

含有多个混合边界椭圆孔弹性板的应力场计算

王林江 林佳铿

(南京航空航天大学无人驾驶飞机研究所,江苏 南京 210016)

摘要 将多复变量应力函数和边界配点法相结合,计算含有任意多个椭圆孔无限大弹性板的应力场.每个孔的大小、位置为任意,孔边为应力边界、位移边界和多种混合边界.板的无限远处作用有和坐标轴方向一致的均匀拉压载荷和均匀剪切载荷.编制了相应的 FORTRAN90 程序,进行了考题和算例分析.结果表明,本方法行之有效,程序使用简单,便于应用.

关键词 弹性板;孔;应力计算;边界配点法

中图分类号 O343.4 **文献标识码** A **文章编号** 1000-198X(2000)06-0077-05

含孔板的应力计算是弹性力学中的重要内容之一^[1,2].文献[3]中用多保角变换导得了多连通板的多复变量应力函数表达式,并在孔边进行复 Fourier 级数展开,然后用待定系数法确定级数的未知系数,从而计算了含有任意多个应力边界椭圆孔无限大弹性板的应力场.但该方法不适用于孔边既有应力又有位移的混合边界的情况.本文结合边界配点法计算了含有多个多种边界椭圆孔弹性板的应力场.

1 分析方法

在弹性平面问题中,由两个复应力函数 $\Phi(z)$ 和 $\Psi(z)$ 表示的板内任一点的应力和位移为

$$\sigma_x + \sigma_y = 2\text{Re}[\Phi'(z) + \overline{\Phi'(z)}] \quad \sigma_y - \sigma_x + 2i\tau_{xy} = 2\text{Re}[z\Phi''(z) + \Psi'(z)] \quad (1)$$

$$v_x + iv_y = \frac{1}{2G}[\kappa\Phi(z) - z\overline{\Phi'(z)} - \overline{\Psi(z)}] \quad (2)$$

式(2)中如果 $\kappa = (3 - \nu)/(1 + \nu)$ 为平面应力, $\kappa = 3 - 4\nu$ 为平面应变.其中 ν 为材料的泊松比, G 为材料的剪切弹性模量.

应力分量 $\sigma_x, \sigma_y, \tau_{xy}$ 和位移分量 v_x, v_y 可单独表示为

$$\left. \begin{aligned} \sigma_x &= \text{Re}[2\Phi'(z) - \overline{z\Phi''(z)} - \Psi'(z)] & \sigma_y &= \text{Re}[2\Phi'(z) + \overline{z\Phi''(z)} + \Psi'(z)] \\ \tau_{xy} &= \text{Im}[\overline{z\Phi''(z)} + \Psi'(z)] \end{aligned} \right\} \quad (3)$$

$$v_x = \frac{1}{2G}\text{Re}[\kappa\Phi(z) - z\overline{\Phi'(z)} - \overline{\Psi(z)}] \quad v_y = \frac{1}{2G}\text{Im}[\kappa\Phi(z) - z\overline{\Phi'(z)} - \overline{\Psi(z)}] \quad (4)$$

在板的边界上,应力分量 $\sigma_x, \sigma_y, \tau_{xy}$ 和外力分量 P_x, P_y 有下列关系:

$$\sigma_x \sin\alpha - \tau_{xy} \cos\alpha = P_x \quad \tau_{xy} \sin\alpha - \sigma_y \cos\alpha = P_y \quad (5)$$

α 为边界点的切向角,切线方向以板位于左手侧的环绕方向为正.

图 1 所示为含有 K 个椭圆孔的无限板,每个孔的大小、位置和孔边作用的载荷均为任意,板的无限远处作用有均匀水平载荷 F_x 、垂直载荷 F_y 、剪切载荷 F_{xy} .孔边由下列四种边界条件以及它们的组合所组成(a)已知 P_x 和 P_y 的应力边界(b)已知 V_x 和 V_y 的位移边界(c)已知法向位移 V_N 和切向力 P_T 的混合边界(滑动边界为 $V_N = P_T = 0$)(d)已知法向力 P_N 和切向位移 V_T 的混合边界.孔的参数方程为

$$z = a_k \cos\theta + ib_k \sin\theta + z_{0k} \quad (6)$$

式中: z_{0k} —— k 孔的中心位置; a_k, b_k —— k 孔的两个半轴.

