

非线性随机波与直墙相互作用的数值计算及统计分析

冯卫兵, 洪广文

(河海大学港口航道及海岸工程学院, 江苏 南京 210098)

摘要 就如何应用非线性随机波及其与直墙相互作用的数学模型进行模拟计算作一叙述, 通过近 20 种组合的波面、波压强、合压力和合力矩等运动和动力过程的模拟计算, 并且对模拟过程进行了谱估计及统计分析, 形成相应的“波高”、周期、极值等序列. 结果表明: 应用本文模式进行计算得到的非线性随机波与直墙相互作用的波动过程具有天然海浪特性, 估计谱与理论谱参数一致, 同时计算速度快、精度高.

关键词 非线性随机波; 直墙; 数值模拟; 统计分析

中图分类号 :P731.22 **文献标识码** :A **文章编号** :1000-1980(2001)01-0006-06

1 非线性随机波与直墙相互作用的数学模型及模拟计算

建立如图 1 所示的坐标系, 设:

入射波 $\varphi_I^{(1)}(x, y, z, t) = \sum_{j=0}^N a_j A_j \cosh k_j(z+d) \sin \theta_j$

反射波 $\varphi_R^{(1)}(x, y, z, t) = \sum_{j=0}^N a_j A_j K_j \cosh k_j(z+d) \sin \tilde{\theta}'_j$

$\eta_I^{(1)}(x, y, z, t) = \sum_{j=0}^N a_j l_j \cos \theta_j$

$\eta_R^{(1)}(x, y, z, t) = \sum_{j=0}^N a_j K_j l_j \cos \tilde{\theta}'_j$

式中: a_j ——某一子波的波动振幅, $A_j = g \backslash \omega_j \cosh k_j d$); k_j ——某一子波的波数; θ_j ——某一子波的波向角; $\tilde{\theta}'_j$ ——某一反射子波的波向角; l_j ——传递函数; K_j ——某一子波的反射系数.

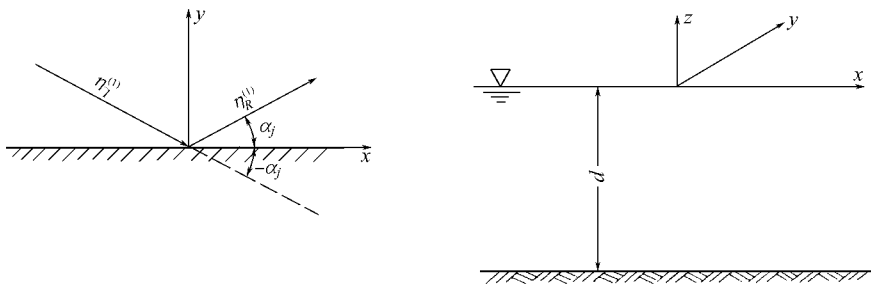


图 1 坐标系示意图

Fig.1 Definition of the coordinate system

由此可以得到非线性随机波与直墙相互作用的波动势函数和波面: $\varphi(x, y, z, t) = \varphi_I^{(1)} + \varphi_R^{(1)} + \varphi_H^{(2)} + \varphi_{RR}^{(2)} + \varphi_{IR}^{(2)} + \varphi_{RI}^{(2)}$, $\eta(x, y, z, t) = \eta_I^{(1)} + \eta_R^{(1)} + \eta_H^{(2)} + \eta_{RR}^{(2)} + \eta_{IR}^{(2)} + \eta_{RI}^{(2)}$. 文献 [1~5] 已详细给出了非线性随机波及其与直墙相互作用的二阶近似解, 本文只列出经概化后归结为统一的表达式:

