

精密三角高程测量平差模型的试验研究

陈振杰¹, 蒋 辉², 章书寿¹

(1. 河海大学土木工程学院, 江苏 南京 210098; 2. 南京建工学院, 江苏 南京 210009)

摘要 : 从数据处理的角度探讨了削减三角高程测量折光误差的问题 , 结合新安江电厂监测网的观测数据 , 对常用的平差模型进行分析、比较 , 探讨了大气折光对平差结果的影响规律 . 在此基础上 , 利用最小二乘配置原理构造了处理折光误差的迭代平差模型 , 取得了良好的效果 .
关键词 : 三角高程测量 ; 平差模型 ; 折光误差
中图分类号 : TB22 文献标识码 : A 文章编号 : 1000-1980(2001)01-0021-04

目前 , 几何水准测量仍是高精度高程传递的主要手段 . 然而 , 几何水准测量速度慢、劳动强度大 , 并且在长距离高程传递过程中 , 折光累积性误差以及标尺、仪器下沉误差会大大影响水准测量的精度 .
高精度测角、测距仪器的广泛使用 , 用三角高程测量进行精密高程传递成为可能 . 用三角高程测量能够避免或减弱水准测量带来的不便和缺点 . 然而 , 由于大气垂直折光的影响 , 三角高程还难以达到精密高程传递的要求 .
常用的削减折光影响的方法有两种 : 气象改正法和数据处理法 . 长期以来的研究表明 , 大气折射场随时间和空间瞬息万变 , 特别是近地面温度梯度变化非常大 , 要想建立一个普遍适用的模型来消除或精确改正大气垂直折光的影响是很困难的 . 现有的诸多模型的适用性和精度均较差 , 并且在测角、测距的同时要测定大量的气象数据 , 难以应用于精密高程测量中的折光改正 .
在众多的控制网中 , 人们常根据一定的网形 , 采用特定的观测方法进行观测 , 然后用数据处理的方法来削减折光误差 . 本文将对常用的数据处理模型进行分析比较 , 进而探讨能够有效削减折光误差的数据处理方法 .

1 平 差 模 型

我们知道 , 三角高程测量高差的计算公式为

$$h_{ij} = H_j - H_i = s_{ij} \tan \alpha_{ij} \left(1 + \frac{H_m}{R} \right) + \frac{s_{ij}^2}{2R \cos^2 \alpha_{ij}} (1 - k_{ij}) + i - v = h_{ij}^0 - \frac{s_{ij}^2}{2R \cos^2 \alpha_{ij}} k_{ij} \tag{1}$$

式中 : h_{ij}^0 ——高差观测值 , $h_{ij}^0 = s_{ij} \tan \alpha_{ij} \left(1 + \frac{H_m}{R} \right) + \frac{s_{ij}^2}{2R \cos^2 \alpha_{ij}} + i - v$; H_i, H_j —— i, j 点的高程 ; s_{ij} —— i 点到 j 点的平距 ; α_{ij} ——垂直角 ; i, v ——仪器高和觇标高 ; k_{ij} —— i 点到 j 点的折光系数 ; H_m —— i, j 点的平均高程 ; R ——地球曲率半径 .

取 $f = h_{ij}^0 + H_i^0 - H_j^0$ 为常数项 , H_i^0 和 H_j^0 为 i 点和 j 点的近似高程 , x_i 和 x_j 为相应的高程改正数 . 结合式 (1) 可得误差方程式为

$$v_{ij} = -x_i + x_j + \frac{s_{ij}^2}{2R \cos^2 \alpha_{ij}} k_{ij} - f \tag{2}$$

2 粗差定位及剔除

如果观测数据中存在粗差 , 那将会扭曲平差模型 , 进而影响平差的结果 . 因而在平差之前必须剔除观测

数据中的粗差,保证观测数据的质量.

一般情况下,检验时是未知方差的,因而选取如下的统计量进行检验:

$$t_i = \frac{v_i}{\sigma \sqrt{Q_{ii}}} \quad (3)$$

式中: σ ——平差后的中误差; Q_{ii} ——平差后改正数协因数阵对角线第*i*个元素.

