

# 连续参数集值下鞅的轨道连续性

朱永忠

( 河海大学数学物理系 , 江苏 南京 210098 )

摘要 给出了连续参数集值下鞅的两个等价条件 : ( a )  $\{F_t, \mathcal{F}_t; t \in R_+\}$  存在弱右连续修正 ; ( b )  $\{\int_{\Omega} F_t dp; t \in R_+\}$  为弱右连续的 . 其次给出了连续参数集值下鞅存在轨道为弱右连续及 K. M. 右连续修正的 Föllmer 引理 , 最后在 Banach 空间为自反的条件下 , 给出了连续参数集值下鞅存在 K. M. 右连续修正的充要条件 .

关键词 弱紧凸集 闭凸集 连续参数 集值下鞅 右连续

中图分类号 : O211.6 文献标识码 : A 文章编号 : 1000-198X(2000)06-0066-04

## 1 概念和记号

设  $(\Omega, \mathcal{F}, P)$  为一完备的概率空间 ,  $X$  为实可分的 Banach 空间 , 范数为  $\|\cdot\|$  , 对偶空间为  $X^*$  , 记

$$P_{(w)Kc}(X) = \{A \subset X; A \text{ 非空 (弱)紧凸}\}$$

$$P_{(w)Kc}(X) = \{A \subset X; A \text{ 非空 (弱)紧凸}\}$$

对于任意的  $A \in P(X)$  , 记

$$\|A\| = \sup\{\|x\|; x \in A\}$$

$$\mathcal{L}^1(X) = \{F \in P(X) \text{ a.e.}; F \text{ 可测且 } E\|F\| < \infty\}$$

$$\mathcal{L}_{fc}^1(X) = \{F \in P_{fc}(X) \text{ a.e.}; F \in \mathcal{L}^1(X)\}$$

$$\mathcal{L}_{wkc}^1(X) = \{F \in P_{wkc}(X) \text{ a.e.}; F \in \mathcal{L}^1(X)\}$$

对于任意的  $x^* \in X^*$  ,  $A \in P(X)$  , 称

$$\sigma(x^*, A) = \sup\{\langle x^*, x \rangle; x \in A\}$$

为  $A$  的支撑函数 .

如果  $F: \Omega \rightarrow P(X)$  为随机集 , 则  $F$  的积分为

$$\int_{\Omega} F dp = \{ \int_{\Omega} f dp; f \in S_F^1 \}$$

其中  $\int_{\Omega} f dp$  为 Bochner 积分 ,  $L^1(\Omega, X)$  是  $\Omega \rightarrow X$  的 Bochner 可积映射全体 ,  $S_F^1 = \{f \in L^1(\Omega, X); f(\omega) \in F(\omega) \text{ a.e.}\}$  .

设  $F$  为随机集 , 若有一随机集  $\mathcal{E}(F/\mathcal{F})$  满足

$$S^1\mathcal{E}(F/\mathcal{F})(\mathcal{F}) = \text{cl}\{E(f/\mathcal{F}); f \in S_F^1\}$$

则称  $\mathcal{E}(F/\mathcal{F})$  为随机集  $F$  关于  $\mathcal{F}$  的条件期望 .

对于  $A_n, A \in P(X)$  ,  $x^* \in X^*$  , 记

$$s\text{-}\lim A_n = \{x \in X; \exists x_n \in A_n \text{ s.t. } x_n \xrightarrow{s} x\}$$

$$w\text{-}\lim A_n = \{x \in X; \exists x_{n_k} \in A_{n_k} \text{ s.t. } x_{n_k} \xrightarrow{w} x\}$$

显然有  $s - \lim A_n \subset w - \overline{\lim A_n}$  若有  $s - \lim A_n = A = w - \overline{\lim A_n}$  则称  $\{A_n, n \geq 1\}$  在 Kuratowski - Mosco 意义下收敛到  $A$ , 记为  $A_n \xrightarrow{K.M.} A$ ; 若有  $\lim_{n \rightarrow \infty} \alpha(x^*, A_n) = \alpha(x^*, A)$  则称  $\{A_n, n \geq 1\}$  弱收敛到  $A$ , 记为  $A_n \xrightarrow{w} A$ .

## 2 连续参数集值下鞅的轨道连续性

$\{\mathcal{F}_t; t \in R_+ = [0, \infty)\}$  为  $\mathcal{F}$  的上升子  $\sigma$  域流, 满足通常条件:

- (a)  $\forall s, t \in R_+, s \leq t$ , 有  $\mathcal{F}_s \subset \mathcal{F}_t$ ;
- (b)  $\mathcal{F}_0$  包含  $\mathcal{F}$  中一切  $P$  零测集;
- (c)  $\forall t \in R_+$ , 有  $\mathcal{F}_t = \bigcap_{u>t} \mathcal{F}_u$ .