$$Y - Y_c = \{Y_I^{(1)} + Y_R^{(1)}\} + \{Y_H^{(2)} + Y_{RR}^{(2)} + Y_{RI}^{(2)} + Y_{IR}^{(2)}\} =$$

$$\sum_{i=1}^N a_i Y_i \left\{ \begin{matrix} \cos \theta_j + K_j \cos \tilde{\theta}'_j \\ \sin \theta_j + K_j \sin \tilde{\theta}'_j \end{matrix} \right\} + \sum_{\pm} \sum_{ij=1}^N a_i a_j \left\{ Y_{ij}^{\pm} \left[\begin{matrix} \cos \theta_{ij}^{\pm} + K_i K_j \cos \tilde{\theta}'_{ij} \\ \sin \theta_{ij}^{\pm} + K_i K_j \sin \tilde{\theta}'_{ij} \end{matrix} \right] + \tilde{Y}_{ij}^{\pm} \left[\begin{matrix} K_i \cos \tilde{\theta}'_{ij} + K_j \cos \theta_{ij}^{\pm} \\ K_i \sin \tilde{\theta}'_{ij} + K_j \sin \theta_{ij}^{\pm} \end{matrix} \right] \right\}$$

式中 Y_i 以及 Y_{ij} 和 $\bar{Y}_{ij}$ 对不同的物理量(波面、波压强、合压力、合力矩)有不同的表达式, $\left\{ \begin{matrix} \sin \\ \cos \end{matrix} \right\}$ 则根据不同的物理量决定取 $\{\sin\}$ 或 $\{\cos\}$, 具体参见文献 [1~5]。 a_i, a_j 为子波 i, j 的波动振幅, K_i, K_j 为子波 i, j 的反射系数, $\theta_{ij}^{\pm} = \theta_i \pm \theta_j, \bar{\theta}_{ij}^{\pm} = \bar{\theta}_i \pm \bar{\theta}_j, \bar{\theta}_{ij}^{\pm} = \bar{\theta}_i \pm \theta_j, \theta_{ij}^{\pm} = \theta_i \pm \bar{\theta}_j$ 等均为和频与差频的波向角。据此进一步导出了非线性随机波及其与直墙相互作用的运动和动力要素的二阶非线性谱和线性谱之间的相互关系:

$$\tilde{S}_j^{(2)} = 4 \sum_{i=0}^j \tilde{S}_i^{(1)} \tilde{S}_{j-1}^{(1)} l_{i,j-i}^{+2} \Delta f + 8 \sum_{i=j}^N \tilde{S}_i^{(1)} \tilde{S}_{j-1}^{(1)} l_{i,j-i}^{-2} \Delta f \quad (0 \leq j \leq N)$$

$$\tilde{S}_j^{(2)} = 4 \sum_{i=0}^j \tilde{S}_i^{(1)} \tilde{S}_{j-1}^{(1)} l_{i,j-i}^{+2} \Delta f \quad (N+1 \leq j \leq 2N)$$

有了上述二阶近似解的统一表达式及二阶非线性谱和线性谱之间的相互关系式,通过进一步推导演化,最终得到适合快速富里叶变换(FFT)计算的标准式如下:

$$Y_m - Y_c = \sum_{j=1}^{4N-1} A_j W^{-jm}$$

式中: Y_m ——需要模拟计算的物理量(如波面、波动压强、波动合压力、波动合力矩等); Y_c ——常数项; A_j ——系数函数,随所要模拟计算的物理量不同而有不同的相应表达式,详见文献 [1~5]。这样,可以模拟计算非线性随机波与直墙相互作用的某个运动或动力过程,只需将相应的传递函数 Y_i, Y_{ij} 及 $\bar{Y}_{ij}$ 的具体表达式代入系数 A_j 的表达式即可。也可以在产生一组随机数(相位) ϵ_n 后,同时进行各种运动和动力过程的综合模拟计算,这就给研究非线性随机波与直墙相互作用特性提供了有利条件。

