

框架侧移的连续化模型分析

朱杰江¹, 徐道远¹, 王 颖²

(1. 河海大学土木工程学院, 江苏 南京 210098; 2. 上海大学建筑工程学院, 上海 200072)

摘要 提出了用简单连续化模型分析框架侧移的近似方法. 根据应变能相等的原则, 得出了与原框架等效的连续化模型及其侧移的解析解. 实例分析表明, 用此种方法分析框架侧移具有较高的精确度. 同时, 连续化方法能使计算分析得以大大简化. 因此, 它对分析大型框架, 尤其在初步设计阶段具有很高的实用价值.

关键词 框架 侧移 连续化模型 变分原理
中图分类号 :TU45 **文献标识码** :A **文章编号** :1000-1980(2001)01-0012-05

随着计算机的不断发展, 结构矩阵位移法得到了广泛的应用. 目前分析框架结构最常用的方法是采用离散结构有限元方法(矩阵位移法). 但是, 随着对现代结构分析的要求越来越高, 结构也越来越大和越来越复杂, 如果采用传统的离散结构有限元方法必将极大地增加计算机的处理时间以及对计算机的存储要求. 因此, 对某些问题, 使用离散有限元方法变得不符合实际. 在研究结构的特征参数和方案设计比较阶段, 采用某些简化方法则更为合适.

根据应变能相等的原则建立的框架结构等效连续化模型能较好地反映原始框架结构的重要特性^[1], 因此, 它可以作为框架结构分析的有效近似分析方法.

1 连续化模型

框架结构是由梁、柱所组成. 通常这种结构是沿房屋高度不断地重复一个楼层的梁、柱布置叠加而成, 每个楼层称之为重复单元, 见图 1. 用一个等效连续化模型代替这些楼层重复单元, 能大幅度地减少框架分析的计算工作量.

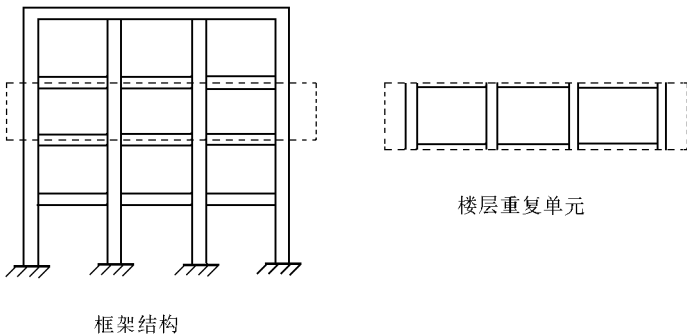


图 1 框架结构的楼层重复单元

Fig.1 Story repeating elements of frame structures

图 2 示出了多层框架及对应的等价连续体.
首先引入铁木辛柯梁假定:(a)平截面假定,即框架结构的横截面在变形后仍保持为平面.(b)在横截面上没有任何的伸长和缩短,它们如同刚性平面一样.

为了描述框架结构应变能,必须定义楼层重复单元的应力合力.在图 3 中, N_{ci} 和 M_{ci} 代表柱轴向力和弯

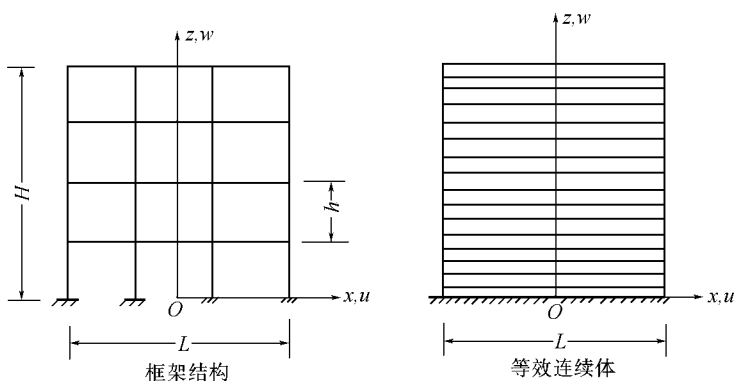


图 2 框架结构转化为等效连续体

Fig.2 Frame structures transformed into equivalent continuous models

矩. V 是总的横向剪力, 每一个楼层重复单元的近似应变能表述如下:

$$U_N = \int_0^h \left\{ \sum_{i=1}^{NC} \left[\frac{1}{2} N_{ci} \epsilon(z, x_i) + \frac{1}{2} M_{ci} k(z) \right] + \frac{1}{2} V \phi(z) \right\} dz \quad (1)$$

式中: $\epsilon(z, x_i)$ ——纵向应变; $k(z)$ ——中心轴的曲率(中心轴指框架各柱组合截面的形心); $\phi(z)$ ——中心轴 z 由于剪切变形引起的斜率; NC ——每一楼层重复单元中的柱子总数.

