

粘弹性基础梁计算方法及其应用

苏 超¹, 姜弘道², 谭恩会³

(1. 河海大学水利水电工程学院, 江苏 南京 210098; 2. 河海大学土木工程学院, 江苏 南京 210098;
3. 南京市市政工程设计院, 江苏 南京 210008)

摘要 利用粘弹性力学理论中的线性粘弹性与弹性的相应原理, 导出了半无限大粘弹性地基随时间变化的沉降公式, 建立了粘弹性地基上基础梁计算方法, 将该方法应用于软基上船闸底板的计算, 有效地模拟了“墩底分浇、预留宽缝、后期封合”的意在降低船闸底板负弯矩的工程措施, 为合理确定封缝时间和两侧回填土施工方案提供了计算分析工具。

关键词 基础梁 粘弹性 船闸底板

中图分类号: O343 文献标识码: A 文章编号: 1000-198X(2000)05-0101-05

自从 1867 年捷克学者文克勒 (Winklar) 提出“地基每单位面积上所受压力与地基的沉陷成正比”这个基本假定以来, 基于文克勒地基的基础梁板的计算方法一直沿用至今。1919 年前苏联学者普罗克托尔提出的半无限大弹性地基模型能够考虑边荷载的影响以及邻近底板间的相互影响, 但是, 理论计算和现场测试结果表明, 文克勒假设仅适用于可压缩层厚度与基础尺寸半长之比 $H/L < 0.5$ 的情况, 而半无限大弹性地基假设只适用于 $H/L > 3.0$ 的情况^[1]。我国许多学者从 60 年代起开始了弹性地基上基础梁计算方法的研究, 并提出了中厚度地基模型, 推导出了弹性层与刚性下卧层光滑接触、弹性层与刚性下卧层完全粘合情形下的中厚度地基沉陷公式^[2,3], 从而使模型更符合一般天然地基的实际情况, 在此基础上从理论上证明了不论是空间问题还是平面问题, 半无限大地基就是中厚度地基在 $H \rightarrow \infty$ 时的情形, 而文克勒地基就是中厚度地基在 $H \rightarrow 0$ 时的情形, 同时针对由不同特性土层构成的地基, 提出了成层地基模型。这些地基模型的出现对提高基础工程的计算水平起了积极的推动作用。传统的弹性地基基础梁计算方法目前仍然是软基上船闸等结构底板设计的规范方法, 但该方法存在着明显的不足, 主要表现在不能反映时间效应的影响上, 因为软基的沉陷在结构施工和运行过程中会不断变化, 往往需要若干年后才能稳定。近年来建在软基上的许多船闸采用了“墩底分浇、预留宽缝、后期封合”的施工方案, 这在降低船闸底板中可能出现的最大负弯矩、防止底板开裂方面取得了很好的效果。文[4]针对文克勒地基给出了粘弹性基础梁板计算方法, 为解决这个问题开辟了一种新的途径。本文进一步利用粘弹性力学基本理论, 推导出对应于 Kelvin 和三参数固体粘弹性模型的半无限大地基、中厚度地基的粘弹性沉陷公式, 建立了粘弹性地基上基础梁计算方法, 从而解决了考虑边载和地基侧向变形影响时软基上基础梁随时间变化的计算问题, 同时编制了相应的仿真计算程序, 就软基上船闸实例进行了较详细的分析研究。

