

Hamilton 体系下弹性力学半解析法的一个守恒律

周建方¹, 卓家寿², 李典庆¹

(1. 河海大学常州分校, 江苏 常州 213022; 2. 河海大学土木工程学院, 江苏 南京 210098)

摘要 通过对 Hamilton 体系下弹性力学半解析法控制方程的求解, 得到了一个广义动量守恒定律, 并较为详细地讨论了单元不等长、一边有面力或有位移边界、有体力等情况的广义动量守恒性。

关键词 弹性力学; Hamilton 体系; 半解析法; 守恒律; 广义动量

中图分类号: O175 文献标识码: A 文章编号: 1000-198X(2000)05-0041-03

Hamilton 体系进入弹性力学, 虽然是近几年的事^[1], 但已显示了强大的活力, 尤其采用半解析法求解成状结构时, 具有其它方法无法比拟的优越性^[2, 3]。在文献[4]中, 冯康等提出的 Hamilton 系统的辛算法可以保持 Hamilton 系统的所有线性守恒律, 有些情况还可以保持二次守恒律。关于弹性力学中半解析法是否具有守恒律这一问题, 目前还未很好研究。本文通过对半解析法控制方程的讨论, 得到了一个守恒律, 在这方面作了初步探索, 具有一定的理论和实用意义。

1 半解析法的控制方程

为了讨论方便, 以各向同性平面应力问题为例。在文献[2]中, 已列出了线性插值时一个单元的控制方程, 将所有单元拼装在一起就得到总的控制方程

$$\left. \begin{aligned} \frac{h}{3} \frac{\partial u_0}{\partial y} + \frac{h}{6} \frac{\partial u_1}{\partial y} &= \frac{\chi(1+\nu)h}{E} \left(\frac{\tau_{xy_0}}{3} + \frac{\tau_{xy_1}}{6} \right) + \frac{1}{2}(\nu_0 - \nu_1) \\ \frac{h}{3} \frac{\partial \sigma_{y_0}}{\partial y} + \frac{h}{6} \frac{\partial \sigma_{y_1}}{\partial y} &= -\frac{1}{2}(\tau_{xy_0} + \tau_{xy_1}) - \frac{h}{2}f_y \\ \frac{h}{3} \frac{\partial \tau_{xy_0}}{\partial y} + \frac{h}{6} \frac{\partial \tau_{xy_1}}{\partial y} &= \frac{E}{h}(u_0 - u_1) - \frac{\nu}{2}(\sigma_{y_0} + \sigma_{y_1}) - \frac{h}{2}f_x \\ \frac{h}{3} \frac{\partial \nu_0}{\partial y} + \frac{h}{6} \frac{\partial \nu_1}{\partial y} &= \frac{\nu}{2}(u_0 - u_1) + \frac{(1-\nu^2)h}{6E}(2\sigma_{y_0} + \sigma_{y_1}) \\ \frac{h}{6} \frac{\partial u_i}{\partial y} + \frac{2h}{3} \frac{\partial u_{i+1}}{\partial y} + \frac{h}{6} \frac{\partial u_{i+2}}{\partial y} &= \frac{\chi(1+\nu)h}{E} \left(\frac{\tau_{xy_i}}{6} + \frac{2\tau_{xy_{i+1}}}{3} + \frac{\tau_{xy_{i+2}}}{6} \right) + \frac{1}{2}(\nu_i - \nu_{i+2}) \\ \frac{h}{6} \frac{\partial \sigma_{y_i}}{\partial y} + \frac{2h}{3} \frac{\partial \sigma_{y_{i+1}}}{\partial y} + \frac{h}{6} \frac{\partial \sigma_{y_{i+2}}}{\partial y} &= \frac{1}{2}(\tau_{xy_i} - \tau_{xy_{i+2}}) - hf_y \\ \frac{h}{6} \frac{\partial \tau_{xy_i}}{\partial y} + \frac{2h}{3} \frac{\partial \tau_{xy_{i+1}}}{\partial y} + \frac{h}{6} \frac{\partial \tau_{xy_{i+2}}}{\partial y} &= \frac{E}{h}(2u_{i+1} - u_i - u_{i+2}) + \frac{\nu}{2}(\sigma_{y_i} - \sigma_{y_{i+2}}) - hf_x \\ \frac{h}{6} \frac{\partial \nu_i}{\partial y} + \frac{2h}{3} \frac{\partial \nu_{i+1}}{\partial y} + \frac{h}{6} \frac{\partial \nu_{i+2}}{\partial y} &= \frac{\nu}{2}(u_i - u_{i+2}) + \frac{(1-\nu^2)h}{6E}(\sigma_{y_i} + 4\sigma_{y_{i+1}} + \sigma_{y_{i+2}}) \\ \frac{h}{6} \frac{\partial u_{n-1}}{\partial y} + \frac{h}{3} \frac{\partial u_n}{\partial y} &= \frac{\chi(1+\nu)h}{E} \left(\frac{\tau_{xy_{n-1}}}{6} + \frac{\tau_{xy_n}}{3} \right) + \frac{1}{2}(\nu_{n-1} - \nu_n) \\ \frac{h}{6} \frac{\partial \sigma_{y_{n-1}}}{\partial y} + \frac{h}{3} \frac{\partial \sigma_{y_n}}{\partial y} &= \frac{1}{2}(\tau_{xy_{n-1}} + \tau_{xy_n}) - \frac{h}{2}f_y \\ \frac{h}{6} \frac{\partial \tau_{xy_{n-1}}}{\partial y} + \frac{h}{3} \frac{\partial \tau_{xy_n}}{\partial y} &= \frac{E}{h}(u_n - u_{n-1}) + \frac{\nu}{2}(\sigma_{y_{n-1}} + \sigma_{y_n}) - \frac{h}{2}f_x \\ \frac{h}{6} \frac{\partial \nu_{n-1}}{\partial y} + \frac{h}{3} \frac{\partial \nu_n}{\partial y} &= \frac{\nu}{2}(u_{n-1} - u_n) + \frac{(1-\nu^2)h}{6E}(\sigma_{y_{n-1}} + 2\sigma_{y_n}) \end{aligned} \right\} i = 0, 1, 2, 3, \dots, n-2 \quad (1)$$