假定材料为线弹性, 本构关系可以表述如下:

$$N_{ci}(z) = EA_{ci} \epsilon(z, x_i) \quad V = GA_S \phi(z) \quad M_{ci} = EI_{ci} \left(\frac{d^2 u}{dz^2} \right) \quad (2)$$

式中: A_{ci} ——柱横截面面积; A_S ——楼层重复单元等效剪切面积; I_{ci} ——柱子 i 的惯性矩.

根据铁木辛柯梁平面假定, 纵向应变可以表述为

$$\epsilon(z, x_i) = \epsilon(z) - X \left[k(z) + \frac{d\phi(z)}{dz} \right] \quad (3)$$

其中 $k(z) = \frac{d^2 u}{dz^2}$

式中: $\epsilon(z)$ ——中心轴 z 的纵向应变.

由于框架侧移主要由水平荷载引起, 因此, 中心轴 z 的纵向应变可以忽略不计, 这样, 式(3)可以表述为

$$\epsilon(z, x_i) = -X \left[k(z) + \frac{d\phi(z)}{dz} \right] \quad (4)$$

将式(2), (3)代入式(1)中可得

$$U_N = \int_0^h \left\{ \sum_{i=1}^{NC} \left[\frac{1}{2} EA_{ci} x_i^2 \left(\frac{d\theta}{dz} \right)^2 + \frac{1}{2} EI_{ci} \left(\frac{d^2 u}{dz^2} \right)^2 \right] + \frac{1}{2} GA_S \left(\frac{du}{dz} \right)^2 + GA_S \left(\frac{du}{dz} \right) \theta + \frac{1}{2} GA_S \theta^2 \right\} dz \quad (5)$$

式中: θ ——横截面转角, $\theta = \frac{du}{dz} + \theta(z)$.

在框架结构应变能公式中, 需要用到等效剪切面积 A_S , 这可以通过分析一个纯剪切状态的楼层重复单元而得到.

2 等效剪切面积 A_S

为了求得等效剪切面积 A_S , 必须假定楼层重复单元合适的边界条件, 以便在杆件中没有轴向力产生. 对梁单元来说, 某楼层同时又是另一楼层单元的一部分, 因此, 可以采用梁截面特征值的一半来计算. 在计算 A_S 时, 本文假定梁的反弯点在跨中, 且中柱的剪力是边柱的一半. 关于这个假定的精确度在文献[2]中作了详细讨论. 图 4, 5 示出了楼层重复单元及 1/2 对称楼层重复单元边界条件.

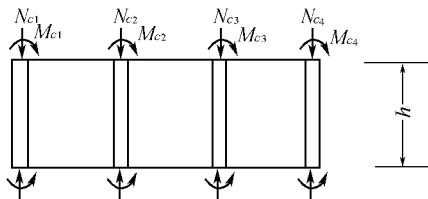


图 3 楼层重复单元的应力合力

Fig.3 Resultant force of a story repeating element

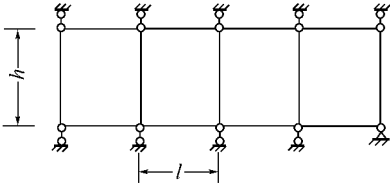


图 4 楼层重复单元

Fig.4 A story repeating element

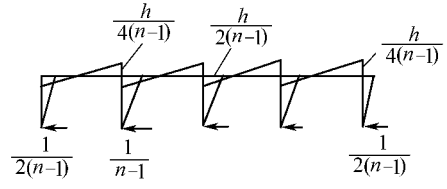


图 5 1/2 对称楼层重复单元

Fig.5 A 1/2 symmetrical story repeating element

根据结构力学图乘法,可得楼层水平侧移为

$$\Delta = \frac{(2n-3)h^3}{48EI_c(n-1)^2} + \frac{h^2l}{48EI_b(n-1)}$$

那么

$$\phi = \frac{\Delta}{h/2} = \frac{(2n-3)h^2}{24EI_c(n-1)^2} + \frac{hl}{24EI_b(n-1)}$$

$$GA_S = \frac{24EI_c(n-1)^2/h^2}{2n-3 + \frac{2I_c(n-1)}{I_b} \frac{1}{h}} \quad (6)$$

式中: n ——楼层重复单元中的柱根数.

如果各柱和梁的惯性矩不一致,可取柱、梁的平均惯性矩,即

$$I_c = \frac{\sum_{i=1}^n I_{ci}}{n} \quad I_b = \frac{\sum_{i=1}^{n-1} I_{bi}}{n-1}$$

如果跨距不一致,也可取平均的跨距,即 $l = \frac{\sum_{i=1}^{n-1} l_i}{n-1}$.