1 线性粘弹性有关理论

1.1 粘弹性模型的本构关系

由粘弹性理论可知, 任意一种线性粘弹性材料的一维微分型本构关系可表示为

$$P\sigma = Q\epsilon$$
$$P = \sum_{k=0}^m p_k \frac{d^k}{dt^k} = \sum_{k=0}^m p_k D^k \quad (1)$$

$$Q = \sum_{k=0}^n q_k \frac{d^k}{dt^k} = \sum_{k=0}^n q_k D^k$$

式中： p_k, q_k ——与弹性参数、粘性参数有关的系数； D^k ——对时间 t 的 k 阶微分算子。

对应的三维本构关系为

$$P_1 S_{ij} = Q_1 e_{ij} \quad P_2 \sigma_{ii} = Q_2 \varepsilon_{ii} \tag{2}$$

式中： S_{ij}, e_{ij} ——应力、应变的偏张量； $\sigma_{ii}, \varepsilon_{ii}$ ——应力、应变的球张量； $P_1 = P$ ； $Q_1 = Q$ ； $P_2 = 1$ ； $Q_2 = 3K$ ， K 为体积变形模量。

固体粘弹性模型类型较多，常见的有 Kelvin 模型、Maxwell 模型及若干广义模型等。其中，Kelvin 模型是由一个弹性元件和一个粘性元件并联而成（图 1），三参量固体模型是由一个弹性元件和一个粘性元件串联再与一个弹性元件并联而成（图 2）。它们的 p_k, q_k 的表达式为：

a. Kelvin 模型

$$p_0 = 1 \quad q_0 = E \quad q_1 = \eta$$

b. 三参量固体模型

$$p_0 = 1 \quad p_1 = \frac{\eta_1}{E_2} \quad q_0 = E_3 \quad q_1 = 1 + \frac{E_3}{E_2} \eta_1$$

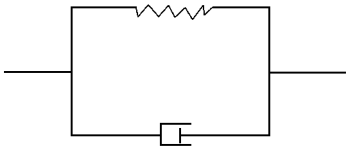


图 1 Kelvin 模型
Fig.1 Kelvin model

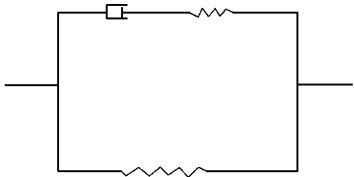


图 2 三参量固体模型
Fig.1 3-parameter solid model

1.2 粘弹性理论的两个基本原理^[5]

- a. Boltzman 叠加原理. 在线粘弹性问题中，多个起因的总效应等于各起因的效应之和。
- b. 弹性-粘弹性相应原理. 线粘弹性边值问题经过 Laplace 变换后，形式上与线弹性问题完全相同。这种粘弹性问题经 Laplace 变换后与弹性问题有相同的表达形式，称之为弹性-粘弹性相应原理，简称相应原理。由相应原理则可利用现有的有关地基的弹性解答，再经 Laplace 反变换得到相应的有关地基的粘弹性解答。

2 地基沉降的粘弹性解答

2.1 弹性地基在单位均布力作用下的沉降公式

设在半无限大弹性地基上作用有分布集度为 $1/c$ 、分布长度为 c 的均布力，分布力中点为 i ，则由该分布力引起的 k 点相对于 b 点的沉降可表示为

$$\delta_{kb}^i = \frac{1}{E_0} (F_{bi} - F_{ki}) \tag{3}$$

式中 E_0 为地基弹模， F_{bi}, F_{ki} 可由以下相同公式确定：

$$F_{ki} = \begin{cases} \frac{2x_k}{\pi c} \ln \left| \frac{2x_k + c}{2x_k - c} \right| + \frac{1}{\pi} \ln \left| 4 \frac{x_k^2}{c^2} - 1 \right| & \left| \frac{x_k}{c} \right| > 0.5 \\ 0 & x_k = 0 \end{cases}$$

对于平面应变问题，

$$\delta_{kb}^i = \frac{1 - \mu_0^2}{E_0} (F_{bi} - F_{ki}) \tag{4}$$

软土地基若是有限厚度，下部为刚性层，假设软土地基和刚性层光滑接触，在地基表面作用有分布集度为 $1/c$ 、分布长度为 c 的均布力，则对平面应变问题，地基的沉降可表示为

$$\delta_{kb}^i = \frac{1 - \mu_0^2}{E_0} F_{ki} \tag{5}$$
$$F_{ki} = \frac{2H}{\pi c} \int_0^\infty \frac{\text{sh}^2 \alpha}{(\text{sh} \alpha \text{ch} \alpha + \alpha)^2} (\sin k_1 \alpha - \sin k_2 \alpha) \text{d} \alpha$$
$$k_1 = \frac{x_k + 0.5c}{H} \quad k_2 = \frac{x_k - 0.5c}{H}$$

式中 x_k —— k 点到分布力中点的距离 ; H ——地基压缩层厚度.