由数理统计知识可知

$$\frac{t_i}{n-u} \sim \beta\left(\frac{1}{2}, \frac{n-u-1}{2}\right)$$

式中: n ——观测值个数; u ——未知高程个数.

给定显著性水平 α ,得到一个临界值 T ,当 $|t_i| > T$ 时,认为第*i*个观测值有粗差,则将其剔除.

3 精度评定

利用平差计算得到的改正数 v ,根据下面的公式可以求得平差后的每千米高差中误差 m_0 :

$$m_0 = \pm \sqrt{V^T P V / (n - u - d)} \quad (4)$$

式中: P ——观测值的权阵,一般取边长的倒数; d ——折光参数个数; n, u 意义同式(3).

若平差后,高程改正数 x 的协因数阵为 Q_{xx} ,对应的自协因数为 Q_{xii} ,则第*i*个高程的中误差为

$$m_{hi} = m_0 \sqrt{Q_{xii}} \quad (5)$$

4 不同平差模型的比较

用数据处理方法来处理折光误差时有两种方式^[1]:一是先改正,再平差,即外围大气模型;另一是将折光系数作为参数进行平差,即整体大气模型.据此将常用的平差模型归为两类:外围大气模型和整体大气模型.

4.1 外围大气模型

- 往返观测高差取平均,再进行平差.
- 根据经验,折光系数取0.14,对观测高差进行改正,再平差.
- 全网取一个折光系数,平差得到全网折光系数的估值,利用此估值对观测高差进行改正,再进行平差.
- 每边设一个折光系数,平差得到折光系数的估值,利用此估值对观测高差进行改正,再进行平差.
- 在三角高程测量中,观测一般是在白天的大气不稳定状态下进行,根据分层理论^[2],正常折光系数为

$$k = \frac{81.96 P R \cos \alpha}{T^2 \times 10^6} \left[0.0245 - \left(0.0129 + \frac{T}{15868} \right) \frac{e}{P} \right] \quad (6)$$

求得折光系数后,对观测高差进行改正,再进行平差.

4.2 整体大气模型

- 全网设一个折光系数,让它与其他未知数一起参与平差.
- 每条边设一个折光系数,并参与平差.
- 每站设一个折光系数参与平差.设*i*站的折光系数为 k_i ,则*i*站到其他站的折光系数为 k_i ,将 k_i 作为参数参与平差.
- 每站设一个折光系数,设*i*站和*j*站的折光系数分别为 k_i 和 k_j ,则*i*站至*j*站高差对应的折光系数 $k_{ij} = (2k_i + k_j)/3$,然后进行平差.

4.3 实例分析

下面分别用以上9种模型对新安江三角高程测量数据进行处理.新安江监测网共有8个控制点,除第5点外,其余点均有二等水准高程.边长观测采用ME—3000测距仪,其标称精度为 $1 \text{ mm} + 1 \times 10^{-6} D$,竖角采用T2000电子经纬仪观测四测回,其测角精度可望在 $\pm 0.5''$ 以内;采用强制对中的固定观测墩以减小对中误差,仪器高和目标高用千分尺量取.网中所有的边都采用对向观测,观测时记录温度、气压、风速.9种模型的计算结果列于表1中.

由表 1 可以看出:模型(2)(3)(4)(6)(7)所求得的高程平差值相同,这是由于这几个模型中假设往返测的 k 值相等,在平差中没有达到削减折光误差的作用,仅起到减弱随机误差的作用;对于对向观测模型,它们的平差会得到与模型(1)相同的结果.模型(3)(4)中,先将折光系数作为未知参数进行平差,利用平差得到的折光系数对观测值进行折

