

基于 Hamilton 体系的分离变量法

周建方¹ 卓家寿² 李典庆¹

(1. 河海大学常州校区, 江苏 常州 213022; 2. 河海大学土木工程学院, 江苏 南京 210098)

摘要 利用 Hamilton 体系下的分离变量法, 对可用传统分离变量法分离变量的一类偏微分方程进行了求解, 得到了完全相同的结果, 从而说明了 Hamilton 体系下分离变量法的正确性和潜在能力, 为 Hamilton 体系下分离变量法的广泛应用打下了基础.

关键词 Hamilton 体系, 分离变量法, 偏微分方程

中图分类号 O175 **文献标识码** A **文章编号** 1000-198X(2000)06-0027-05

在数学物理方程中, 对一类偏微分方程, 如有界弦振动方程、调和方程等, 传统的分离变量法是一种十分有效的求解方法^[1]. 然而, 对于非 Sturm-Liouville 问题, 由于不能保证基底函数族的正交完备性, 则显得无能为力^[2]. 为了克服这个困难, 钟万勰教授引入了 Hamilton 体系, 然后在 Hamilton 体系下采用分离变量法^[3, 4], 取得了较好结果. 并在此基础上具体研究了非自共轭二阶椭圆型方程的广义解析解和半解析法^[5, 6], 数值精度较高. 然而, 对于可进行传统分离变量的微分方程能否用 Hamilton 体系下的分离变量法求解并没有进行研究, 本文则对此作一讨论.

1 有界弦的自由振动

有界弦的自由振动定解问题为

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} &= a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} & 0 \leq x \leq l & \quad t > 0 \\ u|_{x=0} &= 0 & u|_{x=l} &= 0 \\ u|_{t=0} &= \varphi(x) & \frac{\partial u}{\partial t}|_{t=0} &= \psi(x) \end{aligned} \right\} \quad (1)$$

首先将它引入到 Hamilton 体系, 为此令

$$\sigma = \frac{1}{a^2} \frac{\partial u}{\partial t} \quad (2)$$

代入式(1)中第一式, 则有

$$\frac{\partial u}{\partial t} = a^2 \sigma \quad \frac{\partial \sigma}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \quad (3)$$

写成矩阵形式

$$\begin{Bmatrix} \frac{\partial u}{\partial t} \\ \frac{\partial \sigma}{\partial t} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & a^2 \\ \frac{\partial^2}{\partial x^2} & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u \\ \sigma \end{Bmatrix} \quad (4)$$

令

$$\mathbf{V} = \begin{Bmatrix} u \\ \sigma \end{Bmatrix} \quad \mathbf{H} = \begin{bmatrix} 0 & a^2 \\ \frac{\partial^2}{\partial x^2} & 0 \end{bmatrix} \quad (5)$$

则式(4)变为

$$\frac{\partial \mathbf{V}}{\partial t} = \mathbf{H} \mathbf{V} \quad (6)$$

此式即为原微分方程在 Hamilton 体系中的表示. $\mathbf{H}$ 为 Hamilton 算子矩阵, 其本征值正负成对出现, 本征向量相互辛正交^[3, 4].

现在使用分离变量法, 设

$$V = T_n(t)X_n(x) \quad X_n(x) = \begin{Bmatrix} X_{n1}(x) \\ X_{n2}(x) \end{Bmatrix} \quad (7)$$

代入式(6)可得

$$\frac{dT_n}{dt} = \nu_n T_n \quad (8)$$

$$HX_n = \nu_n X_n \quad (9)$$

首先求解式(9)的本征问题. 考虑式(1)的边界条件, 通过推导可得非零解为

$$\nu_n = i \frac{an\pi}{l} \quad (n = \pm 1, \pm 2, \dots) \quad (10)$$

$$X_n = \begin{Bmatrix} \sin \frac{n\pi x}{l} \\ i \frac{n\pi}{la} \sin \frac{n\pi x}{l} \end{Bmatrix} \quad (n = \pm 1, \pm 2, \dots) \quad (11)$$