由上述公式可以看出,要计算任意一个非线性随机波与直墙相互作用的运动和动力过程,必须求解出 $2N^2$ 个二阶传递函数 Y_{ij} 和 $\bar{Y}_{ij}$ 。假如用 $N=1024$ 个子波,那么就必须先求解出约 2.1×10^6 个 Y_{ij} 和 $\bar{Y}_{ij}$, 可见计算工作量之大。多次试算表明,只要适当选取较小的基数 N_0 (一般取为 64),先求出 $2N_0^2$ 个传递函数 Y_{ij}' 和 $\bar{Y}_{ij}'$, 然后利用拉格朗日插值法求解出 $2N^2$ 个传递函数 Y_{ij} 和 $\bar{Y}_{ij}$, 其误差可控制在 1% 以内,并大大提高了计算速度。

本文利用风速 $W=30\text{ m/s}$ 、水深 $d=10\text{ m}$ 的浅水定常莆田经验谱分解结果作为原始线性谱,进行了不同入射角、不同反射系数和不同水下位置(Z)等一系列组合的模拟计算。同时模拟出波面、波压强、合压力和合力矩等四个运动和动力过程,然后分别进行统计分析、谱估计等,形成了“波高”、周期、极大值、极小值等一系列极值序列,以便进一步分析研究。

2 模拟谱和理论谱的一致性检验分析

按本文所建立的各运动和动力要素的理论谱形式,进行模拟过程的估计谱及理论谱比较,检验模拟谱与理论谱的一致性,提供判别随机模拟理论及方法有效性的重要指标。为此,本文进行频谱密度函数及其特征参数的统计分析。描述谱的参数有过程谱能量(方差) M_0 , 谱峰值 $S_{\max}$ 及峰频 f_p , 平均频率 $\bar{f}$ 及谱宽度 ϵ, q 。

ϵ 按 Gartwright 和 Longit-Higgins^[6] 于 1956 年讨论随机波极值分布时提出的公式计算:

$$\epsilon = [1 - M_2^2 / (M_0 M_4)]^{1/2}$$

q 按 Vanmerchs^[7] 1972 年提出的公式计算:

$$q = [1 - M_1^2 / (M_0 M_2)]^{1/2}$$

其中

$$M_n = \int_0^\infty f^n S(f) df$$

本文就不同的模拟点位置、不同的反射系数和不同的入射角 α 计算了 20 种组次。由于篇幅限制,在此仅列出其中的一组($K=1.0, \alpha=60^\circ, z=-0.2d$)理论谱与模拟谱对应比较的图 2、图 3 和表 1。由图 2、图 3 和表 1 可见理论谱与模拟谱曲线及其谱特征参数是相符的,绝大多数误差小于 5%。因此,可以认为应用本文的随机模型和计算模式,频率域模拟的理论谱与时域模拟过程的估计谱是相一致的,方法是正确的。