3 确定框架侧移

根据前面得出的等效连续体应变能和框架外荷载所作的功,可以求出结构势能,再利用变分原理和边界条件求出框架侧移函数等效连续体的势能为

$$\Pi = \int_0^H \left\{ \frac{1}{2} EI_c \left(\frac{d\theta}{dz} \right)^2 + \frac{1}{2} EI_d \left(\frac{d^2 u}{dz^2} \right)^2 + \frac{1}{2} GA_S \left(\frac{du}{dz} \right)^2 + GA_S \left(\frac{du}{dz} \right) \theta + \frac{1}{2} GA_S \theta^2 - \left(q_0 + q_1 \frac{z}{h} \right) u \right\} dz - P_u \Big|_{z=H} \quad (7)$$

其中

$$EI_d = \sum_{i=1}^{NC} EI_{ci} \quad EI_e = \sum_{i=1}^{NC} EA_{ci} \gamma_1^2$$

由变分原理可得位移场方程为

$$EI_d \frac{d^4 u}{dz^4} - GA_S \frac{d^2 u}{dz^2} - GA_S \frac{d\theta}{dz} - \left(q_0 + q_1 \frac{z}{h} \right) = 0 \quad (8)$$

$$- EI_e \frac{d^2 \theta}{dz^2} + GA_S \theta + GA_S \frac{du}{dz} = 0 \quad (9)$$

解此微分方程可得

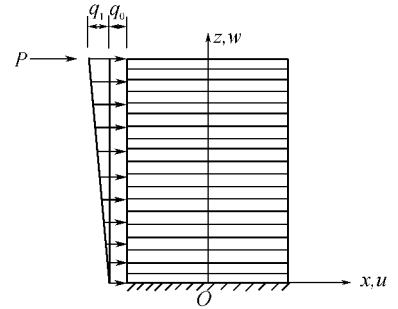
$$\theta = \frac{C_1}{r^3} e^{rz} - \frac{C_2}{r^3} e^{-rz} + \frac{C_3}{2} z^2 + C_4 z + C_5 - \frac{q_1}{24EI_e H} z^4 - \frac{q_0}{6EI_e} z^3 \quad (10)$$

$$u = \frac{EI_e}{GA_S} \left(\frac{C_1}{r^2} e^{rz} e^{-rz} + C_3 z - \frac{q_1}{6EI_e H} z^3 - \frac{q_0}{2EI_e} z^2 \right) - \left(\frac{C_1}{r^4} e^{rz} + \frac{C_2}{r^4} e^{-rz} + \frac{C_3}{6} z^3 + \frac{C_4}{2} z^2 + C_5 z - \frac{q_1}{120EI_e H} z^5 - \frac{q_0}{24EI_e} z^4 \right) + C_6 \quad (11)$$

为了求得常数项,下面列出边界条件:

图 6 水平荷载作用下的等效连续体

Fig.6 Equivalent continuous models under horizontal loading



$$z = 0 \text{ 处} \qquad \qquad \qquad u = 0 \qquad \qquad \frac{du}{dz} = 0 \qquad \qquad \theta = 0$$
$$z = H \text{ 处} \qquad \qquad \qquad I_e \frac{d^2 \theta}{dz^2} - I_d \frac{d^3 u}{dz^3} = \frac{P}{E} \qquad \qquad \frac{d^2 u}{dz^2} = 0 \qquad \qquad \frac{d\theta}{dz} = 0$$

根据六个边界条件可以解得六个常数项 $C_1 \sim C_6$,并代入侧移公式(11),经简化并略去高阶量后可得侧移公式为

$$u = \frac{H^4}{(Hr)^3 EI_d} [(q_0 + 0.5q_1 + P/H)(e^{-Hr\xi} - 1 + Hr\xi) - \frac{Hr\xi^2}{6}(q_1\xi + 3q_0)] +$$
$$\frac{H^4}{6EI_e} [-\xi(q_0 + 0.5q_1 + P/H)(\xi^2 + \frac{6}{(Hr)^2}) + \frac{\xi^2}{2}(3q_0 + 2q_1 + \frac{6P}{H}) + \frac{q_1}{20}\xi^5 + \frac{q_0}{4}\xi^4]$$

式中 $\xi = \frac{z}{H}$. 第一项表示由梁、柱弯曲变形引起的侧移,第二项表示由柱轴向变形引起的侧移.

4 框架分析比较

为了评估连续化模型计算框架侧移的精确度,本文分析了一个二榀框架(图 7)在均布水平荷载作用下的结果.

从图 8 中可以看出用离散有限元方法和连续化方法求得的侧移曲线基本重合.