引进 K 个复变量 ζ_k ($k=1, 2, 3, \dots, K$) 则该问题的多复变量应力函数表达式^[3]

$$\Phi(z) = A_0 z + \sum_{k=1}^K [A_k \ln \zeta_k + \sum_{n=0}^{\infty} \varphi_{kn} \zeta_k^{-n}] \quad \Psi(z) = B_0 z + \sum_{k=1}^K [B_k \ln \zeta_k + \sum_{n=0}^{\infty} \psi_{kn} \zeta_k^{-n}] \quad (7)$$

其中

$$A_0 = \frac{1}{4}(F_x + F_y) \quad B_0 = \frac{1}{2}(F_x - F_y + 2iF_{xy})$$

$$A_k = -\frac{X_k + iY_k}{2\pi(1+\kappa)} \quad B_k = \frac{\kappa(X_k - iY_k)}{2\pi(1+\kappa)} \quad \zeta_k = \frac{z - z_{0k} + \sqrt{(z - z_{0k})^2 - a_k^2 + b_k^2}}{a_k + b_k} \quad (8)$$

X_k 和 Y_k 是 k 孔边界上 x 和 y 方向面力的主矢, φ_{kn} 和 ψ_{kn} 为未知系数.

下面用边界配点最小二乘法来确定它们.

对于已知 P_x 和 P_y 的应力边界, 把式(7)代入式(3)后再代入式(5)整理后得

$$\left. \begin{aligned} \sum_{k=1}^K \sum_{n=0}^{\infty} (A_{xkn}^{(1)} \varphi_{kn} + \overline{A_{xkn}^{(1)}} \overline{\varphi_{kn}} + B_{xkn}^{(1)} \psi_{kn} + \overline{B_{xkn}^{(1)}} \overline{\psi_{kn}}) &= P_x - P_x^* \\ \sum_{k=1}^K \sum_{n=0}^{\infty} (A_{ykn}^{(1)} \varphi_{kn} + \overline{A_{ykn}^{(1)}} \overline{\varphi_{kn}} + B_{ykn}^{(1)} \psi_{kn} + \overline{B_{ykn}^{(1)}} \overline{\psi_{kn}}) &= P_y - P_y^* \end{aligned} \right\} \quad (9)$$

其中

$$A_{xkn}^{(1)} = \frac{1}{2} [2\sin\alpha + (i\cos\alpha - \sin\alpha) \bar{z} E_{kn}] D_{kn}$$

$$A_{ykn}^{(1)} = -\frac{1}{2} [2\cos\alpha + (\cos\alpha + i\sin\alpha) \bar{z} E_{kn}] D_{kn}$$

$$B_{xkn}^{(1)} = \frac{1}{2} (i\cos\alpha - \sin\alpha) D_{kn}$$

$$B_{ykn}^{(1)} = -\frac{1}{2} (\cos\alpha + i\sin\alpha) D_{kn}$$

令 $T_k = \sqrt{(z - z_{0k})^2 - a_k^2 + b_k^2}$, 得

$$E_{kn} = \frac{-nT_k - (z - z_{0k})}{T_k^2} \quad D_{kn} = -n\zeta_k^{-n}/T_k$$

$$P_x^* = \operatorname{Re} [2A_0 \sin\alpha + (i\cos\alpha - \sin\alpha) B_0] +$$

$$\operatorname{Re} \sum_{k=1}^K \left\{ 2 \frac{A_k}{T_k} \sin\alpha + \left[-\bar{z} (z - z_{0k}) \frac{A_k}{T_k^3} + \frac{B_k}{T_k} \right] (i\cos\alpha - \sin\alpha) \right\}$$

$$P_y^* = \operatorname{Re} [-2A_0 \cos\alpha - (\cos\alpha + i\sin\alpha) B_0] +$$

$$\operatorname{Re} \sum_{k=1}^K \left\{ -2 \frac{A_k}{T_k} \cos\alpha + \left[\bar{z} (z - z_{0k}) \frac{A_k}{T_k^3} - \frac{B_k}{T_k} \right] (\cos\alpha + i\sin\alpha) \right\}$$