式中 i 为虚数单位. 这里没有考虑积分常数, 下面一同考虑. 将式(10)代入式(8)可解得

$$T_n = C_n \left(\cos \frac{an\pi t}{l} + i \sin \frac{an\pi t}{l} \right) \quad (n = \pm 1, \pm 2, \dots) \quad (12)$$

根据叠加原理最后可得

$$V = \sum_{n=-\infty}^{\infty} T_n X_n = \sum_{n=1}^{\infty} (T_n X_n + T_{-n} X_{-n}) = X(x)T(t) \quad (13)$$

$$\text{式中 } X(x) = [X_1, X_2, \dots, X_{-1}, X_{-2}, \dots]^T \quad T(t) = [T_1, T_2, \dots, T_{-1}, T_{-2}, \dots]^T \quad (14)$$

在式(13)中还有常数 C_n 必须确定, 这必须利用式(1)中的初始条件. 将初始条件代入式(13), 有

$$X(x)T(0) = \begin{Bmatrix} \varphi(x) \\ \frac{1}{a^2} \Psi(x) \end{Bmatrix} \quad (15)$$

从式(12)可以看出, $T(0) = [C_1, C_2, \dots, C_{-1}, C_{-2}, \dots]^T$ 为由常数组成的列阵, 因此, 只要确定出 $T(0)$ 列阵, 问题就得到解决. 为此对式(15)两边分别乘以 $X^T J$ 并积分, 有

$$\int_0^l X^T J X T(0) dx = \int_0^l X^T J \begin{Bmatrix} \varphi(x) \\ \frac{1}{a^2} \Psi(x) \end{Bmatrix} dx = \int_0^l X^T \begin{Bmatrix} \frac{1}{a^2} \Psi(x) \\ -\varphi(x) \end{Bmatrix} dx \quad (16)$$

式中 $J = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$ 为辛几何中的度量矩阵. 根据 Hamilton 算子矩阵本征向量的辛正交关系(事实上根据直接计算也可得到)

$$\int_0^l X_j^T J X_k dx = \begin{cases} 0 & \text{当 } k \neq -j \\ i \frac{j\pi}{a} & \text{当 } k = -j \end{cases} \quad (17)$$

展开式(17), 则可求得

$$\left. \begin{aligned} C_n &= \frac{-i}{an\pi} \int_0^l \Psi(x) \sin \frac{n\pi x}{l} dx + \frac{1}{l} \int_0^l \varphi(x) \sin \frac{n\pi x}{l} dx \\ C_{-n} &= \frac{-i}{an\pi} \int_0^l \Psi(x) \sin \frac{n\pi x}{l} dx - \frac{1}{l} \int_0^l \varphi(x) \sin \frac{n\pi x}{l} dx \end{aligned} \right\} \quad (18)$$

最后可得

$$V = \begin{Bmatrix} u \\ \sigma \end{Bmatrix} = \sum_{n=1}^{\infty} \begin{Bmatrix} \left[\frac{2}{l} \int_0^l \varphi(x) \sin \frac{n\pi x}{l} dx \cos \frac{an\pi t}{l} + \frac{2}{an\pi} \int_0^l \Psi(x) \sin \frac{an\pi t}{l} dx \sin \frac{an\pi t}{l} \right] \sin \frac{n\pi x}{l} \\ \left[-\frac{2n\pi}{l^2 a} \int_0^l \varphi(x) \sin \frac{n\pi x}{l} dx \sin \frac{an\pi t}{l} + \frac{2}{la^2} \int_0^l \Psi(x) \sin \frac{n\pi x}{l} dx \cos \frac{an\pi t}{l} \right] \sin \frac{n\pi x}{l} \end{Bmatrix} \quad (19)$$

u 的表达式与传统的分离变量法结果完全一样. 此外, 这里还得到了 σ 的表达式, 这是传统的分离变量法所做不到的. 通过直接验算可知 σ 表达式也完全正确.