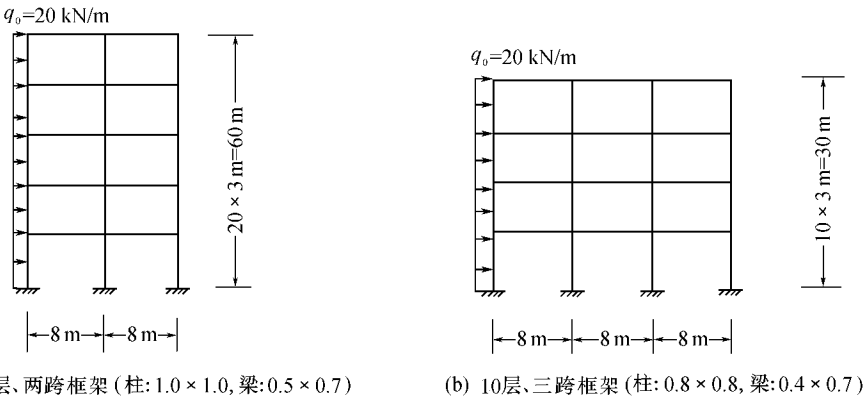


图 7 框架简图
Fig.7 Frame sketch

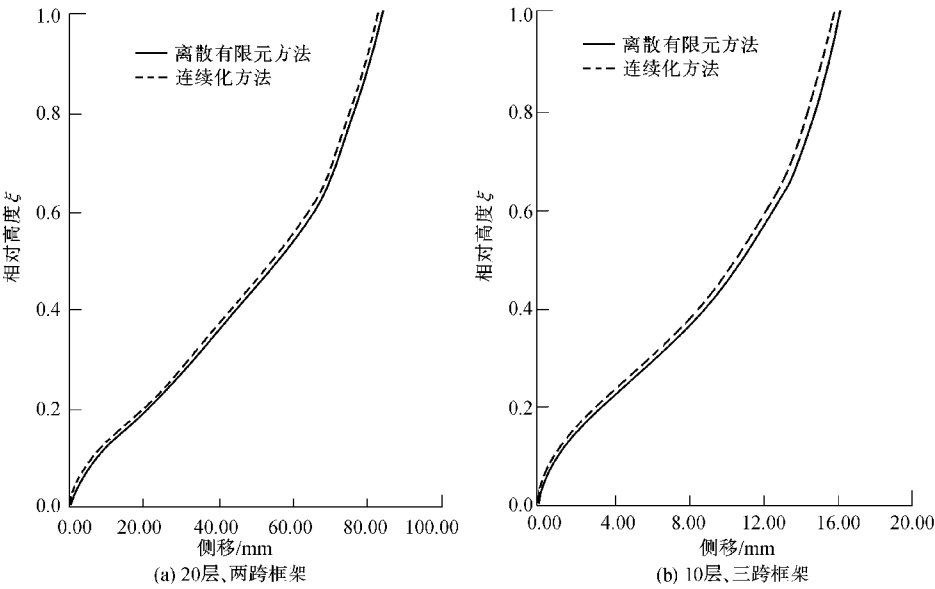


图 8 框架侧移
Fig.8 Lateral displacement of frames

在表 1 中,框架顶点侧移误差(与离散有限元方法比较),20 层、10 层分别为 0.9% 和 2.17% .

5 结 论

用连续化模型计算框架的侧移能够获得较为精确的结果,对一个大型复杂框架又能使计算分析大为简化.在弹性力学和结构力学中,求解位移最重要的方法就是对能量泛函进行变分.因此,基于能量相等原则所建立的连续化模型能够较为准确地等代原来的杆系结构,实例分析的结果也验证了这种等代的有效性.本文方法主要适用于梁、柱截面尺寸沿竖向均匀分布的情况.如为变截面,则需进行变系数的微分方程求解,需另作讨论.

参考文献：

[1] 金问鲁.高层建筑结构的连续化分析[M].北京 中国铁道出版社,1994.1~30.
[2] 朱杰江.框架结构的等效剪切刚度[J].河海大学常州分校学报,2000(3) 20~23.

Analysis of Frame Lateral Displacement Using Continuum Model

ZHU Jie-jiang¹, XU Dao-yuan¹, WANG Ying²

(1. College of Civil Engineering, Hohai Univ., Nanjing 210098, China ;
2. College of Civil Engineering, Shanghai Univ., Shanghai 200072, China)

Abstract An approximate method based on a continuous model is proposed for analysis of strain energy equalization, and a continuum model equivalent to the original frame is derived. By use of this model, a function of frame lateral displacement is established. The analysis of practical examples illustrates that the method for analysing frame lateral displacement is of high accuracy. In the meantime, the continuum method can result in considerable simplicity in computation analysis, making the method attractive in the analysis of large frames, especially during the preliminary design stage.

Key words frame lateral displacement continuum model variational principle

表 1 框架顶点侧移

Table 1 Lateral displacement of tip point mm			
20 层、两跨框架		10 层、三跨框架	
离散有限元方法	连续化方法	离散有限元方法	连续化方法
84.31	83.55	16.15	15.80