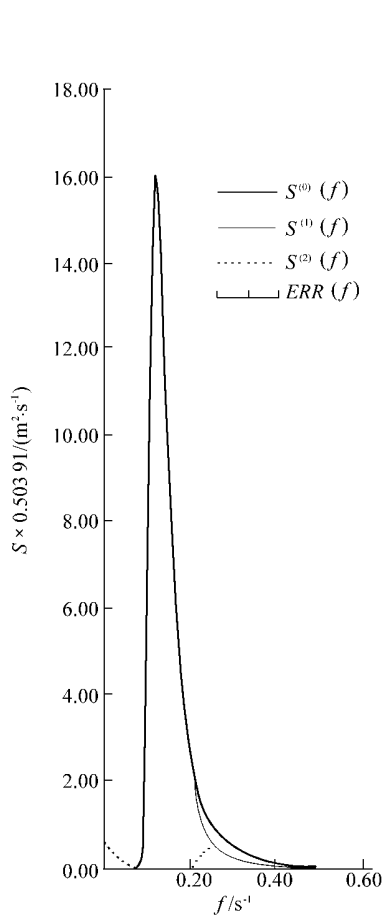


图 2 一阶、二阶入射谱
Fig.2 First and second order spectra of incident waves

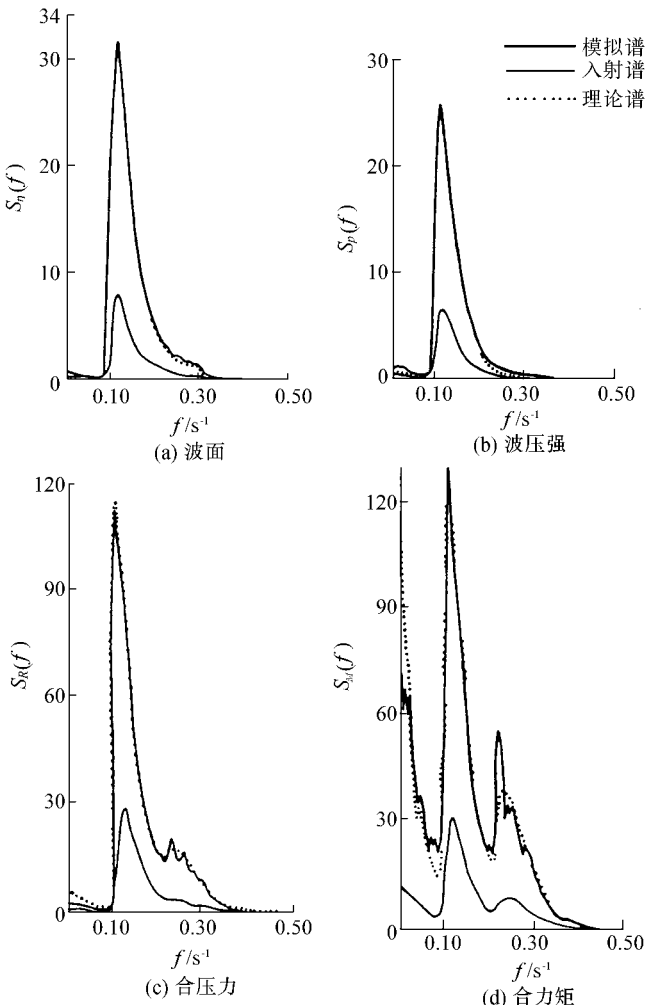


图 3 模拟的非线性随机波浪谱 ($K=1.0, \alpha=60^\circ, Z=-0.2d$)
Fig.3 Simulated spectra ($K=1.0, \alpha=60^\circ, Z=-0.2d$)

表 1 谱参数理论值与模拟值比较 计算参数 $K=1.0, \alpha=60^\circ, Z=-0.2d$
Table 1 Comparison of theoretical and estimated spectra

项目	波动要素	波面 η		波压强 p		合压力 R		合力矩 M	
		理论	模拟	理论	模拟	理论	模拟	理论	模拟
m_0	线性	1.995	1.995	1.437	1.437	6.742	6.742	7.117	7.117
	非线性	2.094	2.103	1.506	1.495	8.249	8.121	17.085	14.294
$S_{\max}$	线性	32.219	31.229	26.018	25.653	115.320	111.790	119.550	115.890
	非线性	32.224	31.509	26.087	25.665	115.350	112.610	129.940	130.190
f_{q1}	线性	0.121	0.121	0.117	0.117	0.121	0.121	0.121	0.121
	非线性	0.121	0.121	0.117	0.117	0.121	0.121	0.117	0.113
$S'_{\max}$	线性								
	非线性		2.071			18.081	20.817	41.36	55.97
f_{q2}	线性								
	非线性		0.260			0.238	0.230	0.242	0.242
ϵ	线性	0.520	0.517	0.471	0.469	0.497	0.495	0.505	0.502
	非线性	0.593	0.593	0.541	0.535	0.652	0.644	0.761	0.726
q	线性	0.258	0.257	0.228	0.227	0.243	0.242	0.248	0.247
	非线性	0.303	0.307	0.282	0.280	0.366	0.355	0.571	0.525
$\bar{f}$	线性	0.146	0.146	0.139	0.139	0.142	0.142	0.143	0.144
	非线性	0.149	0.149	0.136	0.136	0.160	0.161	0.128	0.141
$\Delta = \frac{m_0^{(2)}}{m_0} \%$		4.7	5.1	4.6	3.9	18.3	16.9	58.3	50.3