2.2 基于 Kelvin 模型和三参量模型的平面粘弹性地基在单位均布力作用下的沉降公式

以三参量模型为例 ,设单位均布力在 t_1 时刻开始作用 ,则根据相应原理可得地基在拉氏变换后相空间的沉降公式为

$$\bar{\delta}_{ki}(s) = \frac{1 - [\mu(s)]}{E_0(s)} \frac{e^{-st_1}}{s} (F_{bi} - F_{ki}) \tag{6}$$

对三参量本构关系进行拉氏变换 ,有

$$\bar{P}_1 = 1 + \frac{\eta_1}{G_2} s \quad \bar{Q}_1 = 2 \left[G_3 + \left(\frac{G_3}{G_2} + 1 \right) \eta_1 s \right] \quad \bar{P}_2 = 1 \quad \bar{Q}_2 = 3K$$

令 $p_1 = \frac{\eta_1}{G_2}$, $q_1 = \left(\frac{G_3}{G_2} + 1 \right) \eta_1$, $x = \frac{2(G_3 + q_1 s)}{1 + p_1 s}$,则有 $\bar{\mu}_0 = \frac{3K - x}{6K + x}$, $\bar{E}_0 = \frac{9Kx}{6K + x}$.将其代入(6)式 ,并对(6)式进行拉氏反变换 ,得平面粘弹性地基的三参数沉降公式为

$$\delta_{ki}(t) = \frac{F_{bi} - F_{ki}}{4} \left\{ \left(\frac{1}{G_3} + \frac{3}{3K + G_3} \right) + \left(\frac{1}{G_2 + G_3} - \frac{1}{G_3} \right) \exp \left[- \left(\frac{G_2 G_3}{G_2 + G_3} \right) \eta_1 (t - t_1) \right] + \right. \tag{7}$$
$$\left. \left(\frac{3}{3K + G_2 + G_3} - \frac{3}{3K + G_3} \right) \exp \left[- \frac{G_2 (3K + G_3)}{(3K + G_2 + G_3) \eta_1} (t - t_1) \right] \right\}$$

同理可得平面粘弹性地基的 Kelvin 沉降公式

$$\delta_{ki}(t) = \frac{F_{ki}}{4G} \left[\left(1 - \exp \left(\frac{G}{\eta} (t - t_1) \right) \right) + \frac{3G}{3K + G} \left(1 - \exp \left(\frac{3K + G}{\eta} (t - t_1) \right) \right) \right] \tag{8}$$

式中 G, G_2, G_3 为剪切变形模量.

3 粘弹性基础梁计算方法

粘弹性基础梁计算采用传统的链杆法 ,即将基础梁分成若干段 ,假设在梁段中点有一链杆与地基相连 ,并且各链杆力都均匀作用于相应的梁段上 ,计算时取结构的刚体竖向位移增量 Δy 及结构的刚体转角增量 $\Delta \varphi$ 和各链杆处的链杆力为基本未知量 ,采用混合基本系求解 .对于粘弹性地基 ,由于地基沉降随时间变化 ,链杆力也是时间的函数 ,精确地模拟非常困难 ,因此 ,我们将时间离散为 n 个时段 $t_0, t_1, t_2, \dots, t_{n-1}, t_n$,假设在各时间区段内链杆力不变 ,利用在任意时刻系统满足界面上的位移协调条件以及结构整体的平衡条件建立典型方程 ,进行粘弹性地基基础梁的计算.