对于已知 V_x, V_y 的位移边界, 把式(7)代入式(4)整理后得

$$\left. \begin{aligned} \sum_{k=1}^K \sum_{n=0}^{\infty} (A_{xkn}^{(2)} \varphi_{kn} + \overline{A_{xkn}^{(2)}} \overline{\varphi_{kn}} + B_{xkn}^{(2)} \psi_{kn} + \overline{B_{xkn}^{(2)}} \overline{\psi_{kn}}) &= V_x - V_x^* \\ \sum_{k=1}^K \sum_{n=0}^{\infty} (A_{ykn}^{(2)} \varphi_{kn} + \overline{A_{ykn}^{(2)}} \overline{\varphi_{kn}} + B_{ykn}^{(2)} \psi_{kn} + \overline{B_{ykn}^{(2)}} \overline{\psi_{kn}}) &= V_y - V_y^* \end{aligned} \right\} \quad (10)$$

其中

$$A_{xkn}^{(2)} = \frac{\zeta_k^{-n}}{4G} \left(\kappa + \frac{n\bar{z}}{T_k} \right) \quad A_{ykn}^{(2)} = -\frac{i\zeta_k^{-n}}{4G} \left(\kappa - \frac{n\bar{z}}{T_k} \right) \quad B_{xkn}^{(2)} = -\frac{\zeta_k^{-n}}{4G} \quad B_{ykn}^{(2)} = -\frac{i\zeta_k^{-n}}{4G}$$

$$V_x^* = \frac{1}{2G} \operatorname{Re} [(\kappa - 1)A_0 z - \overline{B_0 z} + \sum_{k=1}^K (\kappa A_k \ln \zeta_k - z \frac{\overline{A_k}}{T_k} - \overline{B_k \ln \zeta_k})]$$

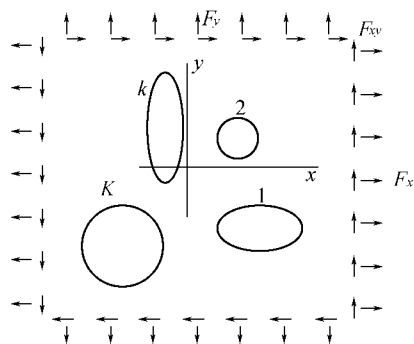


图1 含有多个椭圆孔的无限大弹性板

Fig.1 An infinite plate with multiple elliptical holes

$$V_y^* = \frac{1}{2G} \ln[(\kappa - 1)A_0z - \overline{B_0z} + \sum_{k=1}^K (\kappa A_k \ln \zeta_k - z \frac{\overline{A_k}}{\overline{T_k}} - \overline{B_k \ln \zeta_k})]$$

对于第三类边界条件,即已知法向位移 V_N 和切向力 P_T 边界,可得

$$P_x \cos \alpha + P_y \sin \alpha = P_T \quad V_x \sin \alpha - V_y \cos \alpha = V_N \tag{11}$$

把式(9)(10)代入式(11)得

$$\left. \begin{aligned} \sum_{k=1}^K \sum_{n=0}^{\infty} (A_{xkn}^{(3)} \varphi_{kn} + \overline{A_{xkn}^{(3)}} \overline{\varphi_{kn}} + B_{xkn}^{(3)} \psi_{kn} + \overline{B_{xkn}^{(3)}} \overline{\psi_{kn}}) &= P_T - P_x^* \cos \alpha - P_y^* \sin \alpha \\ \sum_{k=1}^K \sum_{n=0}^{\infty} (A_{ykn}^{(3)} \varphi_{kn} + \overline{A_{ykn}^{(3)}} \overline{\varphi_{kn}} + B_{ykn}^{(3)} \psi_{kn} + \overline{B_{ykn}^{(3)}} \overline{\psi_{kn}}) &= V_N - V_x^* \sin \alpha + V_y^* \cos \alpha \end{aligned} \right\} \tag{12}$$

其中

$$\begin{aligned} A_{xkn}^{(3)} &= A_{xkn}^{(1)} \cos \alpha + A_{ykn}^{(1)} \sin \alpha & B_{xkn}^{(3)} &= B_{xkn}^{(1)} \cos \alpha + B_{ykn}^{(1)} \sin \alpha \\ A_{ykn}^{(3)} &= A_{xkn}^{(2)} \sin \alpha - A_{ykn}^{(2)} \cos \alpha & B_{ykn}^{(3)} &= B_{xkn}^{(2)} \sin \alpha - B_{ykn}^{(2)} \cos \alpha \end{aligned}$$