表 1 9 种模型平差结果比较

Table 1 Comparison of adjustment results of nine models				
平差模型	k 值	平差高程与水准高程差 /mm	高程中误差 /mm	每千米高差中误差 /mm
(1)		-0.8~2.9(平均 1.1)	1.3~2.3	4.012
(2)	0.1400	-0.8~2.9(平均 1.1)	2.5~4.3	10.722
(3)	0.4029	-0.8~2.9(平均 1.1)	1.5~2.6	6.545
(4)	-1.0085~0.6152	-0.8~2.9(平均 1.1)	0.8~1.4	3.538
(5)	0.1066~0.1143	-0.7~2.9(平均 1.1)	2.7~4.6	11.460
(6)	0.4029	-0.8~2.9(平均 1.1)	1.6~2.6	6.665
(7)	-1.0085~0.6152	-0.8~2.9(平均 1.1)	1.3~2.2	5.645
(8)	-0.0461~0.6683	-3.4~1.3(平均 -1.1)	2.4~4.0	6.091
(9)	-0.0703~0.6871	-1.5~1.3(平均 0.5)	1.8~2.9	6.391

光改正,平差后的高程中误差、每千米高差中误差比模型(2)减少了一半左右,这说明模型(3)(4)中计算得到的折光系数能够较好地反映实际的折光情况,而折光系数的经验值无法确切反映实地的折光情况.模型(5)求得的高程与精密水准高程相差也很小,但所得的每千米高差中误差超过 10 mm/km,说明用该气象模型不够理想.模型(8)(9)中,设往返测折光系数 k 值不相等,使高程的平差值有了一定的改善,模型(9)与模型(8)相比,较好地考虑了测程中间的光程变化情况,因而效果较模型(8)好一些.

综观表 1,模型(1)(4)的平差效果最好.它们二者的平差结果相当,而模型(1)较模型(4)更为简单,是一种实用、可靠的方法.然而,模型(1)中本身仍含有折光系统误差的影响,为此,本文后一部分将利用迭代的方法来改进模型(1)的平差效果.

4.4 改进的平差模型

由式(1)可知, i 点至 j 点的高差为

$$h_{ij} = h_{ij}^0 - \frac{s_{ij}^2}{2R\cos^2\alpha_{ij}}k_{ij} \tag{7}$$

j 点至 i 点的高差为

$$h_{ji} = h_{ji}^0 - \frac{s_{ji}^2}{2R\cos^2\alpha_{ji}}k_{ji} \tag{8}$$

则 i 点至 j 点的往返测平均高差为

$$h_m = \frac{h_{ij} - h_{ji}}{2} = \frac{h_{ij}^0 - h_{ji}^0}{2} - \frac{s_{ij}^2}{4R\cos^2\alpha_{ij}}(k_{ij} - k_{ji}) = h_m^0 - \frac{s_{ij}^2}{4R\cos^2\alpha_{ij}}\Delta k_{ij} \tag{9}$$

其中 $h_m^0 = (h_{ij}^0 - h_{ji}^0)/2$ $\Delta k_{ij} = k_{ij} - k_{ji}$

写成误差方程式即为

$$v_{ij} = -x_i + x_j - \frac{s_{ij}^2}{4R\cos^2\alpha_{ij}}\Delta k_{ij} - f \tag{10}$$

其中 $f = h_m^0 + H_i^0 - H_j^0$ 为常数项.

将 Δk_{ij} 看作信号,根据最小二乘配置原理求解.设 i 点和 j 点的平差高程分别为 H_i^0, H_j^0 , 取信号 Δk_{ij} 的期望为零,协方差阵为单位矩阵,则

$$\Delta k_{ij} = \frac{s_{ij}^2}{2R}(\frac{1}{s_{ij}} + \frac{s_{ij}^4}{4R^2})(h_m^0 + H_i^0 - H_j^0)$$

求得 Δk_{ij} 后代入式(10),并将 $\frac{s_{ij}^2}{4R\cos^2\alpha_{ij}}\Delta k_{ij} + f$ 的值作为新的常数项,再用式(10)的模型平差,直至高程改正数的变化小于 0.01 mm, Δk_{ij} 的变化小于 0.01 为止,以最后一次平差的结果为平差的最终成果.

