}{L} \tag{3}$$

这里 (x_0, y_0) 和 (x_L, y_L) 指素线在管道入口端面($z=0$)和出口端面($z=L$)上两端点的 x, y 坐标.

设这两端面轮廓线的方程为

$$\left. \begin{aligned} f_0(x_0, y_0) &= 0 \\ f_L(x_L, y_L) &= 0 \end{aligned} \right\} \tag{4}$$

方程组(4)足可以表达像矩形那样具有突变点的轮廓线.

现在可用方程式(3)来描述管道两端面之间任一断面的轮廓曲线, 由式(3)可得到下列方程组:

$$\left. \begin{aligned} x &= \frac{z}{L}x_L + \left(1 - \frac{z}{L}\right)x_0 \\ y &= \frac{z}{L}y_L + \left(1 - \frac{z}{L}\right)y_0 \end{aligned} \right\} \tag{5}$$

其中, 假设 y_0 和 y_L 分别为 x_0 和 x_L 的函数, 即

$$y_0 = y_0(x_0) \qquad y_L = y_L(x_L)$$

现在利用这一补充关系式把直纹母线在两端面上的“移动路径”联系起来, 即可根据该母线曲面的某一瞬时, 在一端面($z=0$)上的某一位置来确定它的另一端面($z=L$)上相对应的位置. 假定对这样一种补充关系有如下函数形式:

$$x_L = F(x_0) \tag{6}$$

将式(6)代入方程组(5), 则得到下列方程组:

$$\left. \begin{aligned} x &= \frac{z}{L}F(x_0) + \left(1 - \frac{z}{L}\right)x_0 \\ y &= \frac{z}{L} \frac{1}{L}[F(x_0)] + \left(1 - \frac{z}{L}\right)y_0(x_0) \end{aligned} \right\} \tag{7}$$

该方程组只包含一个参数 x_0 . 消去 x_0 , 即可得到含 x, y, z 的一个方程式. 当 z 为定值时, 相应的横断面的轮廓曲线即可确定. 对这一曲线积分, 可求得该断面的面积.

另一方面, 若不消去 x_0 , 对方程组(7)作参数积分, 则可得到面积函数的一般表达式

$$A(z) = a'_1 \left(\frac{z}{L}\right)^2 + a'_2 \left(\frac{z}{L}\right) + a_3 = a_1 z^2 + a_2 z + a_3 \tag{8}$$

其中
$$a_1 = a'_1/L^2 \qquad a_2 = a'_2/L$$

因为在管道入口处 $z=0$, 所以

$$A(0) = a_3$$

函数式(8)可进一步简化为

$$\frac{A(z)}{A(0)} = C_1 z^2 + C_2 z + 1 \tag{9}$$

对于前面讨论的两种直纹渐变曲面管道, 从断面 2 至断面 5 将满足下式:

$$C_1 = A_R - \sqrt{A_R/f_{(n)}} + 1 \qquad C_2 = A_R - C_1 - 1 = \sqrt{A_R/f_{(n)}} - 2 \tag{10}$$

其中 A_R 为管道圆端与矩形端的面积之比.

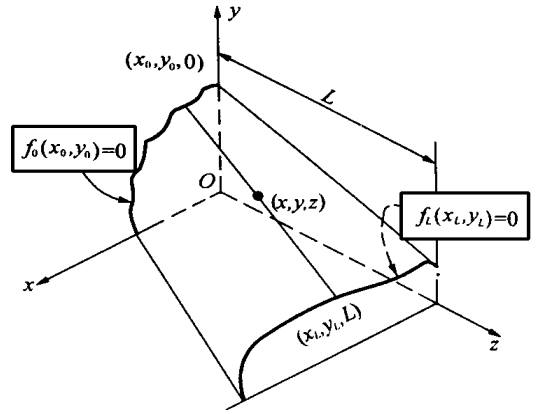


图 7 一般直纹渐变曲面的空间坐标
直纹母线及几何参数

Fig. 7 Spatial orientation, skeletal components and parameters of a general ruled surface transition duct

$$AR = A_{\text{rec}}/A_{\text{cir}} = BH/\pi$$

设 n 为矩形的高宽比, 则

$$n = b/h = B/H$$

对于“子午面”管道:

$$f_{(n)} = \left(\frac{\pi h}{4}\right) \left\{ \ln \left[\left(\frac{1 + \cos \theta_c}{\sin \theta_c} \right) \cdot \left(\frac{1 + \sin \theta_c}{\cos \theta_c} \right)^n \right] \right\}^2 \tag{11}$$

这里 $\theta_c = \cot^{-1} n$.

对于“成比例间距”管道:

$$f_{(n)} = \pi n \theta_c^2 / [4(\sin \theta_c + \cos \theta_c)^2] \tag{12}$$

这里 $\theta_c = \pi/[2(1+n)]$, 顶角 θ_c 即为圆端面($z = 0$)上一点所对应的圆心角的值, 该点对应于矩形端面上($z = L$)矩形角点 $\left(\frac{b}{2}, \frac{h}{2}, L\right)$, 见图 5.

对于图 4 和图 6 所示的两种管道, 具有相同的高宽比 $n = B/H = b/h = 3.6$, 所以, 对于子午面管道 $\theta_c = 15.5^\circ$, 对于成比例间距管道 $\theta_c = 19.6^\circ$.

4 结 束 语

本文结合两种典型的直纹渐变曲面管道, 从理论上对任意断面的轮廓曲线方程进行了分析. 实际设计过程中, 可采用计算机辅助设计技术, 利用参数方程进行插值计算, 十分方便. 由于直纹渐变曲面管道在生产实际中应用十分广泛, 对其几何特性与函数方程作进一步的研究分析, 具有良好的应用前景.

参考文献:

[1] 关震荣. 采暖通风工程制图[M]. 北京: 高等教育出版社, 1984. 43, 75.
[2] 苏步青, 刘鼎元. 计算几何[M]. 上海: 上海科技出版社, 1980. 148~ 165.
[3] 胡瑞安. 计算机辅助几何设计[M]. 武汉: 华中工学院出版社, 1987. 198~ 224.

CAD Molelling and Analysis for Transition Ducts

LUAN Rong, GAO Xu

(Water Corsevrancy and Arch Engineering College, Yangzhou Univ., Yangzhou 225009, China)

Abstract: Introduced is an easy way of constructing two kinds of typical ruled-surface transition ducts by means of descriptive, analytical and differential geometries. With the two kinds of ducts as an example, the variation of cross-sectional area and the functional equations are discussed in detail. A convenient and practical mathematical model is provided for computer aided design of the ducts.

Key words: transitional ruled-surface; ducts; cross-sectional area; functional equations