3 模拟过程的统计与讨论

3.1 模拟过程的内容

数值模拟的非线性随机波应有天然不规则波的统计特性.因此,模拟过程的各统计特征值也是检验模拟方法正确与否的另一条件.本文对所模拟的波面、波压强、合压力、合力矩等四个波动要素同时进行了以下的统计分析:(a)对各模拟过程作了相应无因次量 $(Y-\bar{Y})/\sigma_y$ 的概率统计,并计算偏态系数 C_s 、峰态系数 C_e 及均值 $\bar{Y}$ 等统计特征值, C_s 和 C_e 的标准差,并进行 χ^2 检验;(b)对各过程进行统计,形成极大、极小、正极大、正极小、负极大、负极小,以及波高、周期等一系列极值序列;(c)对所进行统计形成的“波高”、周期和极值序列进一步作相对无因次量的统计分析.

众所周知,线性随机波波面服从正态分布,这是因为一般将深水波动的运动和动力过程近似看作为正态过程,认为深水波中非线性水平较小,而波浪传入浅水区后非线性水平增强. χ^2 检验表明:多数波动的运动和动力过程作为正态分布假设被拒绝.这一事实吸引了不少学者的关注,目前已提出了各种非正态分布的概率模型,如 Gram-Charlier 级数、洪广文^[6]的推广正态分布等.

3.2 模拟过程的统计分析和讨论

根据上述统计理论,本文对所模拟的各运动和动力过程进行统计,并将其中两组统计特征值列于表 2,表中包括波动过程平均值 $\bar{Y}$ 、偏态系数 C_s 、峰态系数 C_e ,以及正态分布、推广正态分布($i=1$)和 Gram-Charlier 级数对应的 χ^2 检验的统计分歧度 $\chi^2_{GU}, \chi^2_{GW}, \chi^2_{GC}$ 等.表 2 中(a)组的计算参数为 $K=1.0, \alpha=60^\circ, Z=-0.2d$;(b)组的计算参数为 $K=1.0, \alpha=90^\circ, Z=-d$.统计结果表明:

a. 波面过程的模拟时均值 $|\bar{Y}| \leq 1 \times 10^{-5}$,与理论值为零相符.线性波面的偏态系数 $|C_s|$ 大部分很小,而非线性 $|C_s|$ 则较对应线性波面的值为大,且非线性波面的 C_s 均大于零,说明过程为左偏.从 χ^2 检验的情况看,线性波的波面、波压强、合压力以及合力矩的 χ^2 值($\chi^2=13.66 \sim 24.25$)均小于相应 $\chi^2_{0.1}$ 值($\chi^2_{0.1}=30 \sim 40$),即线性部分都接受正态分布;而非线性的各运动和动力过程的 χ^2 值几乎都大于相应的 $\chi^2_{0.1}$ 值($\chi^2_{0.1}=40.2 \sim 51.8$),就是说正态分布假设大部分被拒绝.该结论与天然海浪是相符的.

b. 波压强过程的情况基本上与波面过程相同,区别是:其一,时均值 $|\bar{Y}|$ 不为零,这是因为波压强的 Y 表达式有常数 Y_c ,如果将 $\bar{Y}$ 除去 Y_c 部分,其数值也接近于零;其二,非线性的波面过程概率分布为左偏,而波压力为右偏.