2 有界弦的强迫振动

有界弦的强迫振动定解问题为

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} &= a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + f(x, t) & 0 < x < l, t > 0 \\ u|_{x=0} &= 0 & u|_{x=l} &= 0 \\ u|_{t=0} &= 0 & \frac{\partial u}{\partial t}|_{t=0} &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (20)$$

同样, 首先将微分方程引入 Hamilton 体系, 有

$$\frac{\partial \mathbf{V}}{\partial t} = \mathbf{H}\mathbf{V} + \begin{Bmatrix} 0 \\ f/a^2 \end{Bmatrix} \quad (21)$$

设解仍具有式 (13) 的形式, 且 X_n 仍如式 (11) 所示. 此时式 (20) 中的边界条件显然满足. 将式 (13) 代入式 (21) 有

$$\mathbf{X} \frac{d\mathbf{T}}{dt} = \mathbf{H}\mathbf{X}\mathbf{T} + \begin{Bmatrix} 0 \\ f/a^2 \end{Bmatrix} \quad (22)$$

$$\text{根据式 (9) 有} \quad \mathbf{H}\mathbf{X} = \mathbf{X}\mathbf{M} \quad (23)$$

其中 $\mathbf{M}$ 为有 ν_n 组成的对角元矩阵. 将式 (23) 代入 (22) 可得

$$\mathbf{X} \left(\frac{d\mathbf{T}}{dt} - \mathbf{M}\mathbf{T} \right) = \begin{Bmatrix} 0 \\ f/a^2 \end{Bmatrix} \quad (24)$$

将右端项辛级数展开, 即令

$$\mathbf{X}\mathbf{G} = \begin{Bmatrix} 0 \\ f/a^2 \end{Bmatrix} \quad (25)$$

其中 $\mathbf{G} = [g_1, g_2, \dots, g_{-1}, g_{-2}, \dots]^T$ 为展开系数列阵, 与上面一样, 两边分别乘以 $\mathbf{X}^T \mathbf{J}$ 并积分, 利用辛正交关系式 (17) 可求得

$$g_n = g_{-n} = -\frac{i}{an\pi} \int_0^l f(x, t) \sin \frac{n\pi x}{l} dx \quad (n = 1, 2, \dots) \quad (26)$$

将式 (25) 代入 (24) 可得

$$\frac{d\mathbf{T}}{dt} - \mathbf{M}\mathbf{T} = \mathbf{G} \quad (27)$$

写成单个方程为

$$\frac{dT_n}{dt} - i \frac{an\pi}{l} T_n = g_n \quad (n = \pm 1, \pm 2, \dots) \quad (28)$$

求解可得

$$T_n = C_n e^{i \frac{an\pi}{l} t} + \int_0^t e^{i \frac{an\pi}{l} (t-\tau)} g_n d\tau \quad (n = \pm 1, \pm 2, \dots) \quad (29)$$

根据式 (20) 中的初始条件易求得 $T_n(0) = 0$, 从而得 $C_n = \alpha (n = \pm 1, \pm 2, \dots)$. 将式 (29) 代入式 (13) 最后可求得

$$\mathbf{V} = \sum_{n=1}^{\infty} \left\{ \begin{aligned} &\frac{2}{an\pi} \left[\int_0^t \left(\int_0^l f(x, \tau) \sin \frac{n\pi x}{l} dx \right) \sin \frac{an\pi}{l} (t - \tau) d\tau \right] \sin \frac{n\pi x}{l} \\ &\frac{2}{la^2} \left[\int_0^t \left(\int_0^l f(x, \tau) \sin \frac{n\pi x}{l} dx \right) \cos \frac{an\pi}{l} (t - \tau) d\tau \right] \sin \frac{n\pi x}{l} \end{aligned} \right\} \quad (30)$$

结果也与传统的分离变量法一样.

上面讨论的都是齐次边界条件情况, 对于非齐次边界条件, 则可与传统的分离变量法一样, 首先进行边界条件齐次化, 然后再用上面的方法求解. 其过程不再赘述.