随机集族  $\{F_t; t \in R_+\}$  若有  $\alpha(x^*, F_t) \rightarrow \alpha(x^*, F), t \rightarrow \infty$  a.e.,  $\forall x^* \in X^*$  则称  $\{F_t; t \in R_+\}$  弱收敛于  $F$ , 记为  $F_t \xrightarrow{w} F$  a.e.; 若对任意  $t_n \rightarrow \infty$  有  $F_{t_n} \xrightarrow{K.M.} F$  a.e. 则称  $\{F_t; t \in R_+\}$  在 Kuratowski - Mosco 意义下收敛到  $F$ , 记为  $F_t \xrightarrow{K.M.} F$ .

定义 适应族  $\{F_t, \mathcal{F}_t; t \in R_+\}$  为闭凸集值随机集族, 且  $E \|F_t\| < \infty$  若对任意  $s, t \in R_+$  当  $s < t$  时, 有

$$F_s \subset \mathcal{E}(F_t / \mathcal{F}_s) \text{ (a.e.)}$$

则称  $\{F_t, \mathcal{F}_t; t \in R_+\}$  为闭凸集值连续下鞅.

定理 1  $X^*$  可分,  $\{F_t, \mathcal{F}_t; t \in R_+\}$  为闭凸集值下鞅, 则下述两条件等价:

- (a)  $\{F_t, \mathcal{F}_t; t \in R_+\}$  存在弱右连续修正;
- (b)  $\int_{\Omega} F_t dp; t \in R_+$  为弱右连续的.

证明: 由弱右连续定义有 (a) 等价于  $\forall x^* \in X^*, \{\alpha(x^*, F_t), \mathcal{F}_t; t \in R_+\}$  存在右连续修正, 又由于  $\{\alpha(x^*, F_t), \mathcal{F}_t; t \in R_+\}$  为实值下鞅, 由文献 1 定理 6.3 可知 (a) 与  $\{\int_{\Omega} \alpha(x^*, F_t) dp; t \in R_+\}$  为右连续等价, 又由文献 2 性质 3.4 有 (a) 与 (b) 等价.

下述定理为实值 Föllmer 引理在集值关于弱右连续情形下的形式.

定理 2  $X^*$  可分,  $\{F_t, \mathcal{F}_t; t \in R_+\}$  为弱紧凸集值下鞅,  $D$  为  $R_+$  中一可数稠子集,  $F_t \subset G \in P_{wkc}(X)$ , 任给  $t \in R_+$  则存在弱紧凸集值下鞅  $\{Y_t, \mathcal{F}_t^+; t \in R_+\}$  满足:

- (a)  $\{Y_t; t \in R_+\}$  的所有轨道为弱右连续的, 且对几乎所有的  $\omega$ , 对一切  $t \in R_+$  有

$$\alpha(x^*, Y(\omega)) = \lim_{s \in D, s \downarrow t} \alpha(x^*, Y_s(\omega))$$

- (b) 对几乎所有的  $\omega$ , 对一切  $t \in R_+, \forall x^* \in X^*$

$$\alpha(x^*, F_t) \leq \alpha(x^*, \mathcal{E}(Y_t / \mathcal{F}_t))$$

- (c)  $\{Y_t, \mathcal{F}_t^+; t \in R_+\}$  为弱紧凸集值下鞅.

证明: 令  $D^* = \{x_1^*, x_2^*, x_3^*, \dots\}, \forall x_i^* \in D^*$  有  $\{\alpha(x_i^*, F_t), \mathcal{F}_t; t \in R_+\}$  为实值下鞅, 由文献 3] § 5.4 定理 2 存在下鞅  $\{g(x_i^*), \mathcal{F}_t^+; t \in R_+\}$  满足:

- (a)  $\{g(x_i^*); t \in R_+\}$  的所有轨道右连续,  $\exists N(x_i^*), P(N(x_i^*)) = 0$  当  $\omega \in \Omega \setminus N(x_i^*)$  对一切  $t \in R_+$  有

$$g(x_i^*) = \lim_{s \in D, s \downarrow t} \alpha(x_i^*, F_s(\omega));$$

- (b) 对一切  $t \in R_+, \alpha(x_i^*, F_t) \leq E(g(x_i^*) / \mathcal{F}_t)$ ;

- (c)  $\{g(x_i^*), \mathcal{F}_t^+; t \in R_+\}$  为下鞅.