暂且将此种方法称为迭代法,分别用新安江 1994 年、1997 年的数据进行试算,并与模型(1)的结果进行比较,计算结果列于表 2 中.

由表 2 可以看出,迭代法改进了平差的效果,与模型(1)相比,平差后的每千米高差中误差明显减小,这是由于平差中 Δk_{ij} 带走了一部分折光系统误差,削弱了折光误差对模型的干扰.

表 2 迭代法与模型(1)平差结果的比较

Table 2 Comparison of adjustment results of iterative model and model(1)

年份	模型(1)			迭代法				
	每千米高差 中误差 /mm	平差高程与 水准较差 /mm	高程 中误差 /mm	每千米高差 中误差 /mm	平差高程与 水准较差 /mm	高程 中误差 /mm	折光系数 计算值	迭代 次数
1994	3.428	0.105 ~ 4.210 (平均 1.936)	1.467 ~ 1.911	2.783	0.096 ~ 4.259 (平均 1.910)	1.91 ~ 1.552	-0.094 ~ 0.069	4
1997	4.012	-0.783 ~ 2.861 (平均 1.120)	1.336 ~ 2.259	2.962	-0.348 ~ 2.641 (平均 1.116)	0.987 ~ 1.668	-0.117 ~ 0.131	5

5 结论与建议

- a. 由于大气折光对三角高程测量的影响较大,且因素复杂,目前尚未研究出合适的折光模型.该问题可以通过两个途径,即本文所述的外围大气模型与整体大气模型的方法解决.对前者又有两种方法:其一,利用观测值反求折光系数,对观测高差进行改正,再平差,这样效果较好,如模型(3)(4);其二,通过试验拟合出适合于该地区的折光模型,或求出本地区特征气象、地表条件下的大气折光系数,预先对观测值进行改正,然后平差.由于大气折射的复杂性,如果没有根据本地区长期观测资料建立的折光改正模型,此法较难应用于实际,这正是算例中模型(2)(5)结果均不够理想的原因.模型(4)平差效果较其他模型的好,应用于多余观测较多的网中能够取得很好的效果.
- b. 对于对向观测的网,在应用整体大气模型进行折光改正时,如果将往返观测的折光系数设为同一个 k 值,在平差时将单一方向组成误差方程进行解算后,使 k 值的作用大部分抵消,如模型(6)(7);而模型(8)(9)设往返观测的 k 值不相等,取得了较好的效果,其中模型(9)的高程平差值与精密水准高程相差在2mm以内,是差值最小的一组成果.对于对向观测的EDM三角高程网,有一定的参考价值.
- c. 对向观测的网中,采用对向观测取平均是一种稳定、可靠、效果较好的数据处理方法,一般都能得到精度较高的高程平差值.迭代法能够削减往返测折光情况不同造成的误差,对对向观测的网,特别是多余观测较少的网,有良好的应用价值.

参考文献:

[1] 布伦纳 F K. 大地测量的折射问题[M]. 北京: 测绘出版社, 1988. 90 ~ 140.

[2] 刘志德, 章书寿, 郑汉球, 等. EDM三角高程测量[M]. 北京: 测绘出版社, 1996. 1 ~ 170.

[3] 於宗俦, 于正林. 测量平差原理[M]. 武汉: 武汉测绘科技大学出版社, 1989. 170 ~ 230.

Experimental Study on Adjustment Model for Data Processing in
Rigorous Trigonometric Leveling

CHEN Zhen-jie¹, JIANG Hui², ZHANG Shu-shou¹

(1. College of Civil Engineering, Hohai Univ., Nanjing 210098, China;
2. Nanjing Architectural & Civil Engineering Institute, Nanjing 210009, China)

Abstract: In this paper, refraction error reduction in trigonometric leveling is discussed from the viewpoint of data processing. According to the observation data at the Xinanjiang power plant, current adjustment models are compared and analyzed. Then, on the basis of least squares collocation, an iterative model is given to dispose the refraction error, and the effect is satisfactory.

Key words: trigonometric leveling; adjustment model; refraction error