对于第四类边界条件,可得

$$V_x \cos \alpha + V_y \sin \alpha = V_T \quad P_x \sin \alpha - P_y \cos \alpha = P_N \tag{13}$$

同理,把式(9)(10)代入式(13)得

$$\left. \begin{aligned} \sum_{k=1}^K \sum_{n=0}^{\infty} (A_{xkn}^{(4)} \varphi_{kn} + \overline{A_{xkn}^{(4)}} \overline{\varphi_{kn}} + B_{xkn}^{(4)} \psi_{kn} + \overline{B_{xkn}^{(4)}} \overline{\psi_{kn}}) &= V_T - V_x^* \cos \alpha - V_y^* \sin \alpha \\ \sum_{k=1}^K \sum_{n=0}^{\infty} (A_{ykn}^{(4)} \varphi_{kn} + \overline{A_{ykn}^{(4)}} \overline{\varphi_{kn}} + B_{ykn}^{(4)} \psi_{kn} + \overline{B_{ykn}^{(4)}} \overline{\psi_{kn}}) &= P_N - P_x^* \sin \alpha + P_y^* \cos \alpha \end{aligned} \right\} \tag{14}$$

其中

$$\begin{aligned} A_{xkn}^{(4)} &= A_{xkn}^{(2)} \cos \alpha + A_{ykn}^{(2)} \sin \alpha & B_{xkn}^{(4)} &= B_{xkn}^{(2)} \cos \alpha + B_{ykn}^{(2)} \sin \alpha \\ A_{ykn}^{(4)} &= A_{xkn}^{(1)} \sin \alpha - A_{ykn}^{(1)} \cos \alpha & B_{ykn}^{(4)} &= B_{xkn}^{(1)} \sin \alpha - B_{ykn}^{(1)} \cos \alpha \end{aligned}$$

在孔边上设置总数为 M 的点,在这些点上令 $\Phi(z)$ 和 $\Psi(z)$ 满足相应的边界条件.因此,对于每一点均可得到式(9)(10)(12)和式(14)中相应的一对无限复系数线性方程.实际计算时式(7)中的级数取有限项 $(N + 1)$ 则可得到一个由下列矩阵表示的复系数线性方程组:

$$AC = R \tag{15}$$

式中: A ——由 $A_{xkn}^{(j)}$, $A_{ykn}^{(j)}$, $B_{xkn}^{(j)}$ 和 $B_{ykn}^{(j)}$ ($j=1, 2, 3, 4$) 和它们的共轭所组成的 $2M \times 4K(N + 1)$ 阶矩阵; C ——由未知系数 φ_{kn} , ψ_{kn} 和它们的共轭组成的 $2M \times 1$ 阶列阵; R ——由式(9)(10)(12)和式(14)的右端项组成的 $2M \times 1$ 阶列阵.

在选择级数项数和边界配点数时须满足 A 为高矩阵,把 A 进行奇异值分解求得它的广义逆 A^+ ,则式(15)的最小二乘解为

$$C = A^+ R \tag{16}$$

确定了系数 φ_{kn} 和 ψ_{kn} 后,就可由式(3)(4)计算板内和边界上任一点的应力和位移.由式(9)(10)(12)和式(14)计算边界任意点的应力和位移,并可根据边界条件的满足情况来判定计算结果的正确性.

上述方法编制了相应的 FORTRAN90 程序,并在 PC 微机上进行了下列平面应力算例分析.使用时只需输入材料参数、孔数、孔的长短轴、配点间隔度数和孔的边界条件,就能计算板中任意指定点的应力.因此,该程序对工程设计人员来说,便于使用,并可进行参数变化分析.