3 调和方程

调和方程的定解问题为

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} &= 0 \\ u|_{x=0} &= 0 \quad u|_{x=a} = 0 \\ u|_{y=0} &= \varphi_1(x) \quad u|_{y=b} = \varphi_2(x) \end{aligned} \right\} \quad (31)$$

设

$$\sigma = \frac{\partial u}{\partial y} \quad (32)$$

则经过推导可得类似式(6)的表达式,只不过式中 t 变为 y ,

$$H = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\frac{\partial^2}{\partial x^2} & 0 \end{bmatrix} \quad (33)$$

仍是一个 Hamilton 算子矩阵,设

$$V = Y_n(y)X_n(x) \quad X_n = \begin{Bmatrix} X_{n1}(x) \\ X_{n2}(x) \end{Bmatrix} \quad (34)$$

代入式(6)可得

$$\frac{dY_n}{dy} = \nu_n Y_n \quad (35)$$

$$HX_n = \nu_n X_n \quad (36)$$

结合式(31)中 x 边界条件,可求得式(36)的非零解为

$$\nu_n = \frac{n\pi}{a} \quad (n = \pm 1, \pm 2, \dots) \quad (37)$$

$$X_n = \begin{Bmatrix} \sin \frac{n\pi x}{a} \\ \frac{n\pi}{a} \sin \frac{n\pi x}{a} \end{Bmatrix} \quad (n = \pm 1, \pm 2, \dots) \quad (38)$$

将式(37)代入(35),可求得

$$Y_n = C_n e^{\frac{n\pi y}{a}} \quad (n = \pm 1, \pm 2, \dots) \quad (39)$$

这样

$$V = \sum_{n=1}^{\infty} (Y_n X_n + Y_{-n} X_{-n}) = X(x)Y(y) \quad (40)$$

$$\text{式中} \quad X(x) = [X_1, X_2, \dots, X_{-1}, X_{-2}, \dots] \quad Y(y) = [Y_1, Y_2, \dots, Y_{-1}, Y_{-2}, \dots]^T \quad (41)$$

现在还必须根据式(31)中 y 的边界条件确定 C_n ,为此将边界条件改写为

$$V|_{y=0} = \begin{Bmatrix} u \\ \sigma \end{Bmatrix}|_{y=0} = \begin{Bmatrix} \varphi_1(x) \\ \Psi_1(x) \end{Bmatrix} \quad V|_{y=b} = \begin{Bmatrix} \varphi_2(x) \\ \Psi_2(x) \end{Bmatrix} \quad (42)$$

式中 $\Psi_1(x), \Psi_2(x)$ 目前是两个未知函数,暂且当作已知,在后面的推导中可看到实际它们被消去。

将(42)两式中的右端辛级数展开

$$XG = \begin{Bmatrix} \varphi_1(x) \\ \Psi_1(x) \end{Bmatrix} \quad XF = \begin{Bmatrix} \varphi_2(x) \\ \Psi_2(x) \end{Bmatrix} \quad (43)$$

和前面一样利用辛正交关系,经过推导可求得

$$\left. \begin{aligned} g_n &= \frac{1}{n\pi} \int_0^a \Psi_1(x) \sin \frac{n\pi x}{a} dx + \frac{1}{a} \int_0^a \varphi_1(x) \sin \frac{n\pi x}{a} dx \\ g_{-n} &= \frac{1}{n\pi} \int_0^a \Psi_1(x) \sin \frac{n\pi x}{a} dx - \frac{1}{a} \int_0^a \varphi_1(x) \sin \frac{n\pi x}{a} dx \\ f_n &= \frac{1}{n\pi} \int_0^a \Psi_2(x) \sin \frac{n\pi x}{a} dx + \frac{1}{a} \int_0^a \varphi_2(x) \sin \frac{n\pi x}{a} dx \\ f_{-n} &= \frac{1}{n\pi} \int_0^a \Psi_2(x) \sin \frac{n\pi x}{a} dx - \frac{1}{a} \int_0^a \varphi_2(x) \sin \frac{n\pi x}{a} dx \end{aligned} \right\} \quad (n = 1, 2, \dots) \quad (44)$$

将式(40)及(43)代入(42),可得

$$\left. \begin{aligned} c_n &= g_n & c_{-n} &= g_{-n} \\ c_n e^{\frac{n\pi b}{a}} &= f_n & c_{-n} e^{-\frac{n\pi b}{a}} &= f_{-n} \end{aligned} \right\} \quad (n = 1, 2, \dots) \tag{45}$$

从而可解得 C_n, C_{-n} ,这样最后解为

$$V = \sum_{n=1}^{\infty} \left\{ \left(C_n e^{\frac{n\pi y}{a}} - C_{-n} e^{-\frac{n\pi y}{a}} \right) \sin \frac{n\pi x}{a} + \frac{n\pi}{a} \left(C_n e^{\frac{n\pi y}{a}} + C_{-n} e^{-\frac{n\pi y}{a}} \right) \sin \frac{n\pi x}{a} \right\} \tag{46}$$

结果与传统的分离变量法完全一样.