表 2 模拟过程的统计特征值
Table 2 Characteristic value of simulated wave motion processes

波动要素		$\bar{Y}$		C_s		C_e		χ^2_{GU}		χ^2_{GW}		χ^2_{GC}	
		线性	非线性	线性	非线性	线性	非线性	线性	非线性	线性	非线性	线性	非线性
波面	(a)	0.141×10^{-6}	0.142×10^{-5}	0.024	0.223	-0.160	-0.067	20.27	86.39	12.17	34.41	11.94	14.93
	(b)	0.141×10^{-6}	-0.141×10^{-5}	0.024	0.269	-0.160	-0.036	20.27	115.60	12.17	43.35	11.92	15.53
波压强	(a)	-0.171×10^{-4}	0.128×10^{-1}	0.016	-0.425	-0.162	0.039	15.48	240.95	10.85	664.30	8.33	30.88
	(b)	-0.171×10^{-4}	0.128×10^{-1}	0.005	-0.746	-0.161	0.518	24.25	874.60	23.94	1306.50	18.24	54.61
波动合压力	(a)	0.343×10^{-4}	0.257×10^{-1}	0.020	1.177	-0.163	1.867	16.50	2066.00	10.72	6422.00	9.09	962.00
	(b)	0.171×10^{-3}	1.283×10^{-1}	0.018	-0.160	-0.165	-0.140	14.32	39.66	12.10	13.57	7.85	9.04
波动合力矩	(a)	0.343×10^{-4}	0.129×10^{-1}	-0.021	2.091	-0.163	5.766	16.25	6087.00	12.07	8736.00	10.71	2813.00
	(b)	0.116×10^{-2}	6.418×10^{-1}	0.015	0.499	-0.162	0.182	13.66	367.60	10.60	168.40	7.39	14.39

c. 波动合压力、合力矩两过程的统计特性的线性部分与上述情况类同,而非线性过程的 C_s 和 C_e 大多数都很大,最大者达到 $C_s=2 \sim 3, C_e=6 \sim 7$,完全偏离正态分布.这与模拟点的水下深度 Z 有关,模拟点位置越接近水面,非线性水平越强,偏离正态的程度越大.这一点与实际情况也是相符的.

以上分析说明,对于所模拟的非线性过程, Gram-Charlier 分布多出现负密度,其相应的 χ^2_{GC} 值大大估低了.对合压力、合力矩等较强的非线性过程,推广正态分布 $i=1$ 也多被拒绝,宜采用 $i \geq 2$ 的分布.

毋建国的^[7]就正态、推广正态($i=1, 2$)和 Gram-Charlier 级数三种理论分布利用连云港水域 12 个样本和莆田站 8 个实际样本波动水面进行经验分布的统计检验,发现多数 Gram-Charlier 级数在较大正负波面坐标值

出现负概率密度,而推广正态分布则避免了这种不合理现象.杨正已等^[6]对石臼港大量风浪观测资料分析也得出同样的结论.这说明:线性波面的剖面基本对称,非线性波面则是不对称的.波峰高而陡,波谷平缓;波群上有减水现象,两波群间有增水现象.这与文献^[7]在模拟非线性随机波时得到的结论是一致的,也是与天然风浪相符的.

3.3 极值序列的统计分析和讨论

以上叙述了模拟过程的统计特性,下面叙述各波动过程的“波高”、“周期”及其它极值的统计情况.

a. 相对“波高”分布在(0,3.0)区域内,大约在相对“波高”1.0出现最大值,这与瑞利分布的0.8出现最大值有偏离.波动相对周期分布集中在(0,2.0),大约在1.05~1.1处出现最大值,分布基本对称.波面、波压强、合压力三个过程的“波高”、“周期”的线性与非线性分布情况差别不大,但当模拟点位置 Z 在水下深度较小时,合力矩的非线性水平较强,非线性与线性比较差别较大.相对“波高”分布区域扩大为(0,3.5)且大约在0.5处出现最大值,这就是说非线性的合力矩过程在波群处的能量、峰值都很大,较大的“波高”值可以达到 $3.5\bar{H}$,并且改变了波高的整个分布规律.“周期”情况也类同.

b. 波动过程的极大值的分布范围,线性与非线性的区别却不很明显,一般在(0,3.0)区域较为集中,但两者出现峰值的位置有差别.线性过程在1.05倍均值处达到峰值,非线性则在1.25倍均值处达到峰值,而且曲线分布为:达到峰值前线性的在非线性的上方,达到峰值后则相反;负极大值的分布范围在(-3.0,0)区域较为集中,线性与非线性峰值出现位置及曲线分布情况与正极大值的正好相反.这说明非线性过程的波峰变得高而陡而波谷变坦,与前面过程统计分析得到的结论相一致,当然以上所述情况随非线性水平的强弱而变化,当模拟点位于 $Z=-d$ 时(非线性水平较低),其线性的与非线性的则趋于一致.