2 算例分析

例 1 含有两个相同大小圆孔双向受拉的无限板(图 2)林致平^[4]用双极坐标的方法求得了封闭解.计算时取孔的半径 $r = 1\text{ m}$, $F_x = F_y = 1\text{ Pa}$, $L = 1.5\text{ m}$.表 1 给出了边界配点间隔 10° 时孔边 A, B 两点周向应力随级数项数的收敛状况.文献[3]的收敛状况也列在其中.可以看出 4 项以内两者相差较大,4 项以后两者相差不大.取 9 项时两者都和文献[4]的结果相同.表 2 列出了

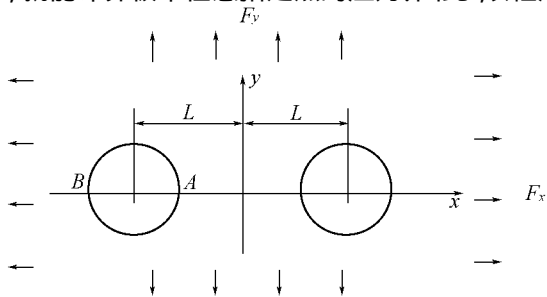


图 2 含有两个相同大小圆孔的双向受拉板
Fig.2 An infinite plate with two identical circular holes

$N=4$ 时 A, B 两点周向应力随边界配点数的变化情况. 由此看来, 在满足 $2M > 4K(N+1)$ 的条件下, 配点数对计算结果影响很小, 因此没有必要取过多的点.

表 1 A, B 两点周向应力随级数项数的收敛状况

Table 1 Correlation between stresses and the number of series terms

N		1	2	3	4	5	6	7	8	9
σ_{TA}/Pa	本文	2.250	2.285	2.624	2.786	2.852	2.876	2.885	2.887	2.887
	文[3]	2.637	2.495	2.636	2.763	2.835	2.868	2.881	2.886	2.887
σ_{TB}/Pa	本文	2.026	2.129	2.370	2.207	2.274	2.248	2.257	2.254	2.255
	文[3]	1.775	2.387	2.238	2.246	2.264	2.249	2.258	2.254	2.255

注: 文献[4]的精确解为: $\sigma_{TA} = 2.887 \text{ Pa}$; $\sigma_{TB} = 2.255 \text{ Pa}$

表 2 A, B 两点周向应力随边界配点数的变化

Table 2 Correlation between stresses and collocation

间隔/ $^\circ$	30	25	20	15	10	5	1	0.5
σ_{TA}	2.7853	2.7843	2.7860	2.7860	2.7860	2.7860	2.7861	2.7859
σ_{TB}	2.2079	2.2063	2.2065	2.2065	2.2065	2.2065	2.2064	2.2064

例 2 图 3(a) 为含 3 孔的无限钢板, 材料参数 $E = 200 \text{ GPa}$, $\nu = 0.3$. 孔的参数见表 3. 取 $N = 20$, 配点间隔为 5° , 计算所得孔边的应力和位移与边界条件的误差不大于 10^{-4} , 因此边界条件已得到了很好的满足. 图 3(b)~(d) 给出了 3 个孔的孔周应力分布, 从中可以看出应力分布是很复杂的.