令  $N = \bigcup_{i=1}^{\infty} N(x_i^*)$  有  $P(N) = 0$  当  $\omega \in \Omega \setminus N$  时, 对一切  $t \in R_+$  有

$$g(x^*) = \lim_{s \in D, s \downarrow t} \alpha(x^*, F_s(\omega)), \forall x^* \in D^*$$

于是存在  $Y_t \in P_{wkc}(X)$  s.t.

$$\alpha(x^*, Y(\omega)) = \lim_{s \in D, s \downarrow t} \alpha(x^*, Y_s(\omega)), \forall x^* \in X^*$$

$$\alpha(x^*, Y_t(\omega)) = g_t(x^*), \forall x^* \in X^*$$

故易知  $\{Y_t; t \in R_+\}$  的所有轨道为弱右连续的.

对一切  $t \in R_+, \forall x^* \in D^*$ , 有

$$\alpha(x^*, F_t) \leq E(\alpha(x^*, F_t) / \mathcal{F}_t) = \alpha(x^*, \mathcal{E}(Y_t / \mathcal{F}_t))$$

于是有

$$\alpha(x^*, F_t) \leq \alpha(x^*, \mathcal{E}(Y_t / \mathcal{F}_t)), \forall x^* \in X^*$$

故有

$$F_t \subset \mathcal{E}(Y_t / \mathcal{F}_t)$$

由  $\{g_t(x_i^*), \mathcal{F}_t^+; t \in R_+\}$  为下鞅,  $\forall x^* \in D^*$ , 有  $\{\alpha(x^*, Y_t), \mathcal{F}_t^+; t \in R_+\}$  为下鞅, 故有

$$\alpha(x^*, Y_s) \leq E(\alpha(x^*, Y_t) / \mathcal{F}_s^+), \forall x^* \in D^*, \forall s, t \in R_+, s < t$$

所以

$$\alpha(x^*, Y_s) \leq E(\alpha(x^*, Y_t) / \mathcal{F}_s^+) = \alpha(x^*, \mathcal{E}(Y_t / \mathcal{F}_s^+)), \forall x^* \in X^*$$

从而有

$$Y_s \subset \mathcal{E}(Y_t / \mathcal{F}_s^+)$$

即  $\{Y_t, \mathcal{F}_t^+; t \in R_+\}$  为弱紧凸集值下鞅.

由于  $\{\mathcal{F}_t; t \in R_+\}$  满足通常条件, 在上述定理中事实上  $\mathcal{F}_t^+ = \mathcal{F}_t$ .

类似于上述定理的讨论, 易有下述 K.M. 右连续情形的形式.

**定理 3**  $X$  自反,  $X^*$  可分,  $\{F_t, \mathcal{F}_t; t \in R_+\}$  为弱紧凸集值下鞅,  $D$  为  $R_+$  中一可数稠子集, 且  $\forall t \in R_+, F_t \subset G, G: \Omega \rightarrow P_{wkc}(X)$ , 则存在弱紧凸集值下鞅  $\{Y_t, \mathcal{F}_t^+; t \in R_+\}$  满足:

(a)  $\{Y_t; t \in R_+\}$  的所有轨道为 K.M. 右连续的, 且对几乎所有的  $\omega$ , 对一切  $t \in R_+$ , 有

$$F_s(\omega) \xrightarrow[s \in D, s \downarrow t]{\text{K.M.}} Y_t(\omega)$$

(b) 对几乎所有的  $\omega$ , 对一切  $t \in R_+, \forall x^* \in X^*$ ,

$$\alpha(x^*, F_t) \leq \alpha(x^*, \mathcal{E}(Y_t / \mathcal{F}_t))$$

(c)  $\{Y_t, \mathcal{F}_t^+; t \in R_+\}$  为弱紧凸集值下鞅.

**定理 4**  $X$  自反,  $X^*$  可分,  $\{F_t, \mathcal{F}_t; t \in R_+\}$  为弱紧凸集值下鞅, 且存在  $G \in P_{wkc}(X)$  s.t.  $F_t \subset G$ , 任给  $t \in R_+$ , 则下述两条件等价:

(a)  $\{F_t, \mathcal{F}_t; t \in R_+\}$  存在 K.M. 右连续修正;

(b)  $\int_{\Omega} F_t dp; t \in R_+$  为 K.M. 右连续的.