对于泊松方程 ,则与第二节类似 ,其右端项可用辛级数展开后再求解 ,对于 x 边非齐次边界条件 ,则可进行齐次化.有了这些方法 ,就可以求解一类广泛的非齐次边界条件的泊松方程.

4 结 束 语

在文献 [5,6] 中 ,虽然对二阶椭圆型方程进行了 Hamilton 体系下的分离变量 ,但最后确定积分常数仍是用变分方法 ,而不是像传统的分离变量法直接确定积分参数 ,因此并不是完整的分离变量法.另一方面 ,Hamilton 体系下的分离变量法是否适合和正确 ,尤其解是否收敛 ,虽然也有文献 [7] 进行了讨论 ,但还是没有得到数学上的严格证明.而本文则通过了一类可进行传统分离变量的偏微分方程采用了 Hamilton 体系下的求解 ,不但得到了原变量 ,同时还得到了对偶变量 ,且结果完全与传统的分离变量法的结果一样 ,从一定程度上说明了 Hamilton 体系下的分离变量法的可行性和正确性.

Hamilton 体系下的分离变量法的研究还仅仅是开始 ,但已显示出一定的优越性 ,尤其在弹性力学中 ,得到了一些传统逆解法不易得到的结果 [8] ,逐渐形成了新的体系 [9] .相信随着研究的深入 ,必将给我们解决目前一些难以解决的问题提供更多的机会.

参考文献 :

[1] 复旦大学数学系. 数学物理方程 [M]. 北京 : 高等教育出版社 ,1979. 10 ~ 45.
[2] Courant R , Hilber D. 数学物理方法 [M]. 钱敏 , 郭敦仁译. 北京 : 科学出版社 ,1958. 50 ~ 63.
[3] 钟万勰. 分离变量法与哈密尔顿体系 [J]. 计算结构力学及其应用 ,1991 ,8 (3) :229 ~ 240.
[4] 钟万勰. 条形域弹性平面问题与哈密尔顿体系 [J]. 大连理工大学学报 ,1991 ,31 (4) :373 ~ 384.
[5] 欧阳华江 , 钟万勰 , 杨琦. 二阶椭圆型方程的广义解析解 [J]. 大连理工大学学报 ,1993 ,33 (3) :276 ~ 282.
[6] 欧阳华江 , 钟万勰 , 杨琦. 一类基于 Hamilton 体系的半解析法 [J]. 计算结构力学及其应用 ,1993 ,10 (2) :129 ~ 136.
[7] 张鸿庆 , 阿拉坦仓 , 钟万勰. Hamilton 体系与辛正交系的完备性 [J]. 应用数学和力学 ,1997 ,18 (3) :217 ~ 221.
[8] 周建方. 弹性力学中的 Hamilton 理论及数值方法研究 [D] [学位论文]. 南京 : 河海大学 ,1998.
[9] 钟万勰. 弹性力学求解新体系 [M]. 大连 : 大连理工大学出版社 ,1995. 36 ~ 222.

Variable Separation Method Based on Hamilton System

ZHOU Jian-fang¹ , ZHUO Jia-shou² , LI Dian-qing¹

(1. Hohai Univ. , Changzhou Branch , Changzhou 213022 , China ;
2. College of Civil Engineering , Hohai Univ. , Nanjing 210098 , China)

Abstract : A group of partial differential equations are solved by use of the variable separation method in the Hamilton system , and the results are identical with those solved by use of classical methods of separation of variables. It is shown that the variable separation method in the Hamilton system is correct and is of great potential , providing a solid foundation for wide application of the method of variable separation in the Hamilton system.

Key words : Hamilton system ; method of variable separation ; partial differential equation