式中各量含义参见文献[2],这里没有考虑边界条件,同时认为每个单元的步长一样.

2 控制方程的求解和广义动量守恒

很显然,要求出方程(1)的全部解析解是不可能的,因此实际应用中对其只能采用数值求解方法.但通过化简,对方程解的特性进行讨论则是可行的.现首先讨论体力等于零,即 $f_x = f_y = 0$ 的情况.

将方程(1)中的第2,6,10式相加,有

$$\begin{aligned} & \frac{h}{3} \frac{\partial \sigma_{y_0}}{\partial y} + \frac{h}{6} \frac{\partial \sigma_{y_i}}{\partial y} + \sum_{i=0}^{n-2} \left(\frac{h}{6} \frac{\partial \sigma_{y_i}}{\partial y} + \frac{2h}{3} \frac{\partial \sigma_{y_{i+1}}}{\partial y} + \frac{h}{6} \frac{\partial \sigma_{y_{i+2}}}{\partial y} \right) + \frac{h}{6} \frac{\partial \sigma_{y_{n-1}}}{\partial y} + \frac{h}{3} \frac{\partial \sigma_{y_n}}{\partial y} = \\ & - \frac{1}{2} (\tau_{xy_0} + \tau_{xy_1}) + \sum_{i=0}^{n-2} \frac{1}{2} (\tau_{xy_i} - \tau_{xy_{i+2}}) + \frac{1}{2} (\tau_{xy_{n-1}} + \tau_{xy_n}) \end{aligned} \quad (2)$$