**证明:** 由定理 3, 存在  $N, P(N) = 0$ , 当  $\omega \in \Omega \setminus N$  时,  $\{F_t, \mathcal{F}_t; t \in R_+\}$  的所有轨道沿  $D$  存在 K.M. 右极限. 令当  $\omega \in \Omega \setminus N$  时,  $\bar{F}_t(\omega) = Y_t(\omega)$ ; 当  $\omega \in N$  时,  $\bar{F}_t(\omega) = \Phi$ , 易见  $\bar{F}_t$  为  $\mathcal{F}_t^+ = \mathcal{F}_t$  可测的, 且  $\{\bar{F}_t, \mathcal{F}_t; t \in R_+\}$  为 K.M. 右连续的. 设  $s, t \in R_+, s < t$ , 在  $D$  中选取二序列  $\{s_n\}, \{t_n\}$ , 使  $s_n \downarrow s, t_n \downarrow t$ , 且  $s_1 < t$ , 则对  $A \in \mathcal{F}_s$ , 有

$$\int_{\Omega} 1_A F_{s_n} dp \subset \int_{\Omega} 1_A F_{t_n} dp$$

由于  $F_t \in P_{wkc}(X)$  及文献 [2] 性质 3.1 的推论有  $\int_{\Omega} 1_A F_t dp \in P_{wkc}(X)$ , 于是由文献 [4] 定理 3.4, 令  $n \rightarrow \infty$ , 有

$$\int_{\Omega} 1_A \bar{F}_s dp \subset \int_{\Omega} 1_A \bar{F}_t dp$$

又由文献 [5] 引理 4.4 可知:  $S^1 \mathcal{E}(\bar{F}_t / \mathcal{F}) \supset S_{F_s}^1$ , 故  $\{\bar{F}_t, \mathcal{F}_t; t \in R_+\}$  为弱紧凸集值下鞅.

对  $\forall B \in \mathcal{F}_t$ , 有

$$\int_{\Omega} 1_B F_t dp \subset \int_{\Omega} 1_B F_{t_n} dp$$

同理令  $n \rightarrow \infty$ , 有

$$\int_{\Omega} 1_B F_t dp \subset \int_{\Omega} 1_B \bar{F}_t dp$$

由于  $F_t$  及  $\bar{F}_t$  均为  $\mathcal{F}_t$  可测 故有

$$F_t \subset \bar{F}_t \text{ a.e.}$$

于是由文献 [4] 定理 3.4 可知

$$\int_{\Omega} F_{t_n} dp \xrightarrow{\text{K.M.}} \int_{\Omega} \bar{F}_t dp \text{ a.e.}$$

且

$$\int_{\Omega} F_{t_n} dp \subset \int_{\Omega} F_{t_{n+1}} dp$$

为使  $\{\bar{F}_t ; t \in R_+\}$  为  $\{F_t ; t \in R_+\}$  的修正 必须且只须 :

$$\int_{\Omega} F_t dp = \int_{\Omega} \bar{F}_t dp \text{ a.e.}$$

即

$$\int_{\Omega} F_{t_n} dp \xrightarrow{\text{K.M.}} \int_{\Omega} F_t dp \text{ a.e.}$$

也就是  $\{\int_{\Omega} F_t dp ; t \in R_+\}$  为 K.M. 右连续的.

参考文献 :

[ 1 ] 黄志远. 随机分析学基础[ M ]. 武汉 : 武汉大学出版社 ,1988. 53 ~ 58.  
[ 2 ] Papageorgiou N S. On the theory of Banach space valued multifunction : 1 : Integration and conditional expectation[ J ]. J Multiv Anal , 1985 , 17 :185 ~ 206.  
[ 3 ] 李漳南, 吴荣. 随机过程教程[ M ]. 北京 : 高等教育出版社 ,1987. 110 ~ 150.  
[ 4 ] Papageorgiou N S. Convergence theorems for Banach space valued integrable multifunction[ J ]. Intern J Math Sci , 1987 , 10 :433 ~ 442.  
[ 5 ] Hiai F , Umegaki H , Integrals. Conditional expectations and martingales of multivalued function[ J ]. J Multiv Anal , 1977 , 7 :149 ~ 182.

Continuity of Trajectory on Continuous Parameter Set-Valued Submartingale

ZHU Yong-zhong

( Dept. of Math. and Phys. , Hohai Univ. , Nanjing 210098 , China )

**Abstract :** In this paper , two equivalent conditions of continuous parameter set-valued submartingale are given :( a ) in  $\{F_t , \mathcal{F}_t ; t \in R_+\}$  there exists weak right ontinuous modifications ;( b )  $\{\int_{\Omega} F_t dp ; t \in R_+\}$  is weak right continuous. Then the Föllmer lemma of continuous parameter set-valued submartingale which ensures the existence of the weak right continuous and K. M. right continuous trajectory modifications is proved. In the end the sufficient and necessary condition is given for continuous parameter set-valued submartingale , so that K. M. right continuous trajectory modification exists when the Banach space is reflexive.

**Key words :** weak compact convex set ; closed convex set ; continuous parameter ; set-valued submartingale ; right continuous