c. 各线性运动和动力过程的极大值分布也比较一致,一般集中分布在(-1.0~3.0)区域之间,在 $x/\bar{x}=1.0$ 处达到频率峰值,极小值的分布区域为(-3.0~1.0).线性过程极大值的分布范围比非线性的要小,而极小值则相反,这一点与上述b点相一致,说明模拟结果具有天然海浪的性质,即波峰陡、波谷坦、波面不对称.

由于模拟组次、各个过程的极值序列和统计分析得到的分布曲线很多,在此仅列出其中一组($K=1.0, \alpha=90^\circ, Z=-0.5d$)波面过程的极值分布曲线(见图4).

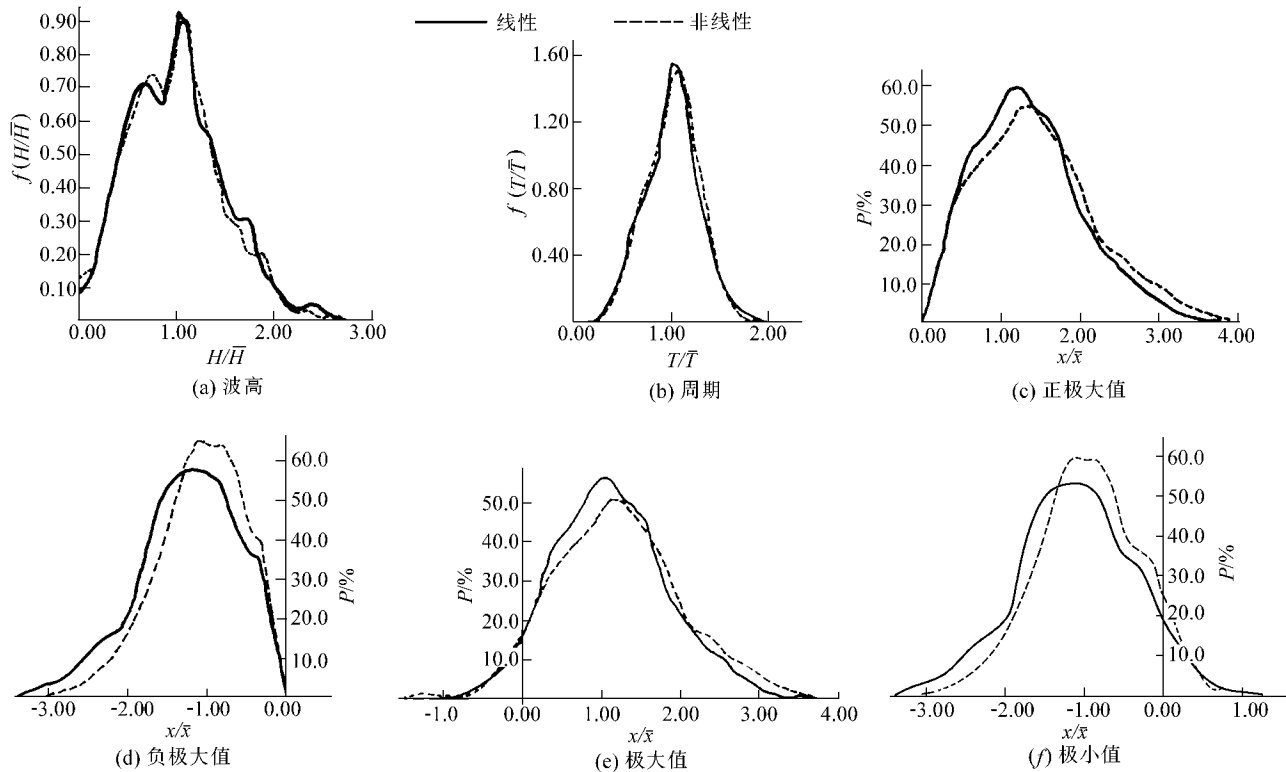


图 4 各个序列的分布曲线

Fig.4 Distribution curves of some limiting values of wave motion process

4 结 论

a. 应用本文给出的统一表达式, 可以模拟任意的非线性随机波与直墙相互作用的运动和动力要素过程, 计算速度快, 精度高.