经过计算,上式成为

$$\frac{h}{2} \frac{\partial \sigma_{y_0}}{\partial y} + \sum_{i=1}^{n-1} h \frac{\partial \sigma_{y_i}}{\partial y} + \frac{h}{2} \frac{\partial \sigma_{y_n}}{\partial y} = 0 \quad (3)$$

积分可得

$$\frac{h}{2} \sigma_{y_0} + h \sum_{i=1}^{n-1} \sigma_{y_i} + \frac{h}{2} \sigma_{y_n} = c_1 \text{ (常数)} \quad (4)$$

对(1)中的第3,7,11式采用类似的方法,可得

$$\frac{h}{2} \tau_{xy_0} + h \sum_{i=1}^{n-1} \tau_{xy_i} + \frac{h}{2} \tau_{xy_n} = c_2 \text{ (常数)} \quad (5)$$

为了看清式(4)(5)的物理意义,将它们改成

$$\sum_{i=1}^n h \frac{\sigma_{y_{i-1}} + \sigma_{y_i}}{2} = c_1 \quad \sum_{i=1}^n h \frac{\tau_{xy_{i-1}} + \tau_{xy_i}}{2} = c_2 \quad (6)$$

在 Hamilton 体系中, σ_y, τ_{xy} 是广义动量^[1~3].因为在每个单元内沿 x 方向采用线性插值,因此 $h \frac{\sigma_{y_{i-1}} + \sigma_{y_i}}{2}, h \frac{\tau_{xy_{i-1}} + \tau_{xy_i}}{2}$ 可看成是每个单元在 y, x 方向的广义动量.如将每个单元看成一个质点,则它们就是作用在质点上的广义动量,式(6)就表示作用在所有质点上的广义动量分别在 y, x 方向守恒.需要说明的是,这里的时间实际是 y ,因此所谓守恒是指广义动量沿 y 轴不变,亦即物体的任意两个 y 截面上的内力是相等的.因而式(6)实际上是一种静力平衡方程,并不是理论力学中的真正动量守恒方程.

由于在式(1)的数值计算过程中要进行指数运算,其值往往很大,容易造成病态,使解的精度很差.利用(6)的守恒性,则可以在计算过程中随时检验解的精度或提高解的精度.

3 其它情况的广义动量守恒

上面的讨论中认为单元体力为零,每个单元等长,在 x 面上只有面力零的边界条件.现分别放松这些要求来讨论广义动量守恒情况.

3.1 单元不等长

$$\text{经过推导,有} \quad \sum_{i=1}^n h_i \frac{\sigma_{y_{i-1}} + \sigma_{y_i}}{2} = c_1 \quad \sum_{i=1}^n h_i \frac{\tau_{xy_{i-1}} + \tau_{xy_i}}{2} = c_2 \quad (7)$$

除了单元步长外,其它与式(6)完全类同,即对于单元不等长情况,广义动量也守恒.

3.2 x 边有面力(图1)

经过推导,有

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial}{\partial y} \left[\sum_{i=1}^n h_i (\sigma_{y_{i-1}} + \sigma_{y_i}) / 2 \right] &= -p_{y_0} - p_{y_n} \\ \frac{\partial}{\partial y} \left[\sum_{i=1}^n h_i (\tau_{xy_{i-1}} + \tau_{xy_i}) / 2 \right] &= -p_{x_0} - p_{x_n} \end{aligned} \right\} \quad (8)$$

显然,一般情况下广义动量不守恒.但如果有 $p_{y_0} + p_{y_n} = 0, p_{x_0} + p_{x_n} = 0$,则仍有守恒律.如面力之和不为零而

等于常数,则有

$$\left. \begin{aligned} \sum_{i=1}^n h_i(\sigma_{y_{i-1}} + \sigma_{y_i})/2 &= -(p_{y_0} + p_{y_n})y + c_1 \\ \sum_{i=1}^n h_i(\tau_{xy_{i-1}} + \tau_{xy_i})/2 &= -(p_{x_0} + p_{x_n})y + c_2 \end{aligned} \right\} \quad (9)$$

守恒律虽不成立,但广义动量随 y 的变化规律明确,对求解仍有帮助.