4 算 例

某船闸下闸首底板平均厚度为 2.25 m ,底板下平面地基高程为 11.20 m ,闸首全宽为 43.20 m ,采用“墩底分浇、预留宽缝、后期封合”的施工措施 ,若以船闸左角点为坐标原点 ,向右为正 ,则宽缝的位置为 12.00 ~ 13.20 m (左) ,30.00 ~ 31.20 m (右) .计算时基础梁弹模随浇筑龄期变化 ,最终弹模为 21 GPa ,指数变化系数为 0.3 ,泊松比为 0.167 .地基采用 Kelvin 粘弹性地基 ,弹模为 40 MPa ,泊松比为 0.350 ,粘性参数为 1.6 GPa·d .从两边墩底板浇筑混凝土起算 ,大致的施工过程如下 :第 17 天浇筑中底板 ,第 57 天南边墩浇筑至 18.92 m ,第 70 天北边墩浇筑至 18.92 m ,第 108 天回填土至 17.00 m ,第 128 天北边墩浇筑至 22.84 m ,第 135 天南边墩浇筑至 22.84 m ,第 228 天回填土至 22.00 m ,第 228 天地下水位回至 14.20 m ,第 230 天封合宽缝 ,第 253 天北边墩浇筑至 29.70 m ,第 258 天南边墩浇筑至 29.70 m ,第 268 天回填土至 27.00 m ,第 268 天地下水位回至 21.00 m ,

第 448 天闸室充水至 18.50 m ,第 478 天闸室充水至 22.00 m ,第 508 天闸室充水至 25.50 m ,第 538 天闸室充水至 29.00 m .

由于分缝施工 ,在浇筑过程及以后的一段时间里边墩自重可以发挥作用 ,使其下部的地基充分固结 ,以降低船闸底板的负弯矩 .从表 1 可见 ,封缝时间越长 ,其跨中最大负弯矩越小 .

图 3 给出了负弯矩最大时(第 440 天)船闸底板弯矩的分布 ,图 4 给出了正弯矩最大时(第 1 000 天)船闸底板弯矩分布 .分析可知 ,正弯矩过大会导致船闸底板下部表面开裂 ,而负弯矩过大会导致船闸底板上部表面开裂 .由于底板开裂有可能会 导致结构破坏 ,设计时作为规范标准严格控制不允许产生底板裂缝 ,最经济的设计就是控制船闸底板在施工和运行过程中的正、负弯矩量级相差不要过大 ,以充分利用结构的自身抗弯能力 ,因此 ,该船闸推迟 20 ~ 30 d 封缝 ,结果会更好一些 .图 5 给出了施工及运行过程中梁上跨中弯矩随时间的变化过程 .从图 5 可以看出主要施工过程中的危险阶段 ,施工时应多加注意 .

表 1 封缝时间对跨中弯矩的影响

Table 1 Effect of time of joints sealing on bending moment in the middle of span

封缝时间/d	200	230	260
跨中弯矩/(10 ⁴ N·m)	- 276.8	- 272.6	- 244.2

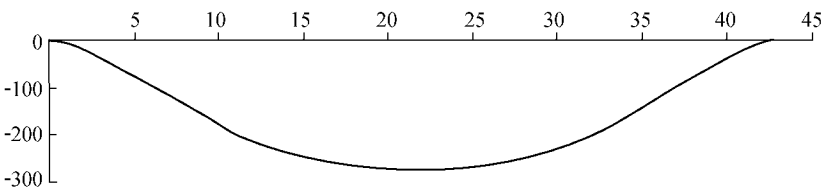


图 3 施工第 440 天梁上弯矩示意图(负弯矩、上表面受拉)

Fig.3 Bending moment diagram of beam on the 440th day of construction
(negative bending moment , tension on upper surface)