b. 经过多种组合模拟谱与理论谱的特征参数比较, 结果表明应用本文的随机模型和计算模式进行频域模拟的理论谱与时域模拟过程的估计谱是一致的, 方法是正确的.

c. 通过进行模拟过程的时均值、峰态系数 C_e 、偏态系数 C_s 及 χ^2 检验等多种统计分析, 结果表明本文模拟的各个非线性运动和动力过程具有波面均值为零、峰陡谷坦等特性, 与天然海浪相符.

参考文献:

- [1] HONG Guang-wen. Nonlinear interaction of waves and vertical wall [A]. In: Springer-Verlag Berlin Heidelberg, eds. IUTAM Symposium ToKyo [C]. ToKyo Japan: Port and Harbor Research Institute Ministry of Transport, 1987. 415 ~ 422.
- [2] HONG Guang-wen, FENG Wei-bing. Random simulations for nonlinear interaction of irregular waves and vertical wall [A]. In: YAN Kai, LIANG Rui-ju, eds. Proceedings of the third Chinese-German Symposium on Hydrology and Coastal Engineering [C]. Nanjing: Hohai University Press, 1991. 91 ~ 110.
- [3] HONG Guang-wen, FENG Wei-bing. Theoretical model and random simulation for nonlinear interaction of irregular waves with vertical wall [J]. China Ocean Eng, 1993, 7(3): 263 ~ 288.
- [4] HONG Guang-wen, FENG Wei-bing. Random modelling for nonlinear Interaction of irregular waves and vertical wall [A]. In: Port and Harbour Research Institute Ministry of Transport. Proceedings of International Conference on Hydro-Technical Engineering for Port and Harbor Construction [C]. Yokosuka, Japan: Port and Harbour Research Institute Ministry of Transport, 1994. 423 ~ 441.
- [5] 冯卫兵. 非线性随机波与直墙相互作用的数值模拟 [D]. 南京: 河海大学, 1989.
- [6] 杨正已. 石臼港风浪谱分析 [R]. 南京水利科学研究院, 1984.
- [7] 洪广文, 朱良生. 非线性随机波的数值模拟 [J]. 海洋工程, 1990, 8(2): 57 ~ 70.
- [8] 洪广文. 非线性不规则波概率模型——推广正态分布 [J]. 海洋工程, 1983, 1(2): 18 ~ 37.
- [9] 毋建国. 随机波浪统计方法和统计性质若干问题的研究 [D]. 南京: 华东水利学院, 1981.

Numerical Calculation for Interaction between Nonlinear Random Waves and Vertical Walls and Statistical Analysis

FENG Wei-bing, HONG Guang-wen

(College of Harbor, Waterway and Coastal Engineering, Hohai Univ., Nanjing 210098, China)

Abstract: The second theoretical solutions for the interaction between nonlinear random waves and vertical walls have been discussed in references [1 ~ 5]. In this paper an algorithm is proposed for simulating the processes of the interaction between nonlinear waves and vertical walls. Simulations of wave surface, wave pressure, total wave forces and its moment are performed. The probability properties and statistical characteristics of simulations of the above processes are tested, which include the comparison of the theoretical spectra with simulated ones; the probability properties of apparent characteristics, such as amplitudes, periods, and extremes (maximum and minimum, positive and negative extremes). Statistical analysis and comparisons demonstrate that the algorithm is realistic and effective, the estimated spectra are in good agreement with the theoretical ones, and the probability properties of the simulated waves are similar to those of sea waves. At the same time, the simulating computation can be completed rapidly and easily.

Key words: nonlinear random waves; vertical wall; numerical simulation; statistical analysis