3.3 x 边有位移边界

边界条件为(参见图 1)

$$u_0 = \bar{u}_0 \quad v_0 = \bar{v}_0, \quad u_n = \bar{u}_n \quad v_n = \bar{v}_n \quad (10)$$

如将位移边界考虑进控制方程,这时方程(1)中的有关式子必须改变,从而导不出广义动量守恒关系或类似于(8)的式子,但如果某一方向没有位移约束,则仍可有该方向的守恒律.即如 x 方向没有位移约束,则(7)中第 2 式仍成立.

3.4 有体力项

经过推导,有

$$\frac{\partial}{\partial y} \left[\sum_{i=1}^n h_i(\sigma_{y_{i-1}} + \sigma_{y_i})/2 \right] = -lf_y \quad \frac{\partial}{\partial y} \left[\sum_{i=1}^n h_i(\tau_{xy_{i-1}} + \tau_{xy_i})/2 \right] = -lf_x \quad (11)$$

其中 l 为物体 x 方向长(图 1).这时的情况与 3.2 相同,一般情况下没有守恒律.当为常体力时,则可有类似于(9)的关系式,仍有助于求解.

4 结 束 语

动量守恒定律是动力学中的基本定理.当 Hamilton 体系进入弹性力学并采用半解析法求解时,本文通过研究也得到了类似的结果,这除了具有一定的理论意义外,还具有实用意义.利用它可以很方便地检验半解析法数值解的正确性或提高解的精度.即使对于不具有守恒性的一些情况,利用本文的公式也可以很方便地检验应力的正确性或精度,且这些公式在程式序中是很易实现的.

在 Hamilton 体系中采用半解析法求解弹性力学问题时,当把物体离散成几个单元后,可把这几个单元看成是几个质点,因此动力学中的许多基本定律在此都应可应用.至于这些定律具有何种形式,如何应用,目前研究得还不多.相信随着研究的深入,这些定律都将会有助于弹性力学问题的解决.

参考文献:

[1] 钟万勰.弹性力学求解新体系[M].大连:大连理工大学出版社,1995.30~120.
[2] 唐立民,褚治中,邹贵平,等.混合状态 Hamilton 元的半解析解和叠层板的计算[J].计算结构力学及其应用,1992,9(4):347~360.
[3] 邹贵平,唐立民.复合材料条形域问题的混合状态 Hamilton 元的半解析解[J].力学与实践,1993,15(6):29~34.
[4] 冯康,秦孟兆.Hamilton 动力体系的 Hamilton 算法[J].自然科学进展——国家重点实验室通讯,1990(2):110~120.

A Conservation Law of Semi-analytical Method of Elasticity in Hamilton System

ZHOU Jian-fang¹, ZHUO Jia-shou², LI Dian-qing¹

- (1. Hohai Univ. Changzhou Branch, Changzhou 213022, China;
2. College of Civil Engineering, Hohai Univ., Nanjing 210098, China)

Abstract :A conservation law of generalized momentum is derived by solving the semi-analytical governing equation of elasticity in the Hamilton system, and the conservation of generalized momentum in various cases is discussed in detail.

Key words :theory of elasticity; Hamilton system; semi-analytical method; conservation law; generalized momentum

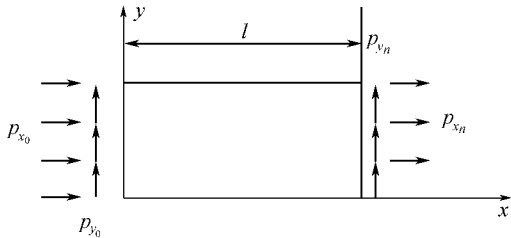


图 1 有面力情况

Fig.1 Condition of face force