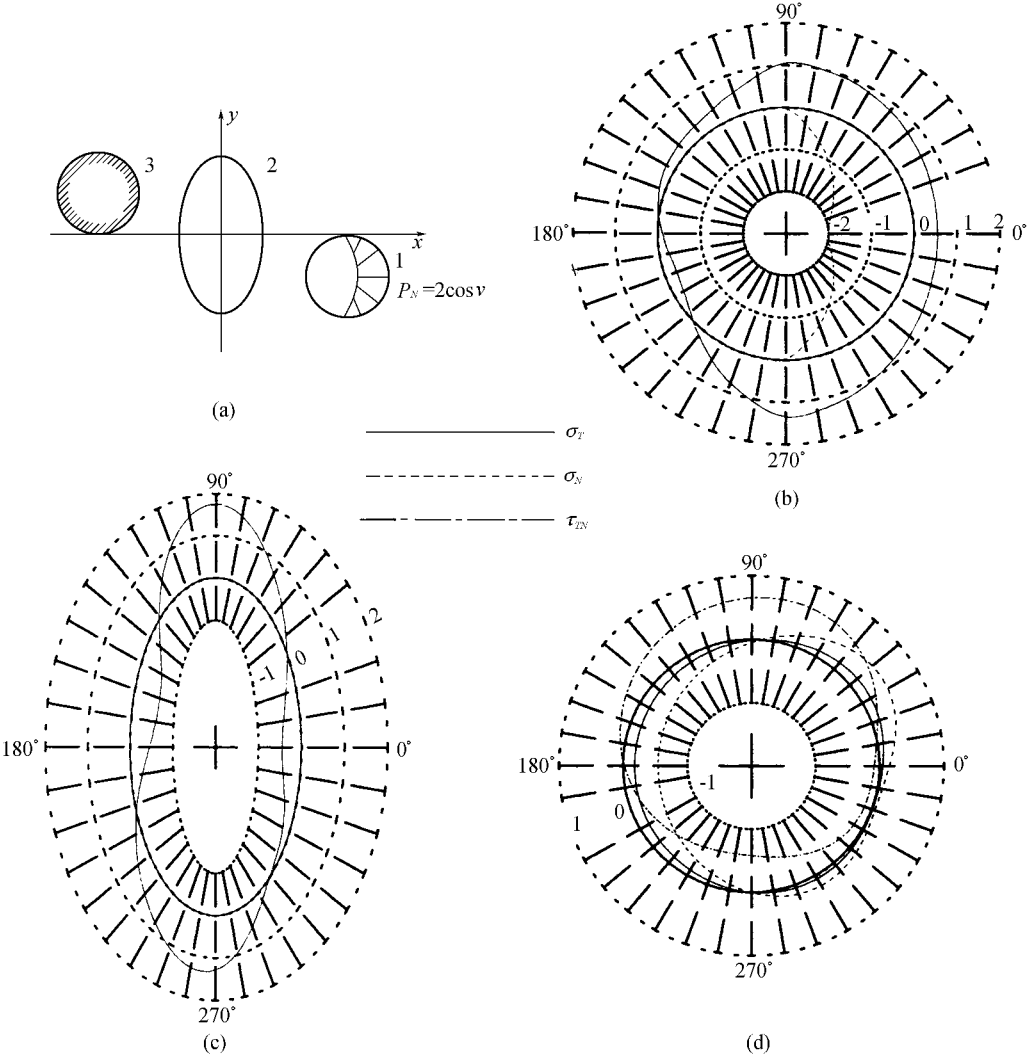


图 3 含 3 孔的无限板及孔周应力分布
Fig.3 An infinite plate with 3 holes

表 3 3 个孔的参数
Table 3 The parameters of 3 holes

孔号	a	b	x_0	y_0	边界条件
1	1	1	3	-1	左半边 $P_x = P_y = 0$,右半边 $P_T = 0 ,P_N = 2\cos\theta$
2	1	2	0	0	$P_x = P_y = 0$
3	1	1	-3	1	$V_x = V_y = 0$

3 结 论

用本文提出的计算复变函数法来计算含有任意多个椭圆孔无限大弹性板的应力场 ,具有省时、省力、方便、精确的特点 ,充分发挥了解析和数值法两者的优点 ,解决了两者单独难以解决的问题 .所编制的 FORTRAN90 程序使用方便 ,便于在工程中推广应用 .

参考文献 :

[1] 徐芝纶 . 弹性力学(第 2 版) [M] . 北京 :人民教育出版社 ,1982.33 ~ 98.
[2] 穆斯海里什维里 . 数学弹性力学的几个基本问题 [M] . 赵惠元译 ,北京 :科学出版社 ,1958.65 ~ 356.
[3] 王林江 ,林佳铿 .用多复变量应力函数计算多连通弹性平面问题 [J] .应用数学和力学 ,1994 ,15 (9) 657 ~ 664.
[4] Lin Chin-Bing . On the stresses in a plate containing two circular holes [J] . J of Applied physics , 1948 ,19 36 ~ 45.

Stress Calculation for an Infinite Elastic Plate Containing
Multiple Elliptical Holes with Mixed Boundaries

WANG Lin-jiang , LIN Jia-keng

(Nanjing University of Aviation and Astronautics , Unmanned Aircraft Institute , Nanjing 210016 , China)

Abstract :The stress functions of multiple complex variables are combined with the boundary collocation and least squares method to calculate the stress field of an elastic infinite plate with multiple elliptical holes whose sizes and locations are arbitrary. The boundaries of the holes can be stress , displacement , and many types of combined boundaries. The corresponding FORTRAN90 program is developed , and examples are given. The results show that this method is very effective and convenient. The program can be used easily by engineers.

Key words : infinite plate ; holes ; stress analysis ; computational complex method