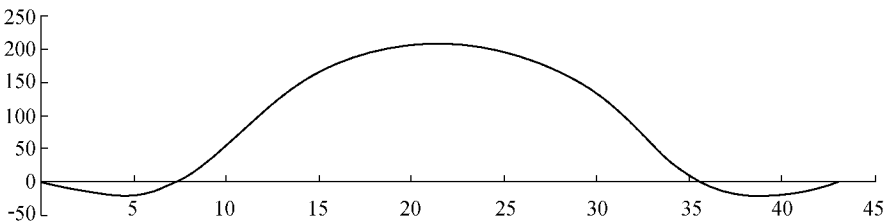


图 4 施工第 1 000 天梁上弯矩示意图(正弯矩、下表面受拉)

Fig.4 Bending moment diagram of beam on the 1 000th day of construction
(positive bending moment , tension on lower surface)

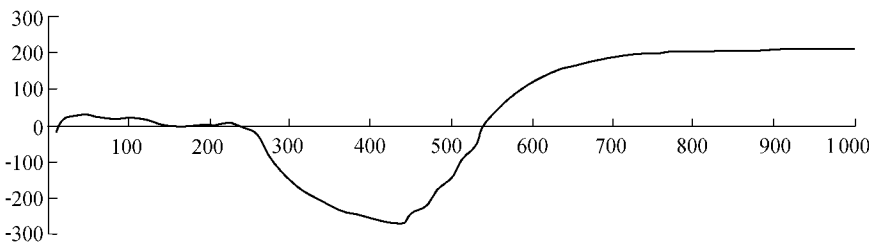


图 5 施工及运行期梁上跨中弯矩随时间变化示意图

Fig.5 Bending moment in the middle of span of beam vs time during construction and operation

5 结 论

弹性地基上基础梁计算方法仍然是现在软基上船闸设计的主要计算方法(规范要求),笔者在此基础上提出粘弹性基础梁算法,可以有效地模拟船闸地基开挖、混凝土浇筑、两侧回填土及闸室充水等施工、运行全过程.方法能够给出船闸底板的正、负弯矩的具体数值,并通过调整封缝时间和回填节奏等来控制正、负弯矩值,达到提高设计安全度的目的.

参考文献：

[1] 赵光恒,张子明.地基模型和基础梁板分析[J].河海大学科技情报,1990(2):17~22.
[2] 张裕怡.有限深弹性基础梁计算用表[M].北京:水利出版社,1980.15~17.
[3] 赵光恒,张子明.有限深弹性层上基础梁的计算[J].河海大学学报,1984,12(2):32~45.
[4] 钱家欢.粘弹性理论在土力学方面的应用[J].高等学校自然科学学报,1966,2(1):73~80.
[5] 杨廷青.粘弹性力学[M].武汉:华中理工大学出版社,1990.66~77.

Computation Method and Application to Viscoelastical Foundation Beam

SU Chao¹, JIANG Hong-dao², TAN En-hui³

(1. College of Water Conservancy and Hydropower Engineering, Hohai Univ., Nanjing 210098, China;
2. College of Civil Engineering, Hohai Univ., Nanjing 210098, China;
3. Nanjing Institute of Municipal Design, Nanjing 210008, China)

Abstract :In the paper, on the basis of relevant linear viscoelasticity and elasticity principles of viscoelastical mechanics theory, a subsidence formula for semi-infinite viscoelastic foundations is deduced; by use of the conventional foundation beam route, a computation method for the foundation beam on viscoelastic foundations is established, and it is applied to compute the bottom plate of a lock on a soft foundation. The engineering measures, “ pier cast at several times, broad joints prepared and joints sealed at the later period”, to reduce the negative bending moment of the bottom plate of the lock, can be effectively simulated in the method, and a computation instrument for determining joint sealing time and soild refilling scheme for the two sides of a lock is provided.

Key words :foundation beam; viscoelasticity; lock bottom plate